ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σχεδίαση με Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές

Ενότητα # 12: Μετασχηματισμοί συντεταγμένων στις 2 διαστάσεις

Καθηγητής Ιωάννης Γ. Παρασχάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων στις 2 διαστάσεις

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D
2. Πίνακες μετασχηματισμών. Γιατί;
3. Ομογενείς συντεταγμένες
4. Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες
5. Βασικοί πίνακες μετασχηματισμού στις 2-D
6. Παράδειγμα στροφής γύρω από τυχαίο σημείο

Σκοποί ενότητας

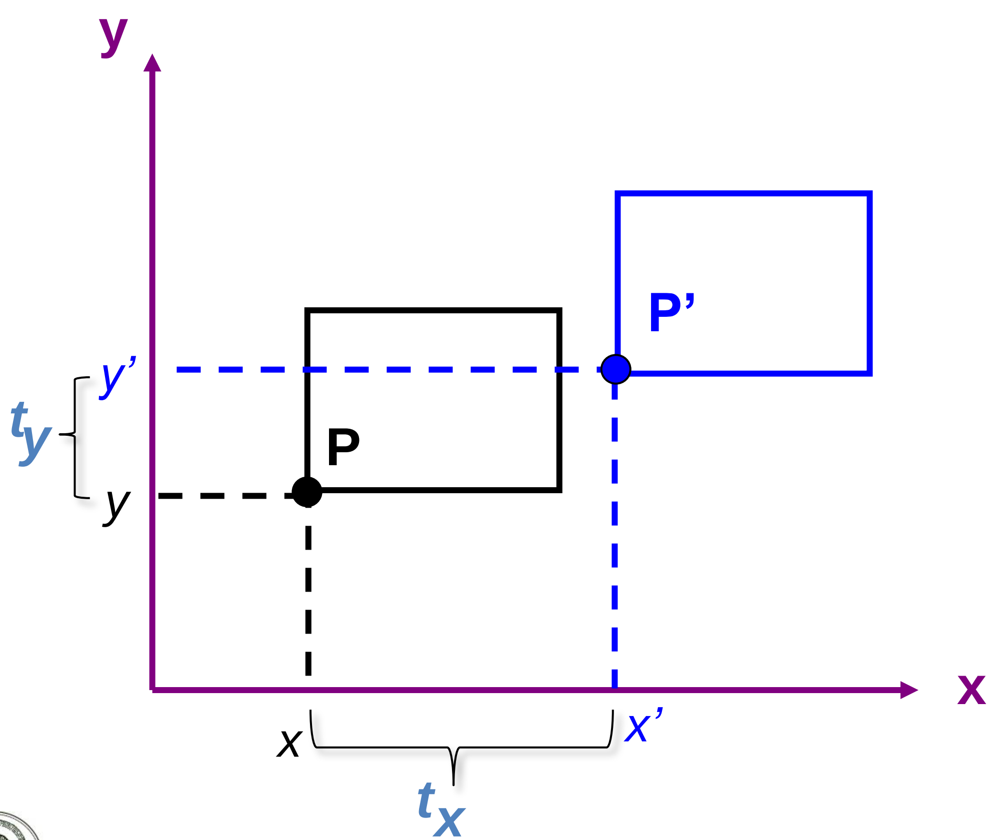
- Κατανόηση των μετασχηματισμών στις 2 διαστάσεις

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (1/7)

- Μετάθεση
- Στροφή
- Κλίμακα

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (2/7)

Μετάθεση – μετακίνηση (translation) ενός σημείου P (x,y) σε μια νέα θέση



$$x' = tx + x$$
$$y' = ty + y$$

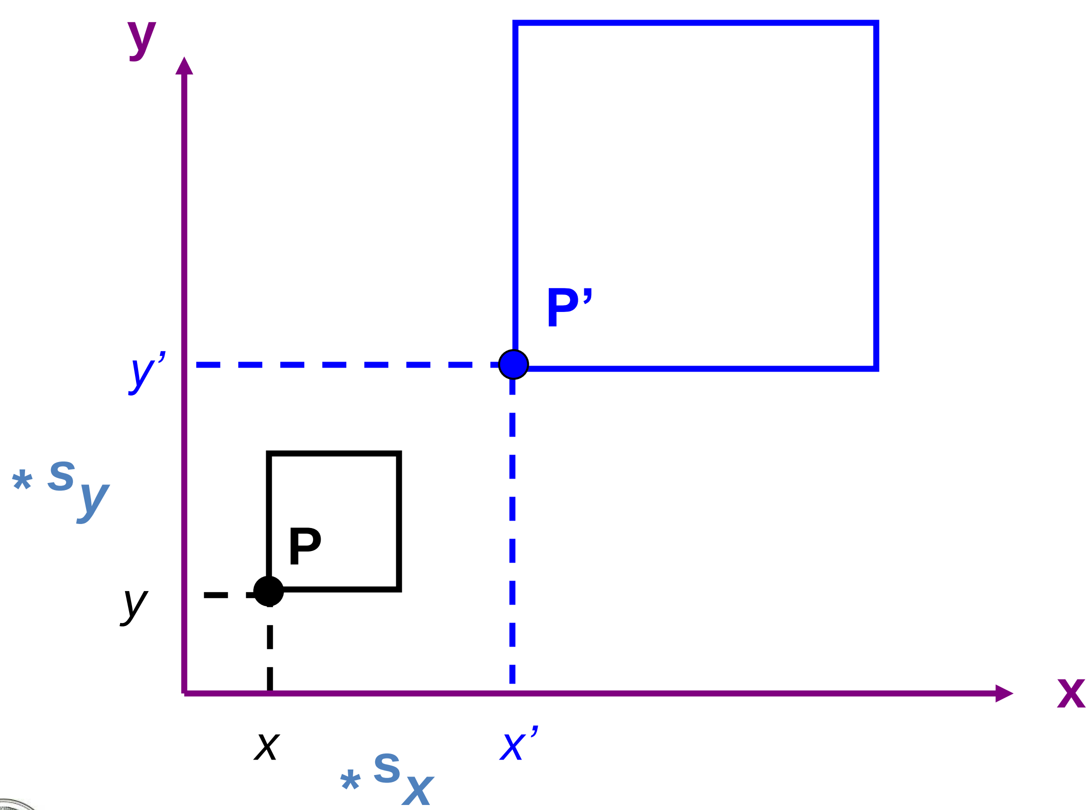
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = T + P$$

T = πίνακας μετάθεσης

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (3/7)

Η αλλαγή κλίμακας (scale) στις συντεταγμένες όλων των σημείων ενός σχήματος, έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή κλίμακας του σχεδίου (σμίκρυνση-μεγέθυνση), πολλαπλασιάζοντας τις συντεταγμένες με κάποια ποσότητα.



$$x' = Sx * x$$
$$y' = Sy * y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

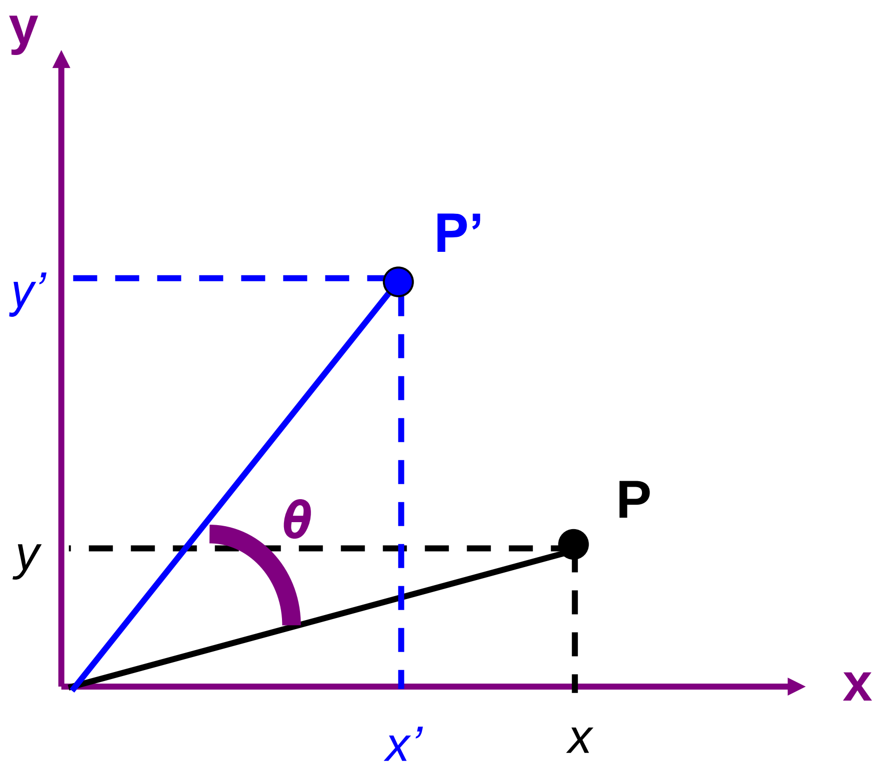
$$P' = S * P$$

9

S = πίνακας κλίμακας

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (4/7)

Στροφή (rotation) ενός αντικειμένου κατά γωνία θ (πχ. δεξιόστροφα) σε σχέση με την αρχή των αξόνων



$$x' = x * \cos\theta - y * \sin\theta$$
$$y' = x * \sin\theta + y * \cos\theta$$

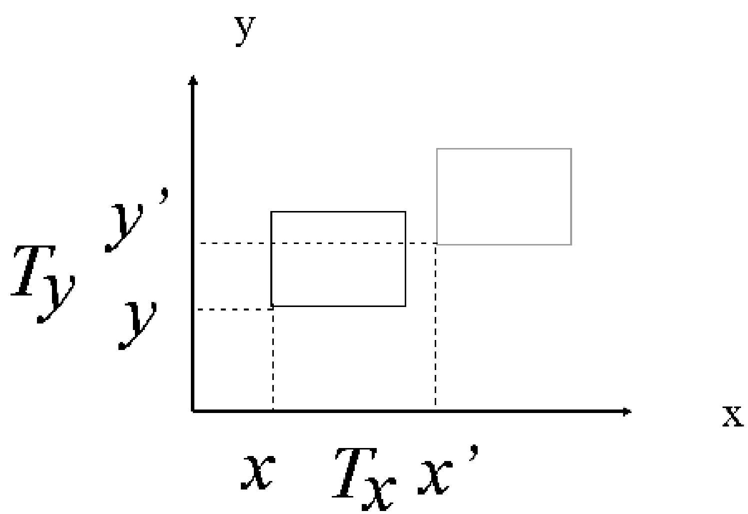
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = R * P$$

R = πίνακας στροφής

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (5/7)

Μετάθεση (Translation) στις 2-D με πίνακες μετασχηματισμού

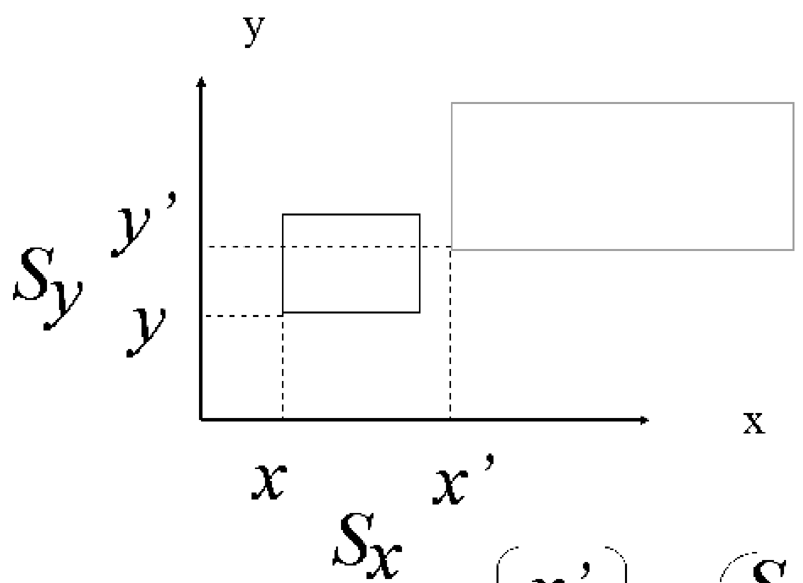


$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (6/7)

Κλίμακα (Scale) στις 2-D με πίνακες μετασχηματισμού

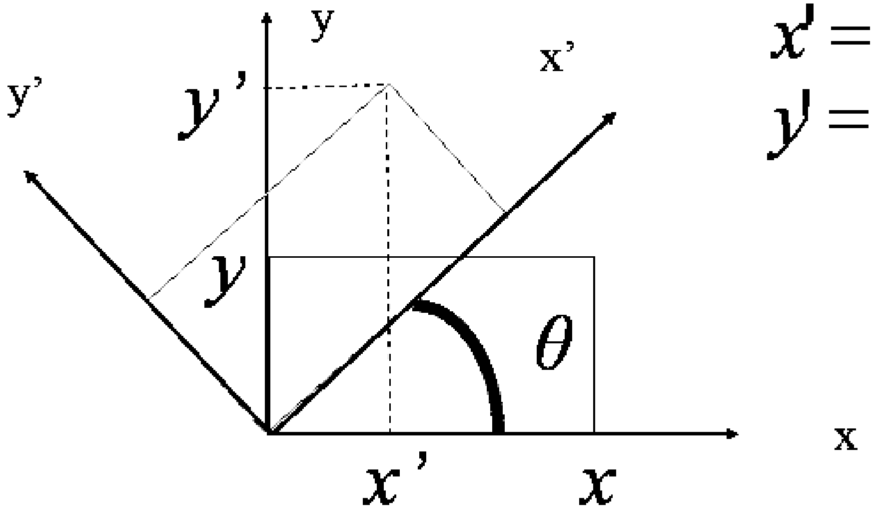


$$x' = S_x \, x$$
$$y' = S_y \, y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στις 2-D (7/7)

Στροφή (Rotation) στις 2-D με πίνακες μετασχηματισμού



$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Πίνακες μετασχηματισμών. Γιατί; (1/2)

- Χρησιμοποιούμε πίνακες για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς
- Στόχος είναι να καταλήξουμε σε έναν ενιαίο πίνακα μετασχηματισμού που θα μετατρέπει τελικά τις Παγκόσμιες συντεταγμένες σε συντεταγμένες Συσκευής
- Πρόβλημα: Η κλίμακα και η στροφή απαιτούν πολλαπλασιασμό, ενώ η μετάθεση απαιτεί πρόσθεση πινάκων
- Λύση: Χρήση ομογενών συντεταγμένων

Πίνακες μετασχηματισμών. Γιατί; (2/2)

- Συνδυασμός μετασχηματισμών μπορεί να γίνει μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων
- Οι πίνακες μετασχηματισμού μπορούν να ενσωματωθούν ως εντολές γραφικών σε κάρτες γραφικών, συσκευές απεικόνισης και βιβλιοθήκες γραφικών, αυξάνοντας δραματικά την ταχύτητα του τελικού προϊόντος

Ομογενείς συντεταγμένες (1/4)

Έστω ένα σημείο P με συντεταγμένες (x,y), δηλ. P(x,y). Το ίδιο σημείο στο σύστημα των ομογενών συντεταγμένων θα περιγράφεται με τις συντεταγμένες (X,Y,W), δηλ. P(X,Y,W).

Όπου :

$X = x\ W$ και $Y = y\ W$

Συνήθως $W=1$

Ομογενείς συντεταγμένες (2/4)

Οι ομογενείς συντεταγμένες χρησιμοποιούνται διότι

- Είναι δυνατός ο συνδυασμός και των τριών βασικών μετασχηματισμών
- Απλουστεύεται με αυτόν τον τρόπο η διαδικασία των μετασχηματισμών

Ομογενείς συντεταγμένες (3/4)

Καρτεσιανές συντεταγμένες		Ομογενείς συντεταγμένες
P (x, y)	⇨	**P (X, Y, W)**

$P' = T + P$	Μετάθεση	$P' = T * P$
$P' = S * P$	Κλίμακα	$P' = S * P$
$P' = R * P$	Στροφή	$P' = R * P$

Ομογενείς συντεταγμένες (4/4)

W = Συντελεστής διάφορος του μηδενός. Συνήθως ισούται με τη μονάδα

$$\left.\begin{aligned} X &= x * W \\ Y &= y * W \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Μετάθεση

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = T * P$$

Κλίμακα

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = S * P$$

Στροφή

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = R * P$$

Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες (1/5)

- Ομογενείς συντεταγμένες: Προστίθεται μια επιπλέον συντεταγμένη σε αμφότερες τις Παγκόσμιες και Συντεταγμένες Συσκευής

$$\begin{bmatrix} x' & y' & w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

- Μετάθεση, στροφή κα κλίμακα μπορούν να δίνονται από έναν ενιαίο πίνακα (θέτοντας w=1)

Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες (2/5)

Πίνακας μετασχηματισμού «Μετάθεσης» με ομογενείς συντ/νες

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει :

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες (3/5)

Πίνακας Μετασχηματισμού «Στροφής γύρω από άξονα x» με ομογενείς συντ/νες

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει :

$$x' = x$$

$$y' = y\cos\theta$$

Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες (4/5)

Πίνακας Μετασχηματισμού «Κλίμακας» με ομογενείς συντ/νες

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει :

$$x' = S_x x$$

$$y' = S_y y$$

Πίνακες Μετασχηματισμών με Ομογενείς Συντεταγμένες (5/5)

Πίνακα μετασχηματισμού στροφής με ομογενείς συντ/νες:
Στροφή περί της αρχής των αξόνων

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει :

$$x' = x\cos\phi - y\sin\phi$$

$$y' = x\sin\phi + y\cos\phi$$

Βασικοί πίνακες μετασχηματισμού στις 2-D

Βασικοί πίνακες μετασχηματισμού στις 2-D

Μετάθεση (Translation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

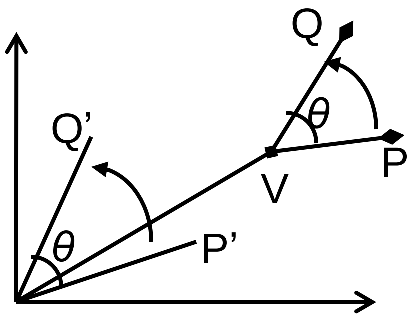
Κλίμακα (Scaling)

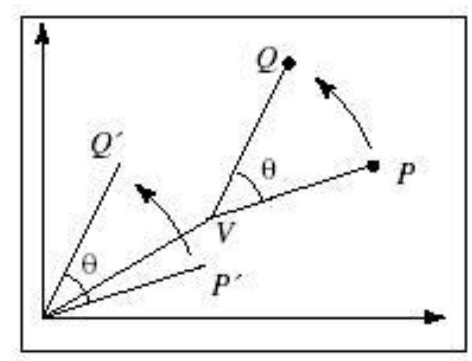
$$\begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στροφή (Rotation)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα στροφής γύρω από τυχαίο σημείο





1. Μετάθεση του P μέσω του διανύσματος v = (-Vx, -Vy) στην αρχή των αξόνων
2. Στροφή κατά θ περί της αρχής των αξόνων
3. Μετάθεση του P πίσω μέσω v

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_x \\ 0 & 0 & V_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -V_x \\ 0 & 0 & -V_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & d_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Δημήτριος Σαραφίδης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης