ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 11. Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος
- Παράδειγμα

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε: Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος, Αν $< v, f(w) > = < v, g(w) >$ για κάθε v, w τότε $f = g$, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος.

Ασκήσεις (συνέχεια)

Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι και η συνάρτηση $i\,(\Phi - \Phi^{*}) : V \Rightarrow V$ είναι αυτοπροσαρτημένη.

Ασκήσεις (συνέχεια)

Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι και η συνάρτηση $i(\Phi - \Phi^*) : V \Rightarrow V$ είναι αυτοπροσαρτημένη.
Ο πίνακας της συνάρτησης είναι $iA - iA^*$
Αρκεί να δειχθέι ότι $(iA - iA^*)^* = iA - iA^*$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Θα δειχθεί στη συνέχεια ότι και η συνάρτηση $i\,(\Phi - \Phi^*) : V \Rightarrow V$ είναι αυτοπροσαρτημένη.
Ο πίνακας της συνάρτησης είναι $iA - iA^*$
Αρκεί να δειχθέι ότι $(iA - iA^*)^* = iA - iA^*$
Έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{(iA - iA^*)^T} &= \overline{iA^T - (iA^*)^T} = \overline{iA^T} - \overline{(iA^*)^T} \\ &= -iA^* - (-i)(A^*)^* = -iA^* + iA = iA - iA^*\end{aligned}$$

Άρα $(i\Phi - i\Phi^*)^* = i\Phi - i\Phi^*$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi \circ \Phi^* : V \Rightarrow V$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi \circ \Phi^* : V \Rightarrow V$

Ο πίνακας της συνάρτησης είναι AA^*

Αρκεί να δειχθέι ότι $(AA^*)^* = AA^*$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi \circ \Phi^* : V \Rightarrow V$
Ο πίνακας της συνάρτησης είναι AA^*
Αρκεί να δειχθέι ότι $(AA^*)^* = AA^*$
Έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{(AA^*)^T} &= \overline{(A^*)^T A^T} = \overline{(A^*)^T A^T} \\ &= (A^*)^* A^* = AA^*\end{aligned}$$

Άρα $(\Phi \circ \Phi^*)^* = \Phi \circ \Phi^*$

Φασματικό Θεώρημα

Έστω $A = A^*(A \in M_n(\mathbb{R}))$
Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή
$\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^*P = I : P^*AP = D$ διαγώνιος.

Φασματικό Θεώρημα

Έστω $A = A^*(A \in M_n(\mathbb{R}))$
Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή
$\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^*P = I : P^*AP = D$ διαγώνιος.
Ισχύει το αντίστροφο;

Φασματικό Θεώρημα

Έστω $A = A^*(A \in M_n(\mathbb{R}))$
Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή
$\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^*P = I : P^*AP = D$ διαγώνιος.
Ισχύει το αντίστροφο;
Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^TP = I : P^TAP = D$ διαγώνιος. Ισχύει ότι $A = A^* = A^T$;

Φασματικό Θεώρημα

Έστω $A = A^*(A \in M_n(\mathbb{R}))$
Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή
$\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^*P = I : P^*AP = D$ διαγώνιος.
Ισχύει το αντίστροφο;
Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\exists P \in M_n(\mathbb{R}), P^TP = I : P^TAP = D$ διαγώνιος. Ισχύει ότι $A = A^* = A^T$;

$$A = (P^T)^{-1} D P^{-1} = P D P^T \Rightarrow$$
$$A^T = (P D P^T)^T = (P^T)^T D^T P^T \Rightarrow$$
$$A^T = P D P^T = A$$

$$A = (P^T)^{-1} D P^{-1} = P D P^T \Rightarrow$$
$$A^T = (P D P^T)^T = (P^T)^T D^T P^T \Rightarrow$$
$$A^T = P D P^T = A$$

Άρα αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός

Παράδειγμα

Είδαμε το παράδειγμα όπου ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$. Ο πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αλλά $A \neq A^*$.

Παράδειγμα

Είδαμε το παράδειγμα όπου ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$. Ο πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αλλά $A \neq A^*$.

Ερώτημα 1: Μήπως αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος τότε $A = A^*$;

Παράδειγμα

Είδαμε το παράδειγμα όπου ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$. Ο πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αλλά $A \neq A^*$.
Ερώτημα 1: Μήπως αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος τότε $A = A^*$;

Παράδειγμα

Είδαμε το παράδειγμα όπου ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$. Ο πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αλλά $A \neq A^*$.
Ερώτημα 1: Μήπως αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος τότε $A = A^*$;
Ερώτημα 2: Υπάρχει αναγκαία συνθήκη για το πότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος; ($A = A^*$ αναγκαία συνθήκη)
Απάντηση: Υπάρχει τέτοια συνθήκη και οι πίνακες που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη λέγονται κανονικοί

Παράδειγμα

Είδαμε το παράδειγμα όπου ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm i$. Ο πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος αλλά $A \neq A^*$.

Ερώτημα 1: Μήπως αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος τότε $A = A^*$;

Ερώτημα 2: Υπάρχει αναγκαία συνθήκη για το πότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος; ($A = A^*$ αναγκαία συνθήκη)

Απάντηση: Υπάρχει τέτοια συνθήκη και οι πίνακες που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη λέγονται κανονικοί

Ορισμός: Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται κανονικός αν $AA^* = A^*A$

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^*$ τότε $AA^* = AA = A^*A$.

Δηλαδή κάθε αυτοπροσαρτημένος πίνακας είναι κανονικός

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^*$ τότε $AA^* = AA = A^*A$.

Δηλαδή κάθε αυτοπροσαρτημένος πίνακας είναι κανονικός

3. Έστω $P^* = P^{-1}$. Τότε $PP^* = PP^{-1} = I_n = P^{-1}P = P^*P$

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^*$ τότε $AA^* = AA = A^*A$.

Δηλαδή κάθε αυτοπροσαρτημένος πίνακας είναι κανονικός

3. Έστω $P^* = P^{-1}$. Τότε $PP^* = PP^{-1} = I_n = P^{-1}P = P^*P$
4. Έστω A, B κανονικοί, είναι AB κανονικός; Αρκεί να εξεταστεί πότε ισχύει $AB(AB)^* = (AB)^*AB$ είτε να βρεθεί αντιπαράδειγμα.

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^*$ τότε $AA^* = AA = A^*A$.
Δηλαδή κάθε αυτοπροσαρτημένος πίνακας είναι κανονικός
3. Έστω $P^* = P^{-1}$. Τότε $PP^* = PP^{-1} = I_n = P^{-1}P = P^*P$
4. Έστω A, B κανονικοί, είναι AB κανονικός; Αρκεί να εξεταστεί πότε ισχύει $AB(AB)^* = (AB)^*AB$ είτε να βρεθεί αντιπαράδειγμα.
5. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^T$ είναι ο A κανονικός;

Παραδείγματα

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A = A^T$ τότε $AA^* = AA = A^*A$
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^*$ τότε $AA^* = AA = A^*A$.

Δηλαδή κάθε αυτοπροσαρτημένος πίνακας είναι κανονικός

3. Έστω $P^* = P^{-1}$. Τότε $PP^* = PP^{-1} = I_n = P^{-1}P = P^*P$
4. Έστω A, B κανονικοί, είναι AB κανονικός; Αρκεί να εξεταστεί πότε ισχύει $AB(AB)^* = (AB)^*AB$ είτε να βρεθεί αντιπαράδειγμα.
5. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $A = A^T$ είναι ο A κανονικός;
6. Αν A κανονικός και $P^{-1} = P^*$ τότε PAP^* κανονικός.

Πράγματι, $PAP^*(PAP^*)^* = PAP^*PA^*P^* = PAA^*P^* = PA^*AP^* = ... = (PAP^*)^*PAP^*$

Στο επόμενο μάθημα θα δούμε ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε A είναι κανονικός

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης