ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 11. Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος

Ασκήσεις

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε: Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος, Αν $< v, f(w) >=< v, g(w) >$ για κάθε v, w τότε $f = g$, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε: Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος, Αν $< v, f(w) >=< v, g(w) >$ για κάθε v, w τότε $f = g$, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος.

Ασκήσεις

$\Phi : V \to V$, ερμητιανός

Θυμίζουμε ότι $< a, b >= \overline{< b, a >}, < \Phi(a), b >=< a, \Phi^*(b) >$

$\Phi = \Phi^* \Rightarrow < \Phi(v), v > \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < \Phi(v), v > &= \overline{< v, \Phi(v) >} \\ &=< v, \Phi^*(v) > \\ &=< v, \Phi(v) > \Rightarrow \\ &< \Phi(v), v >=< v, \Phi(v) > \Rightarrow \\ &< \Phi(v), v > \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ ay + 4z &= 0 \\ 2x + 5y + az &= 0 \end{aligned}$$

Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow rank(A) =$ αριθμός στηλών του $A = 3$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_3'=\Gamma_3-\alpha\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a & -a^2+2a+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow^{\Gamma_3'=\Gamma_3-\alpha\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & a & -a^2+2a+4 \end{pmatrix}$$

Άρα $rank(A) = 3 \Leftrightarrow -a^2+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow$

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+2y+z, ay+4z, 2x+5y+az)$, να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε $Ker(f) = 0$ (f ένα προς ένα μονομορφισμός)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+2y+z, ay+4z, 2x+5y+az)$, να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε $Ker(f) = 0$ (f ένα προς ένα μονομορφισμός)

$Ker(f) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow rank(A) = 3$.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + z, ay + 4z, 2x + 5y + az)$, να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε $Ker(f) = 0$ (f ένα προς ένα μονομορφισμός)

$Ker(f) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow rank(A) = 3$.

$$(3,10,b) \in Im(f) \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \end{pmatrix} \text{ είναι συμβατό}$$

$$\Leftrightarrow rank(A| \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \end{pmatrix}) = rank(A)$$

$$(3,10,b) \in Im(f) \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \end{pmatrix} \text{ είναι συμβατό}$$

$$\Leftrightarrow rank(A| \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \end{pmatrix}) = rank(A)$$

Αν $rank(A) = 3$ το σύστημα είναι πάντα συμβατό και ο A^{-1} υπάρχει. Κοιτάμε έπειτα τις περιπτώσεις όταν $rank(A) \neq 3$

Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε f να είναι ισομετρία (δηλαδή $\|f(v)\| = \|v\|$)

Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε f να είναι ισομετρία (δηλαδή $\|f(v)\| = \|v\|$)

Να βρεθεί $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε f να είναι ισομετρία (δηλαδή $\|f(v)\| = \|v\|$)
Αν f είναι ισομετρία τότε $A_f A_f^* = I_3 \Rightarrow A_f A_f^T = I_3$, μήκος κάθε στήλης είναι μονάδα και οι στήλες είναι ανά δύο ορθογώνιες.
Παρατηρούμε ότι $f(e_1) = (1, 0, 2)$ άρα $\|e_1\| = 1 \neq \|f(e_1)\| = \sqrt{5}$ συνεπώς η f δεν μπορεί να είναι ισομετρία.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, τότε όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, τότε όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
Έστω H ερμητιανός και $g : H \to H$ γραμμική τότε αν λ ιδιοτιμή της g τότε $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή της g^*

Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

να βρεθούν τρείς πίνακες P ώστε $P^T A P =$ διαγώνιος

$T : H \to H$ γραμμική συνάρτηση

$Ker(T^*) = (Im(T))^{\perp}$

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία και w ιδιοδιάνυσμα.
Τότε ϕ ισομορφισμός, δηλαδή ένα προς ένα και επί $\Leftrightarrow A_\phi$ αντιστρέψιμος. Αλλά αφού ϕ ισομετρία θα ισχύει ότι $A_\phi A_\phi^* = I_3$ άρα ϕ ισομορφισμός.
Να δειχθεί ότι $5w$ ιδιοδιάνυσμα της ϕ^*.

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία και w ιδιοδιάνυσμα.
Τότε ϕ ισομορφισμός, δηλαδή ένα προς ένα και επί $\Leftrightarrow A_\phi$ αντιστρέψιμος. Αλλά αφού ϕ ισομετρία θα ισχύει ότι $A_\phi A_\phi^* = I_3$ άρα ϕ ισομορφισμός.
Να δειχθεί ότι $5w$ ιδιοδιάνυσμα της ϕ^*.
Αφού ϕ ισομετρία τότε $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$
Έχουμε

$$\phi(w)\lambda w \to \phi(5w) = 5\lambda w \to$$

$$\phi^{-1}\phi(5w) = \phi^{-1}(5\lambda w) \to$$

$$\phi^{-1}(5w) = \frac{1}{5\lambda}5w$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης