ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές.

Άσκηση(Συνέχεια)

Αν $v_2 \in V_2(A)$ τότε θα έχει τη μορφή $v_2 = (0, ., .)$, γιατί είναι ορθογώνιο στο $v_1 = (1, 0, 0)$.

Άσκηση(Συνέχεια)

Αν $v_2 \in V_2(A)$ τότε θα έχει τη μορφή $v_2 = (0, ., .)$, γιατί είναι ορθογώνιο στο $v_1 = (1, 0, 0)$.
Αντίστοιχα, αν $v_3 \in V_7(A)$ τότε θα έχει πάλι τη μορφή $v_3 = (0, ., .)$ και επίσης θα είναι $v_3 \perp v_2$ και $V_1(A) \oplus V_2(A) \oplus V_7(A) = \mathbb{R}^3$.

Άσκηση(Συνέχεια)

Αν $v_2 \in V_2(A)$ τότε θα έχει τη μορφή $v_2 = (0, ., .)$, γιατί είναι ορθογώνιο στο $v_1 = (1, 0, 0)$.
Αντίστοιχα, αν $v_3 \in V_7(A)$ τότε θα έχει πάλι τη μορφή $v_3 = (0, ., .)$ και επίσης θα είναι $v_3 \perp v_2$ και $V_1(A) \oplus V_2(A) \oplus V_7(A) = \mathbb{R}^3$.
Βρίσκουμε $V_2(A) = \{t(0, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

Άσκηση(Συνέχεια)

Αν $v_2 \in V_2(A)$ τότε θα έχει τη μορφή $v_2 = (0, ., .)$, γιατί είναι ορθογώνιο στο $v_1 = (1, 0, 0)$.
Αντίστοιχα, αν $v_3 \in V_7(A)$ τότε θα έχει πάλι τη μορφή $v_3 = (0, ., .)$ και επίσης θα είναι $v_3 \perp v_2$ και $V_1(A) \oplus V_2(A) \oplus V_7(A) = \mathbb{R}^3$.
Βρίσκουμε $V_2(A) = \{t(0, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$
Από τη θεωρία συμπεραίνουμε ότι $V_7(A) = \{t(0, 1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$

Άσκηση(Συνέχεια)

Αν $v_2 \in V_2(A)$ τότε θα έχει τη μορφή $v_2 = (0, ., .)$, γιατί είναι ορθογώνιο στο $v_1 = (1, 0, 0)$.
Αντίστοιχα, αν $v_3 \in V_7(A)$ τότε θα έχει πάλι τη μορφή $v_3 = (0, ., .)$ και επίσης θα είναι $v_3 \perp v_2$ και $V_1(A) \oplus V_2(A) \oplus V_7(A) = \mathbb{R}^3$.
Βρίσκουμε $V_2(A) = \{t(0, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$
Από τη θεωρία συμπεραίνουμε ότι $V_7(A) = \{t(0, 1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$
Τέλος, θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα
$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ για τον οποίο ισχύει
$P^{-1} = P^* = P^T$. Τότε έχουμε

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Έστω $\Phi : V \to V$ γραμμική έτσι ώστε $\Phi^{-1} = \Phi^*$, να συγκρίνετε τα ιδιοδιανύσματα.
(Γνωρίζουμε ότι λ ιδιοτιμή της $\Phi \Rightarrow |\lambda| = 1$)

Άσκηση

Έστω $\Phi : V \to V$ γραμμική έτσι ώστε $\Phi^{-1} = \Phi^*$, να συγκρίνετε τα ιδιοδιανύσματα.
(Γνωρίζουμε ότι λ ιδιοτιμή της $\Phi \Rightarrow |\lambda| = 1$)
Έστω $v \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα της $\Phi \Rightarrow$
$\Phi(v) = \lambda v \Rightarrow \Phi^*(\Phi(v)) = \Phi^*(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda \Phi^*(v)$

Άσκηση

Έστω $\Phi : V \to V$ γραμμική έτσι ώστε $\Phi^{-1} = \Phi^*$, να συγκρίνετε τα ιδιοδιανύσματα.
(Γνωρίζουμε ότι λ ιδιοτιμή της $\Phi \Rightarrow |\lambda| = 1$)
Έστω $v \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα της $\Phi \Rightarrow$
$\Phi(v) = \lambda v \Rightarrow \Phi^*(\Phi(v)) = \Phi^*(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda \Phi^*(v)$
Τότε, αφού $\lambda \neq 0$ βρίσκουμε ότι $\Phi^*(v) = \frac{1}{\lambda} v$. Αφού $|\lambda| = 1$ καταλήγουμε ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή της Φ^* με ιδιοδιάνυσμα v

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές: $ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές:
$ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.
Σε τρείς μεταβλητές $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
π.χ. $x^2 + y^2$

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές:
$ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.
Σε τρείς μεταβλητές $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
π.χ. $x^2 + y^2$

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές:
$ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.
Σε τρείς μεταβλητές $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
π.χ. $x^2 + y^2$

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές:
$ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.
Σε τρείς μεταβλητές $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
π.χ. $x^2 + y^2$

Τετραγωνικές μορφές

Θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές βαθμού 2 ομογενές:
$ax^2 + bxy + cy^2$, όπου $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$.
Σε τρείς μεταβλητές $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
π.χ. $x^2 + y^2$

Παράδειγμα

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 4xy + y^2 = 3$. Η εξίσωση αυτή περιγράφεται μέσω πινάκων από την εξίσωση

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3I_1$$

Γενικότερα σε κάθε τετραγωνική μορφή $ax^2 + bxy + cy^2$ αντιστοιχεί (και αντίστροφα) ένας πίνακας της μορφής $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του παραπάνω παραδείγματος $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = (x+1)(x-3)$, ιδιοτιμές $-1, 3$.

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$P_A(x) = (x+1)(x-3)$, ιδιοτιμές $-1, 3$.
Ακόμα υπολογίζουμε $V_{-1}(A) = \{t(1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$P_A(x) = (x+1)(x-3)$, ιδιοτιμές $-1, 3$.
Ακόμα υπολογίζουμε $V_{-1}(A) = \{t(1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
Θέτουμε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και η εξίσωση γράφεται $X^T A X = 3I_1$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = (x+1)(x-3)$, ιδιοτιμές $-1, 3$.
Ακόμα υπολογίζουμε $V_{-1}(A) = \{t(1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$

Θέτουμε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και η εξίσωση γράφεται $X^T AX = 3I_1$

Γνωρίζουμε ότι αν $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ τότε

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D \Rightarrow A = PDP^T$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$P_A(x) = (x+1)(x-3)$, ιδιοτιμές $-1, 3$.
Ακόμα υπολογίζουμε $V_{-1}(A) = \{t(1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
Θέτουμε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και η εξίσωση γράφεται $X^T A X = 3I_1$
Γνωρίζουμε ότι αν $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ τότε
$P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D \Rightarrow A = PDP^T$
Άρα έχουμε $X^T(PDP^T)X = 3I_1 \Rightarrow (X^T P)D(XP^T)$. Θέτουμε $Z = P^T X \Rightarrow Z^T = X^T P$, αλλαγή συντεταγμένων:
$Z^T D Z = 3I_1$. Αν $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ τότε έχουμε την εξίσωση
$-z_1^2 + 3z_2^2 = 3$ που έχει γράφημα μια υπερβολή.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης