ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αστροφυσική

Ενότητα # 5: Μαγνητικά Πεδία στην Αστροφυσική

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY NC ND

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αστροφυσική

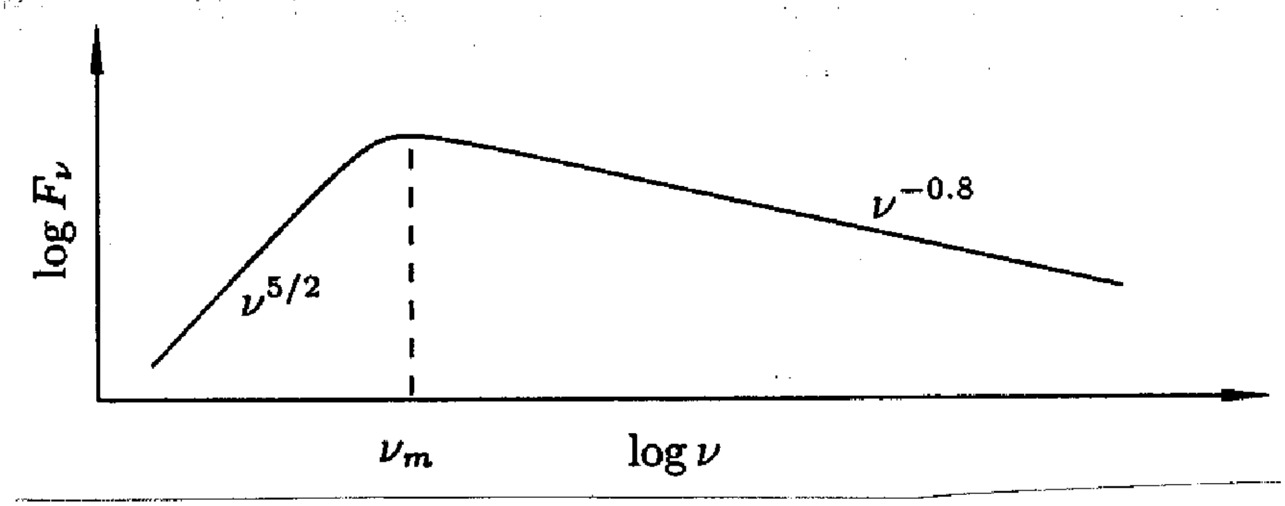
Μαγνητικά πεδία στην Αστροφυσική

Λουκάς Βλάχος

Το σύμπαν είναι στην κατάσταση του πλάσματος

- Το 99% της ύλης είναι πλήρως ιονισμένη (πλάσμα)
- Το πλάσμα ακτινοβολεί λόγω των συγκρούσεων ηλεκτρονίων και ιόντων (Brehmstrahlung) ή λόγω της ελικοειδούς κίνησης των σχετικιστικών ηλεκτρονίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο (ακτινοβολία σύγχροτρον)

Από την ανάλυση του φάσματος πολλών ραδιοπηγών μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του μαγνητικού πεδίου και την ενεργειακή κατανομή των επιταχυνόμενων ηλεκτρονίων



Δύο μεγάλα προβλήματα για την αστροφυσική

- Πώς δημιουργούνται τα μαγνητικά πεδία και ποιος είναι ο ρόλος τους στην αστροφυσική;
- Πώς επιταχύνονται τα φορτία στο διάστημα; Ένας νέος ερευνητικός κλάδος (High Energy Astrophysics)

Μια νέα δύναμη στην εξίσωση κίνησης

Η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία περιγράφεται από την εξίσωση

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_L} = q\left[\vec{E}(r,t) + \frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}\right]$$

όπου F_L είναι η δύναμη Lorenz.

Αν υποθέσουμε ότι το πλάσμα είναι ηλεκτρικά ουδέτερο και το μαγνητικό πεδίο αμελητέο μπροστά στον όρο $\vec{u}\times\vec{B}$

Τότε για το ρευστό πλάσμα η δύναμη Lorenz γράφεται

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c}$$

Με τη χρήση των εξισώσεων Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Θεωρούμε ότι το ρεύμα επαγωγής είναι αμελητέο

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

και ο νόμος του Ohm

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right]$$

Η δύναμη Lorenz γράφεται

$$\vec{F_L} = \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi}$$

Και κάνοντας χρήση της διανυσματικής ταυτότητας

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\frac{1}{2}B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$$

καταλήγουμε για τη δύναμη στη σχέση

$$\vec{F_L} = \left[\frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{4\pi} - \nabla\frac{B^2}{8\pi}\right]$$

<u>Πρόβλημα 1:</u> Κάνοντας χρήση των εξισώσεων Maxwell και του νόμου του Ohm δείξτε ότι η εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου ακολουθεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B}$$

Από το νόμο του Ohm έχουμε

$$\nabla \times \vec{j} = \sigma \nabla \times \vec{E} + \frac{\sigma}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

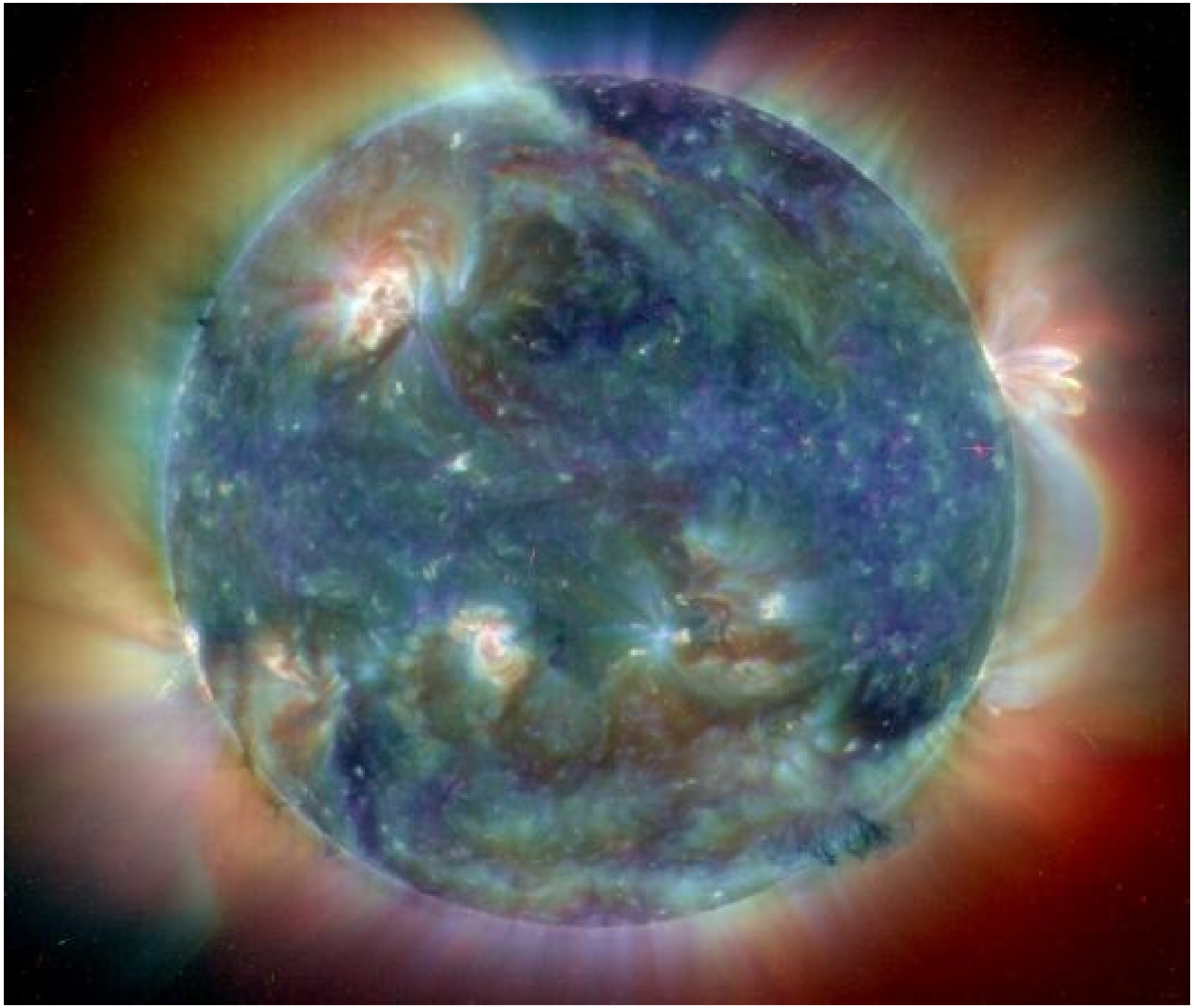
ή

$$\frac{c}{4\pi}(\nabla \times (\nabla \times \vec{B})) = -\frac{\sigma}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{c}{4\pi}(\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}) = -\frac{\sigma}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

Και επειδή $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση

Να συζητηθεί η δημιουργία του μαγνητικού πεδίου (dynamo)



Εικόνα 1: Εικόνα του Ήλιου στο υπεριώδες [1].

Κλειστό σύστημα Μαγνητοϋδροδυναμικής

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \rho\nabla\Phi + \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\nabla^2\Phi = 4G\pi\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) + \frac{c}{4\pi\sigma}\nabla^2\vec{B}$$

$$P = \rho\frac{k_B T}{\mu m_p}$$

Διατήρηση τη μαγνητικής ροής

Παγωμένες μαγνητικές γραμμές

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

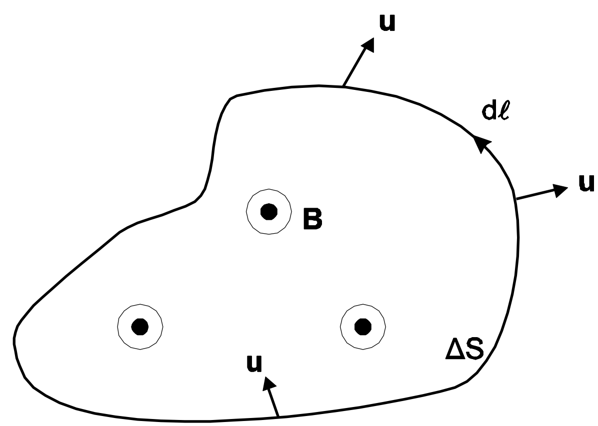
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Η ολική μεταβολή της μαγνητικής ροής

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{B} \cdot \frac{d(d\vec{A})}{dt}$$

ή

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S [\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}] + \int_S \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})$$



Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes

$$\int_S (\nabla \times \vec{C}) \cdot d\vec{A} = \oint \vec{C} \cdot d\vec{l}$$

και τη διανυσματική ταυτότητα

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

Τότε

$$\int_S (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})) \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot dl$$

$$= \oint \left(d\vec{l} \times \vec{u} \right) \cdot \vec{B}$$

$$= -\oint \vec{B} \cdot \left(\vec{u} \times d\vec{l} \right)$$

Άρα dΦ/dt=0, δηλαδή η μαγνητική ροή που παγιδεύεται σε μια τυχαία επιφάνεια S παραμένει αμετάβλητη και κινείται με την επιφάνεια.

Η σταθερότητα της μαγνητικής ροής που εγκλωβίζεται μέσα στο μαγνητικό μεσοαστρικό νέφος όταν αρχίσει να συστέλλεται μας οδηγεί σε μία ενδιαφέρουσα σχέση για την αύξηση του πεδίου

$$\int B \cdot dS = const$$

$$BR_c^2 \approx B_S R_S^2$$

$$B_S = B_C \left(\frac{R_C}{R_S} \right)^2$$

όπου Bs, Rs είναι το μαγνητικό πεδίο και η ακτίνα του πρωτοαστέρα.

Θα επανέλθουμε στο μάθημα αυτό στο ρόλο του μαγνητικού πεδίου για την δημιουργία αστέρων από μαγνητισμένα μεσοαστρικά νέφη

Να συζητηθεί ποιοτικά η μαγνητική πέδηση και η διατήρηση στροφορμής σε εκτεταμένα αστροφυσικά συστήματα

Το θεώρημα Virial

Το θεώρημα Virial συνδέει τα ενεργειακά αποθέματα του συστήματος που μελετάμε.

Πιθανές μορφές ενέργειας στο πρωταρχικό νέφος

- U = Εσωτερική ενέργεια
- U_g= Βαρυτική ενέργεια
- U_M = Μαγνητική ενέργεια
- U_R = Ενέργεια περιστροφής

Ερώτηση: Με ποια σχέση συνδέονται;

Εξίσωση κίνησης

$$\frac{d\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \nabla P$$

όπου $\vec{F} = \frac{\vec{f}}{\rho}$

Πολλαπλασιάζω με την ποσότητα $\vec{r}dm$ και ολοκληρώνω

$$\overbrace{\int dm\vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}^{I} = \overbrace{\int dm\vec{r} \cdot \vec{F}}^{II} - \overbrace{\int dm\vec{r} \cdot \nabla P}^{III}$$

Θα επεξεργαστούμε τον κάθε όρο χωριστά

$$(I) \rightarrow \vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d^2(\vec{r})/2}{dt^2} - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\int dm\vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} - 2 < T >$$

$$I = \int r^2 dm \quad \text{και} \quad < T >= \frac{1}{2}\int \left\{ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \right\} dm$$

I = γενικευμένη ροπή αδράνειας και

<T> = κινητική ενέργεια της μάζας dm

Ο όρος της πίεσης III

$$\int \vec{r} \cdot \nabla P dV = \int \nabla(\vec{r}P) dV - 3 \int P dV$$

$$= \oint_S (P\vec{r}) d\vec{A} - 3(\gamma - 1)U$$

S η επιφάνεια που περικλείει ολόκληρη τη μάζα.

Εάν το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία τότε

$$\oint_S (P\vec{r}) d\vec{A} = P \oint_S \vec{r} d\vec{A} = 4\pi R^3 P$$

Από τη θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι η εσωτερική ενέργεια ιδανικού και μη εκφυλισμένου ρευστού υπολογίζεται από τη σχέση

$$\int PdV = (\gamma - 1)U$$

όπου $\gamma = \frac{C_P}{C_u}$

Για ένα βαρυτικό ρευστό η δύναμη $\vec{F_g} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\hat{e_r}$

και ο όρος II υπολογίζεται από τη σχέση

$$\int \vec{F_g} \cdot \vec{r} dm = -\int \frac{Gm(r)dm(r)}{r} = U_g$$

Ω = ολική δυναμική ενέργεια

Η μαγνητική δύναμη $\vec{F_M} = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\rho c}$ και επειδή

dm=ρdV

$$\int \vec{r} \cdot \vec{F_M} = \int dV \vec{r} \cdot \left(\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \right)$$

Από τις εξισώσεις Maxwell έχουμε

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

άρα

$$\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} = \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]$$

$$\int dV \vec{r} \cdot \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} = \int \frac{dV}{4\pi} [\vec{r}(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \nabla B^2]$$

$$\int dV \vec{r} \cdot \frac{(\vec{J} \times \vec{B})}{c} = U_M + \int_S (\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B} \cdot d\vec{A}}{4\pi} - \int B^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{A}}{8\pi}$$

όπου

$$U_M = \int \frac{B^2}{8\pi} dV$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ:</u> Δείξτε ότι

$$\vec{r} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \nabla B^2 = \frac{B^2}{2} + \nabla \cdot (\vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{r})) - \frac{1}{2} \vec{r} B^2$$

Το θεώρημα Virial

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dr^2} = 2 < T > +3(\gamma - 1)U + U_g + U_M +$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}(\vec{B}\cdot\vec{r})\vec{B}d\vec{S} - \oint_{\Sigma}\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right)\vec{r}\cdot d\vec{S}$$

όπου για μονατομικό αέριο γ=5/3 και

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

$$< T > = \frac{1}{2}\int \rho \left\{ \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \right\} dV$$

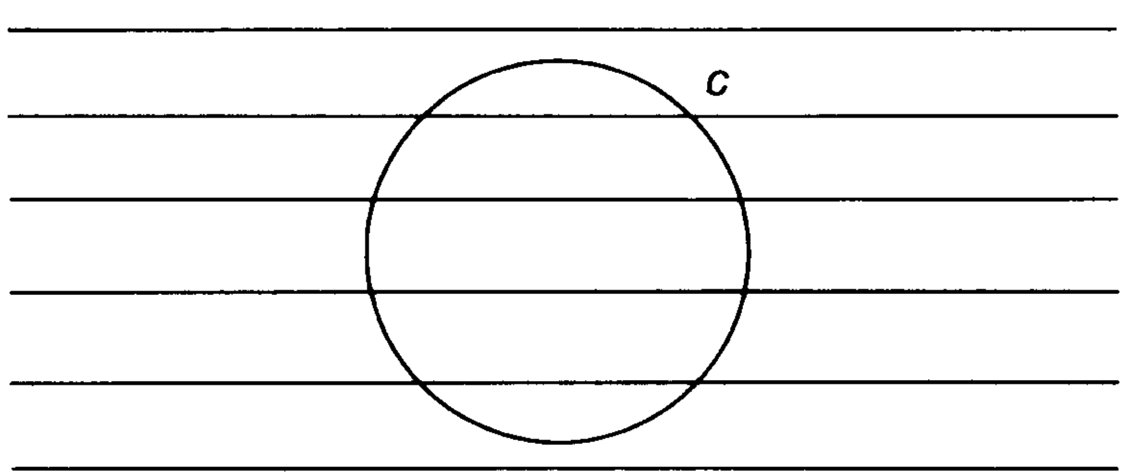
Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου

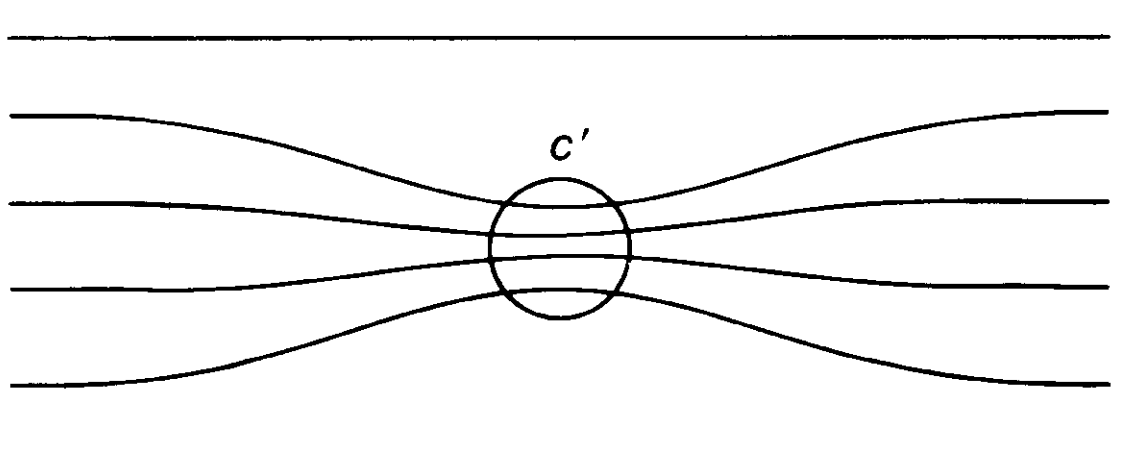
Το μαγνητικό πεδίο στο μεσοαστρικό νέφος είναι 10^{-6} Gauss άρα η μαγνητική ενέργεια

$$U_M = \frac{B^2}{8\pi} V = (10^{-6})^2 \cdot (10^2 pc)^3 > W$$

(W: βαρυτική ενέργεια)

Η μαγνητική πίεση $P_M = \frac{B^2}{8\pi}$ θα καθυστερήσει ή θα εμποδίσει την κατάρρευση


c


c′

Πρόβλημα 2: Να υπολογισθεί η ελάχιστη μάζα M_B που πρέπει να έχει το σφαιρικά συμμετρικό και ομογενές μεσοαστρικό νέφος με σταθερό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του B_c για να υπερνικήσει η βαρύτητα τη μαγνητική πίεση που αντιστέκεται στη συστολή. Θεωρούμε ότι στο εξωτερικό του νέφους το μαγνητικό πεδίο έχει τη μορφή

$$B(r) = B_C \frac{r^3}{R_C^3}$$

και η πίεση είναι σταθερή P_0

Λύση:

Από το θεώρημα Virial αν ολοκληρώσουμε για ολόκληρο τον όγκο του νέφους και κρατήσουμε μόνο τη βαρύτητα και την μαγνητική πίεση θα έχουμε

$$-\frac{3GM_c^2}{5R_c} + \int dV \left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \vec{r} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\frac{3GM_c^2}{5R_c} = \frac{1}{3} R_c^3 B_c^2 S$$

$$\int dV\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)=\frac{B_c^2}{8\pi}\frac{4\pi}{3}R_c^3=\frac{1}{6}B_c^2R_c^3$$

$$\oint\frac{B^2}{8\pi}rdS=\oint\frac{B^2}{8\pi}rr^2d\theta d\phi=$$

$$\oint\frac{B^2}{8\pi}r^3d\theta d\phi=4\pi\frac{B^2}{8\pi}r^3=\frac{B^2}{2}R_c^3$$

και

$$M_B = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{9G}^{1/2}\right)\Phi$$

όπου $\Phi=\pi R_c^2 B_c$. Η απαιτούμενη μάζα μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$M_B \sim 3.5\times 10^{-3}\frac{B_c^3}{G^{3/2}\rho_c^2} \sim 10^2 M_\odot \left(\frac{B_c}{100\mu G}\right)$$

Διάχυση του μαγνητικού πεδίου

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 \vec{B}$$

$\sigma \neq \infty$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 \vec{B}$$

$$\frac{B}{\tau_D} \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{B}{l^2}$$

$$\tau_D \sim \left(\frac{4\pi\sigma}{c^2}\right) l^2$$

ΔΙΑΧΥΣΗ

Κύματα Alfven

Αν ξεκινήσουμε από την εξίσωση (1), τις εξισώσεις κίνησης του ρευστού και την εξίσωση Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = (4\pi/c)\vec{J} \qquad (1)$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla P - \frac{\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})}{4\pi} \qquad (2)$$

Γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις (1) και (2)

Έχουμε $B=B_0+B_1$, $P=P_0+P_1$, $v=v_1$, $\rho=\rho_0+\rho_1$ και υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, ότι η θερμοκρασία είναι μηδέν και $\nabla \cdot B_1 = 0$ οπότε

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = (\vec{B_0}\nabla)\vec{v_1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \left(\frac{B_0}{4\pi} \cdot \nabla\right) \vec{B_1}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις και υποθέτοντας ότι το μαγνητικό πεδίο έχει τη διεύθυνση του άξονα z ($\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$) καταλήγουμε στην εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$$

όπου $v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho_0}$

Το περιστρεφόμενο νέφος χάνει στροφορμή

Η γωνιακή στροφορμή του στοιχειώδους όγκου που κινείται με ταχύτητα Alfven είναι

$$\Delta J = \rho r v(t - \frac{z}{v_A}, r) v_A \Delta t$$

$$J = 2 \int_0^d (\Delta J) 2\pi r dr$$

όπου d>>R. Ο ρυθμός 'εκπομπής' γωνιακής στροφορμής είναι

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = -4\pi v_A \rho \int_0^{v_A t} v(t - \frac{z}{v_A}, r) r^2 dr$$

Να συζητηθεί το πρόβλημα της διατήρησης της στροφορμής και ο ρόλος των κυμάτων Alfven

Πηγές Εικόνων

[1] Solstice Celebration

NASA Astronomy Picture of the Day

Credit: SOHO – EIT Cosortium, ESA, NASA

http://apod.nasa.gov/apod/ap021221.html

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης

Θεσσαλονίκη, 31 Μαρτίου 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY NC ND