ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αστροφυσική

Ενότητα # **2**: Αστρική Δομή - Εφαρμογές Ρευστοδυναμικής

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

BY NC ND

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αστροφυσική
Μάθημα 1

Λουκάς Βλάχος

Βασικές εξισώσεις (ιδανικής) υδροδυναμικής

Μακροσκοπικές ποσότητες του ρευστού τη χρονική στιγμή t στη θέση

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e_x} + y(t)\hat{e_y} + z(t)\hat{e_z}$$

- Ταχύτητα ρευστού $\vec{u}(\vec{r},t)$
- Πυκνότητα ρευστού $\rho(\vec{r},t)$
- Πίεση $P(\vec{r},t)$
- Θερμοκρασία $T(\vec{r},t)$

Εξίσωση συνέχειας του ρευστού

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Εξίσωση Euler ή εξίσωση κίνησης

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla P + \vec{F}$$

Καταστατική εξίσωση (ιδανικό αέριο):

$$P = \frac{\rho}{\mu m} k_B T = c_s^2 \rho$$

όπου $c_s = (\partial P \backslash \partial \rho)^{1\backslash 2}$ είναι η ταχύτητα του ήχου αν οι μεταβολές είναι αδιαβατικές,

$$P = K\rho^{\gamma}$$

Βαρυτικό Ρευστό (σφαιρική συμμετρία)

$$\vec{F} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\vec{e_r}$$

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

Θεώρημα Virial

(U=εσωτερική ενέργεια, W=δυναμική ενέργεια,
I=ροπή αδρανείας)

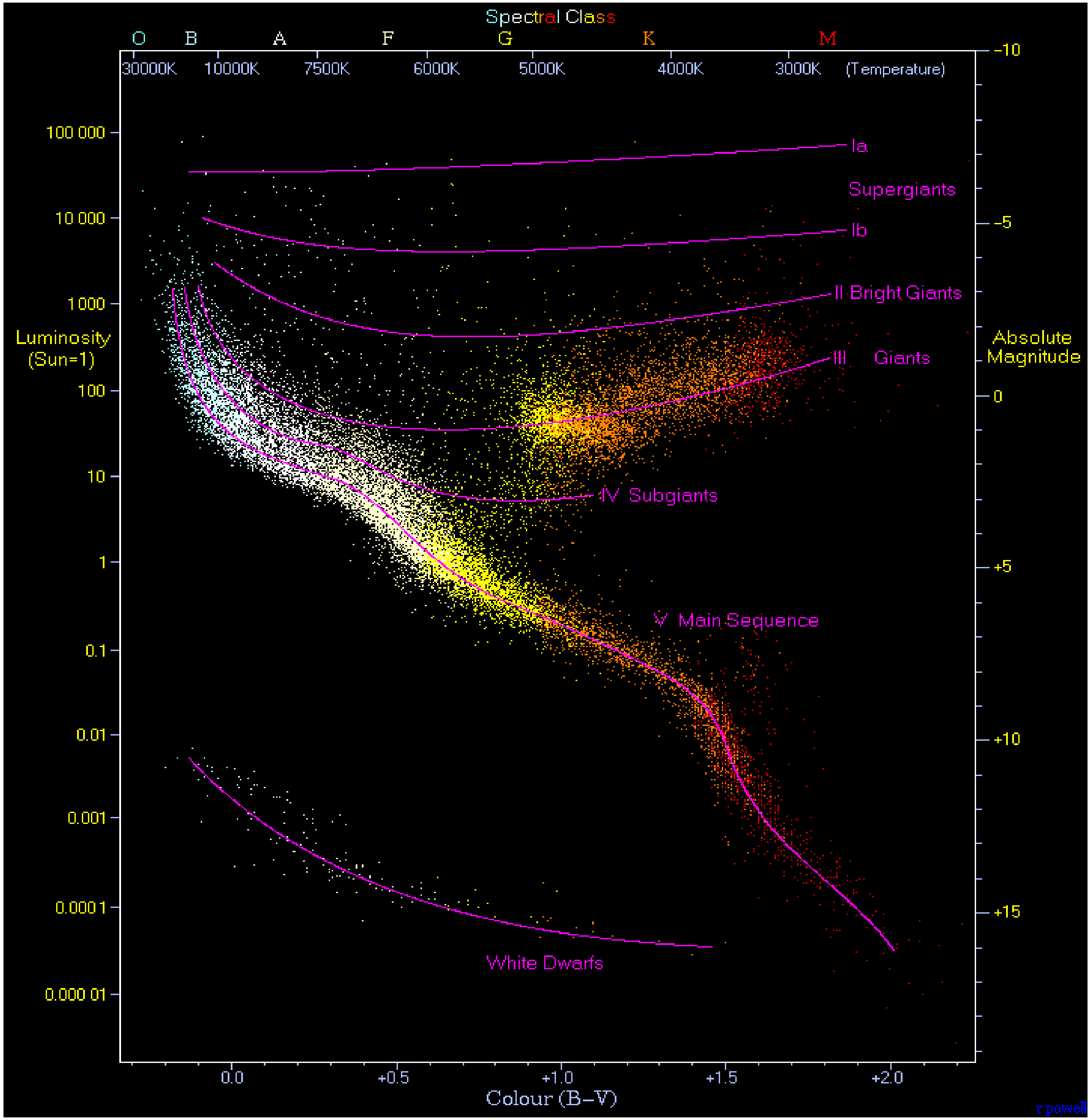
$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = W + 2U$$

Αστέρες σε ισορροπία

(όλα τα μεγέθη είναι ανεξάρτητα του χρόνου)

$$\nabla P = \vec{F}$$

Διάγραμμα Hertzsprung - Russell



Εικόνα 1: Διάγραμμα Hertzsprung –Russell. Οι αστέρες τοποθετούνται στο διάγραμμα με άξονες την λαμπρότητα/απόλυτο μέγεθος και το χρώμα/θερμοκρασία. Διακρίνονται οι ξεχωριστές περιοχές της κύριας ακολουθίας, των γιγάντων και των λευκών νάνων [1].

Πρόβλημα 1: Υποθέτουμε ότι ο Ήλιος είναι σφαιρικά συμμετρικός και η πυκνότητά του στο εσωτερικό είναι σταθερή και ίση με 1.4 gr/cm^3. Να υπολογισθεί η πίεση και η θερμοκρασία στο κέντρο του Ήλιου

Απάντηση:

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_c - 0}{0 - R_\odot} = -\frac{GM_\odot \rho}{R_\odot^2}$$

$$P_c \sim G\frac{M_\odot \rho}{R_\odot} \simeq 2.7 \times 10^{15} dynes cm^{-2}$$

ακριβής τιμή 2.5×10^{17} dynes/cm^{-2}

$$T_c = \frac{\mu m_P}{k_B \rho_0} P \sim 1.4 \times 10^7 K$$

μ=0.62 για πλήρως ιονισμένο αέριο

Πρόβλημα 2: Υποθέστε ότι ένας αστέρας είναι ομογενής (ρ_0=σταθερό), σφαιρικά συμμετρικός και αποτελείται από μονατομικό αέριο. (α) Να υπολογισθεί η κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του. (β) Να υπολογισθεί η κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του

Απάντηση:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$m(r) = (4\pi/3)\rho r^3$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4\pi G}{3}\rho^2 r$$

$$P(r) = \frac{2\pi G}{3}\rho^2(R^2 - r^2)$$

$$T(r) = \frac{2\pi G\mu m}{3k_B}\rho(R^2 - r^2)$$

Πρόβλημα 3: Πόση είναι η δυναμική ενέργεια ενός ομογενή και σφαιρικά συμμετρικού αστέρα;

Απάντηση:

$$dW = -\frac{GM(r)}{r}dm$$

$$W = -G\int_0^R \frac{M(r)}{r}dm = -\frac{16G\pi^2\rho^2R^5}{15} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$W = -G\int_0^R \frac{4/3\pi r^3\rho}{r}4\pi r^2\rho dr$$

$$= -\frac{16\pi^2\rho^2 G}{3}\int_0^R r^4 dr$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)^2 \frac{3}{5}\frac{G}{R}$$

$$W = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Πρόβλημα 4: Αν ένας αστέρας ακτίνας R_0 και πυκνότητας ϱ_0 συσταλθεί μέχρις ότου η ακτίνα του γίνει ίση με R, και εξακολουθεί να παραμένει ομογενής, να υπολογιστεί πόσο έργο θα παραχθεί εξαιτίας της συστολής

Απάντηση:

$$\Delta W = W_2 - W_1$$

$$\Delta W = \frac{3}{5} G M^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

Πρόβλημα 5: Με τι ρυθμό πρέπει να μειώνεται η ακτίνα του Ήλιου ώστε αυτός να ακτινοβολεί, λόγω βαρυτικής συστολής, με τη σημερινή του φωτεινότητα ($L=3.8\times10^{33}$ ergs s^{-1}) ; Υποθέστε ότι ο Ήλιος είναι ομογενής σφαίρα

Απάντηση:

$$W = -2U$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt} = 2L$$

Από το θεώρημα Virial W=-2U. Υποθέτουμε ότι η ενέργεια της βαρυτικής συστολής μετατρέπεται σε ακτινοβολία.

$$\frac{dR}{dt} = 2.38 \times 10^{-5} cm/s$$

Πρόβλημα 6: Ένα σφαιρικό και ομογενές αστρικό νέφος ακτίνας R_c συστέλλεται για να δημιουργηθεί ο Ήλιος ακτίνας $R_{\odot} < R_c$. Αν υποθέσουμε ότι ο Ήλιος ακτινοβολούσε ενέργεια από τα πρώτα στάδια της δημιουργίας του με τους ρυθμούς που ακτινοβολεί σήμερα, ποια θα ήταν η ηλικία του (χρόνος Kelvin-Helmholtz);

Απάντηση:

$$E = K + W$$

$$W = -2K$$

$$E = \frac{1}{2}W$$

$$E = -K$$

Ολική μηχανική ενέργεια:

$$\Delta W \sim \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R} \sim 10^{48} ergs$$

$$t_K \sim \frac{\Delta W}{L} \sim 10^7 yrs$$

Απορρίπτεται γιατί η ηλικία των πετρωμάτων στη Γη είναι της τάξεως των 10^9 χρόνων

Πρόβλημα 7: Να υπολογισθεί η ηλικία του Ήλιου αν υποθέσουμε ότι η ακτινοβολία που εκπέμπει οφείλεται στην καύση του Υδρογόνου στο κέντρο του.

Απάντηση:

$$4{}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + 2e^+ + Energy$$

$$4{}_1H^1 \rightarrow 4 \cdot (1.0078amu)$$

$${}_2He^4 \rightarrow 4.0026amu$$

Άρα υπάρχει ένα έλλειμμα μάζας ΔΜ=0.0286amu, δηλαδή από τη συνολική μάζα του Ήλιου μόνο το

$$\frac{0.0286}{4.0312} = 0.71\%$$

είναι διαθέσιμο για καύση.

Δεχόμαστε επίσης ότι οι αντιδράσεις συμβαίνουν μόνο στον πυρήνα του αστέρα, και έτσι ότι χρησιμοποιείται μόνο το $0.1M_{\odot}$.

Άρα

$$E_{\odot} = 0.1 \cdot 0.0071 \cdot M_{\odot} \cdot c^2 = 1,27 \cdot 10^{51} ergs$$

Και

$$t_n = \frac{E_{\odot}}{L} = 10^{10} yrs$$

Μοντέλα αστέρων (βασικές εξισώσεις)

Ισορροπία

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Μάζα

$$dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr$$

Παραγωγή ενέργειας

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\epsilon(r)$$

$$\epsilon = 0.1\rho(10^{-7}T)^4 erg(gr^{-1})s^{-1}$$

Διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad}$$

$$P_{rad} = \frac{1}{3}\alpha T^4 \Rightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3}\alpha T^3 \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4\alpha c T^3}F_{rad}$$

$$F_{rad} = \frac{L}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa(r)\rho(r)L(r)}{16\pi\alpha c r^2 T^3}$$

κ=μέση αδιαφάνεια, α=σταθερά ακτινοβολίας, c=ταχύτητα φωτός

Διάδοση ενέργειας με μεταφορά

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} \Rightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T}\frac{dT}{dr}$$

$$P = C\rho^{\gamma} \Rightarrow \frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr}$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\left(\frac{G\mu m_p M(r)}{k_B r^2}\right)$$

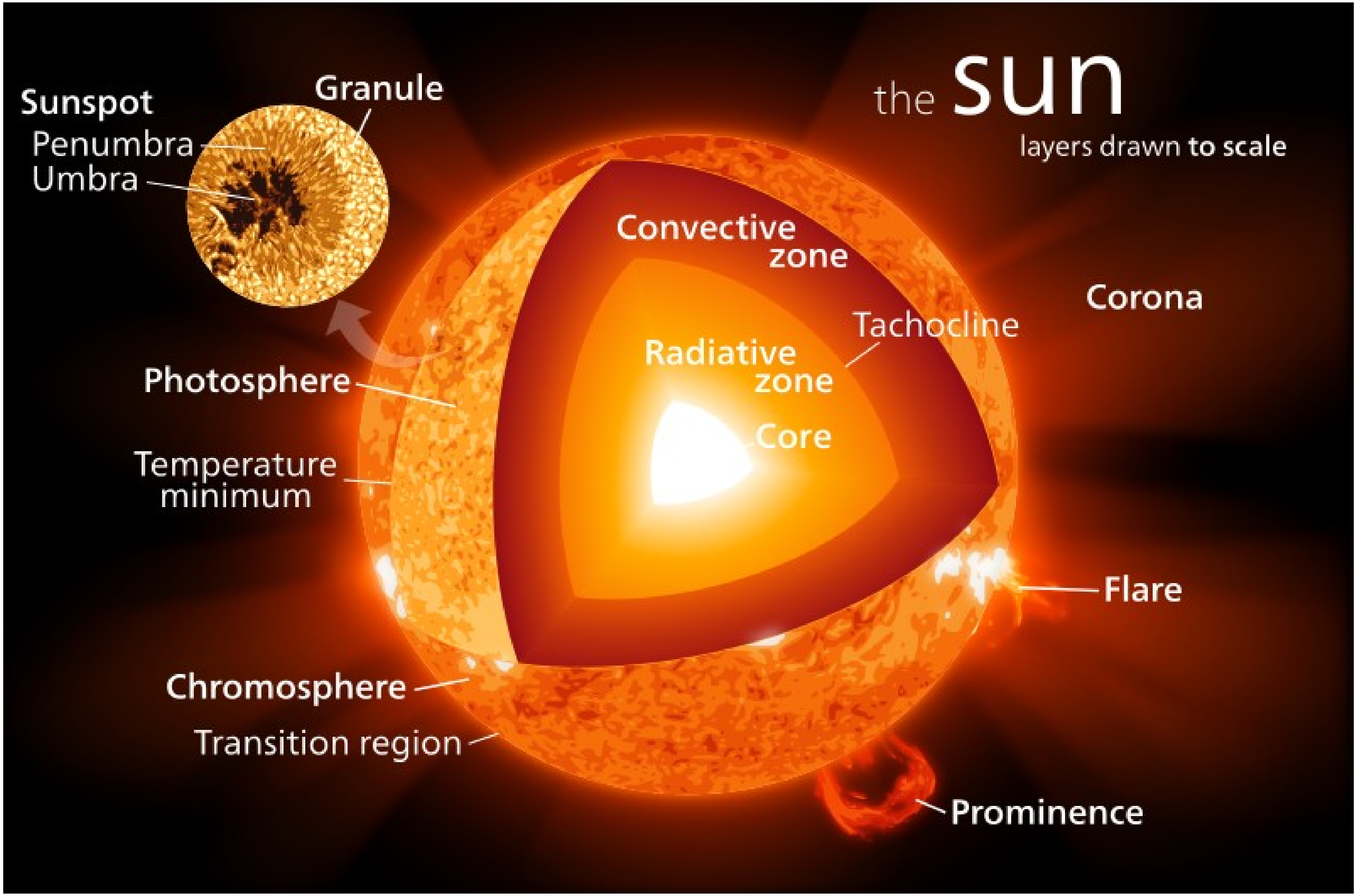
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

για να υπερισχύει η μεταφορά θα πρέπει

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ac}$$

$$\frac{dlnP}{dlnT} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Η δομή του Ηλίου



Εικόνα 2: Η δομή του Ηλίου [2].

Βασικές εξισώσεις για τα πρότυπα αστέρων

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)\epsilon(r)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa(r)L(r)\rho(r)}{16\pi\alpha c r^2 T(r)}$$

Βασικές εξισώσεις για τα πρότυπα αστέρων

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{T}{P}\right) \left(\frac{dP(r)}{dr}\right)$$

Συνολικά έχουμε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων και τριών σχέσεων που συνδέουν τους επτά αγνώστους

$$\rho(r), T(r), P(r), \epsilon(r), \kappa(r), L(r)$$

Ατμόσφαιρες αστέρων (κοντά στη επιφάνεια, επίπεδη ισόθερμη προσέγγιση)

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho$$

$$\frac{d(c_s^2\rho)}{dz} = -g\rho$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{g}{c_s^2}z}$$

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{c_s^2}z}$$

Σφαιρική συμμετρία

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_{\odot}\rho}{r^2}$$

$$P = 2nk_BT$$

αν υποθέσουμε ότι το αέριο είναι πλήρως ιονισμένο $\rho = nm_p$

$$\frac{d(2nk_BT)}{dr} = -\frac{GM_{\odot}\rho}{r^2}$$

$$n(r) = n(0)e^{-\lambda(1-r_0/r)}$$

όπου $\lambda = GM_{\odot}m_p/(2k_BTr_0)$ και

$$P(r) = P(0)e^{-\lambda(1-r_0/r)}$$

<u>Εφαρμογή</u>

$n_0=3\times10^7 cm^{-3}$, $T=1.5\times10^6 K$, $r_0=1.4R_\odot$.

Τότε $P(\infty)=5\times10^{-5}$dynes $cm^{-2}>>P_c$,

όπου P_c η πίεση του μεσοαστρικού χώρου.

Γιατί;

<u>Λύση:</u> Δυναμικά μοντέλα-Αστρικός και Ηλιακός άνεμος. Στο θέμα αυτό θα επιστρέψουμε σε ένα από τα επόμενα μαθήματα.

Ποια είναι η μέγιστη μάζα για έναν αστέρα σε ισορροπία; Αν λόγω της υψηλής θερμοκρασίας

$$P_g = P_r \rightarrow \frac{2\rho k_B T}{m_p} = \frac{1}{3}\alpha T^4$$

όπου Pg είναι η πίεση του αερίου και Pr η πίεση της ακτινοβολίας. Από το θεώρημα Virial έχουμε επίσης

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3GM^2}{5R}\right) = \frac{2\rho k_B T}{m_p}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Ήλιου και να συγκριθεί με τη σημερινή της τιμή.

Πηγές Εικόνων

[1] Hertzsprung – Russell Diagram,

Author: Richard Powell, Wikimedia Commons

Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic license

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:HRDiagram.png

[2] Diagram of the Sun

Author: Kelvinsong, Wikimedia Commons User

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sun_poster.svg

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης

Θεσσαλονίκη, 31 Μαρτίου 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης