ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αστροφυσική

Ενότητα # 1 (Εισαγωγική): Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική

Νικόλαος Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

1- Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

16/10/2013

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

- Τα *ρευστά* περιλαμβάνουν τα *αέρια* και τα *υγρά*, ενώ ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις και για τα δύο.

- Η *ρευστομηχανική* περιλαμβάνει τη *στατική* (χρονικώς ανεξάρτητη ισορροπία) και τη *δυναμική* των ρευστών (ροές).

- Στην αστροφυσική, ακόμη και νέφη πολύ χαμηλής πυκνότητας μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε ως ρευστά, αρκεί η *μέση ελεύθερη διαδρομή* l των σωματιδίων να είναι πολύ μικρότερη της έκτασης L που καταλαμβάνει το ρευστό:

$$l = \frac{1}{n\sigma} \ll L$$

όπου n είναι η *αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων* και σ η *ενεργός διατομή* για ελαστικές συγκρούσεις.

- Ρευστά, στα οποία μπορούμε να αγνοήσουμε την απώλεια ενέργειας λόγω των εσωτερικών συγκρούσεων (ιξώδες) ονομάζονται *ιδανικά*.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Για ένα *ιδανικό ρευστό ενός συστατικού:*

$\rho = mn$ $\rightarrow$ πυκνότητα μάζας

P $\rightarrow$ πίεση

$e = U/m$ $\rightarrow$ ειδική εσωτερική ενέργεια

$\vec{v}$ $\rightarrow$ διάνυσμα της ταχύτητας

όπου m είναι η μάζα ενός σωματιδίου. Άρα έχουμε *3 βαθμωτές μεταβλητές* και *1 διανυσματική* και χρειαζόμαστε αντίστοιχο αριθμό εξισώσεων για να έχουμε πλήρη περιγραφή.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: στη θέση της e μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εναλλακτικά, είτε η *ειδική εντροπία*, $s = S/m$ (εντροπία ανά μονάδα μάζας), είτε η *θερμοκρασία* T.

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

- Μία από τις βασικές εξισώσεις που χρειαζόμαστε για την πλήρη περιγραφή είναι η *καταστατική εξίσωση*, δηλ. η σχέση που συνδέει την πίεση με τις άλλες θερμοδυναμικές μεταβλητές. Για ένα ιδανικό ρευστό ενός συστατικού, η πίεση είναι συνάρτηση των άλλων *δύο μεταβλητών*

$$P = P(\rho, e)$$

(*δι-παραμετρική* καταστατική εξίσωση).

Η επιλογή μιας συγκεκριμένης καταστατικής εξίσωσης εξαρτάται από το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε (διαφορετική για τα διάφορα είδη αστέρων) και προκύπτει από τη μικρο-φυσική.

Βαροτροπικό ρευστό: Αν $e = e(\rho)$ ή $e \approx 0$, τότε θεωρούμε ότι

$$P = P(\rho)$$

(*μονο-παραμετρική* καταστατική εξίσωση).

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

• Η προσθήκη ενός ποσού θερμότητας $dQ=TdS$ σε ένα ρευστό προκαλεί, κατά ένα μέρος, αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας κατά ποσό dU και, κατά το άλλο μέρος, παραγωγή έργου κατά ποσό PdV. Οπότε,

$$TdS = dU+PdV$$

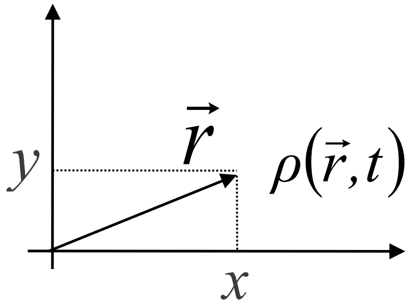
Αδιαβατική ροή: Αν $dS=0$, τότε $dU=-PdV$.

Ισεντροπική ροή: Η *ομαλή* αδιαβατική ροή είναι *ισεντροπική* (ειδάλλως, εάν υπάρχουν κρουστικά κύματα, υπάρχει αύξηση της εντροπίας στην περιοχή του κρουστικού κύματος).

• Για την ισεντροπική ροή, η καταστατική εξίσωση ανάγεται σε μονο-παραμετρική, $P = P(\rho)$. Για παράδειγμα, για ένα *ιδανικό αέριο*, η καταστατική εξίσωση $P = P(\rho,T) = (\rho/m)k_BT$ (όπου k_B η σταθερά του Boltzmann) ανάγεται στην $P = k\rho^{\gamma}$ (*πολυτροπική* καταστατική εξίσωση), όπου k και γ σταθερές, που παίρνουν τιμές ανάλογα με το είδος του αερίου (π.χ. $\gamma=1$ για ισόθερμο αέριο).

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ EULER

- Οι θερμοδυναμικές μεταβλητές εκφράζονται συναρτήσει του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ και του χρόνου t σε ένα *αδρανειακό* σύστημα συντεταγμένων.

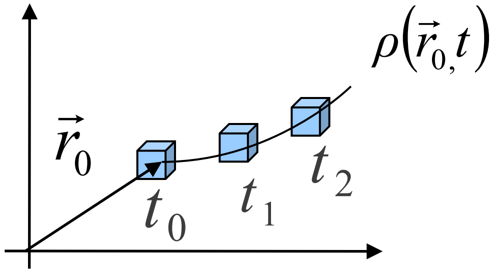


Τοπική παράγωγος: Οι χρονικές μεταβολές μιας μεταβλητής του ρευστού μετρώνται τοπικά στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\sigma\tau\alpha\theta}$$

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ LAGRANGE

- Οι θερμοδυναμικές μεταβλητές εκφράζονται ως προς έναν *κινούμενο στοιχειώδη όγκο* dV, που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0$ που έχει τη χρονική στιγμή $t = t_0$.



Ο στοιχ. όγκος dV περιλαμβάνει πάντοτε τα *ίδια σωματίδια* και η *τροχιά* του είναι μια μονο-παραμετρική καμπύλη

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

Ολική παράγωγος: Οι χρονικές μεταβολές μιας μεταβλητής του ρευστού μετρώνται ως προς κινούμενο στοιχειώδη όγκο dV, κατά μήκος της τροχιάς του:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

- Η ταχύτητα του ρευστού ορίζεται σε μεταβλητές Lagrange:

$$\vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta}$$

- ***Σχέση μεταξύ ολικής και τοπικής παραγώγου***:

Επειδή

$$\rho = \rho(\vec{r},t) \rightarrow \rho = \rho\left[\vec{r}\left(\vec{r}_{0,}t\right),t\right]$$

$$\rho = \rho\left[x\left(\vec{r}_{0,}t\right), y\left(\vec{r}_{0,}t\right), z\left(\vec{r}_{0,}t\right),t\right]$$

βρίσκουμε

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\vec{r} = \sigma\tau\alpha\theta} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\vec{r}_0 = \sigma\tau\alpha\theta}$$

ή

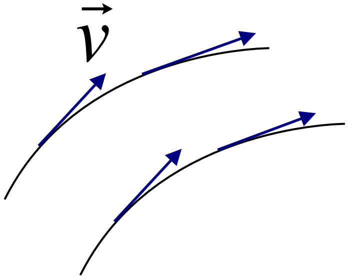
$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ, ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ

- *Η επιτάχυνση του ρευστού ορίζεται επίσης σε μεταβλητές Lagrange*

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

- ***Γραμμές ροής:*** Σε κάποια συγκεκριμένη χρονική σιγμή $t{=}t_0$, οι *γραμμές ροής* είναι γραμμές των οποίων το *εφαπτόμενο διάνυσμα* σε κάθε σημείο τους είναι παράλληλο προς το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}$, δηλαδή $d\vec{r} \parallel \vec{v}$.



- ***Μόνιμη ροή***: Αν μια ροή δεν εξαρτάται από τη χρονική συντεταγμένη t,

δηλαδή $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

τότε είναι *μόνιμη*, και οι γραμμές ροής συμπίπτουν με τις τροχιές.

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ, ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΟΗ

- Ορίζουμε ως το *διάνυσμα του στροβιλισμού*:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Για κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$, η ροή ονομάζεται *σύγχρονη*, εάν

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}$$

- ***Δυναμική ροή***: Εάν το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης (δυναμικό) φ, η ροή ονομάζεται *δυναμική*

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$$

Τότε: $$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

και άρα $$\vec{\omega} = 0$$

Δηλαδή, η *δυναμική ροή* είναι *αστρόβιλη*, <u>και αντιστρόφως</u>.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΑΖΑΣ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

• ***Δυνάμεις μάζας*** είναι αυτές που δρουν σε όλη την *έκταση* του ρευστού (π.χ. βαρύτητα, δύναμη Lorentz κ.λ.π.). Εάν $\Delta\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων μάζας, τότε ορίζουμε την *πυκνότητα δυνάμεων μάζας* ως

$$\vec{f} = \lim_{m \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m}$$

π.χ. για την περίπτωση της βαρύτητας, $\vec{f} = \vec{g}$ (επιτάχυνση).

• ***Επιφανειακές δυνάμεις***: Σε ένα ιδανικό ρευστό, η πίεση είναι *ισοτροπική* και ασκείται μόνο στην *κάθετη διεύθυνση* προς την επιφάνεια. Σε μια στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού *dA*, η *δύναμη* που ασκείται λόγω της πίεσης του ρευστού είναι

$$d\vec{F}_{\varepsilon\pi.} = -P\hat{n}dA$$

(όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια με *φορά προς τα έξω*). Ολοκληρώνοντας σε κλειστή επιφάνεια εμβαδού *A* που περικλείει όγκο *V* και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss:

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi.} = -\int_A P\hat{n}dA = -\int_V \vec{\nabla}P dV$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Η μάζα που περικλείεται σε μια χρονική στιγμή *t* σε όγκο *V* του ρευστού είναι

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t)\, dV$$

ενώ σε μια άλλη χρονική στιγμή *t+dt* ο όγκος έχει μεταβληθεί σε *V'*, περικλείοντας μάζα

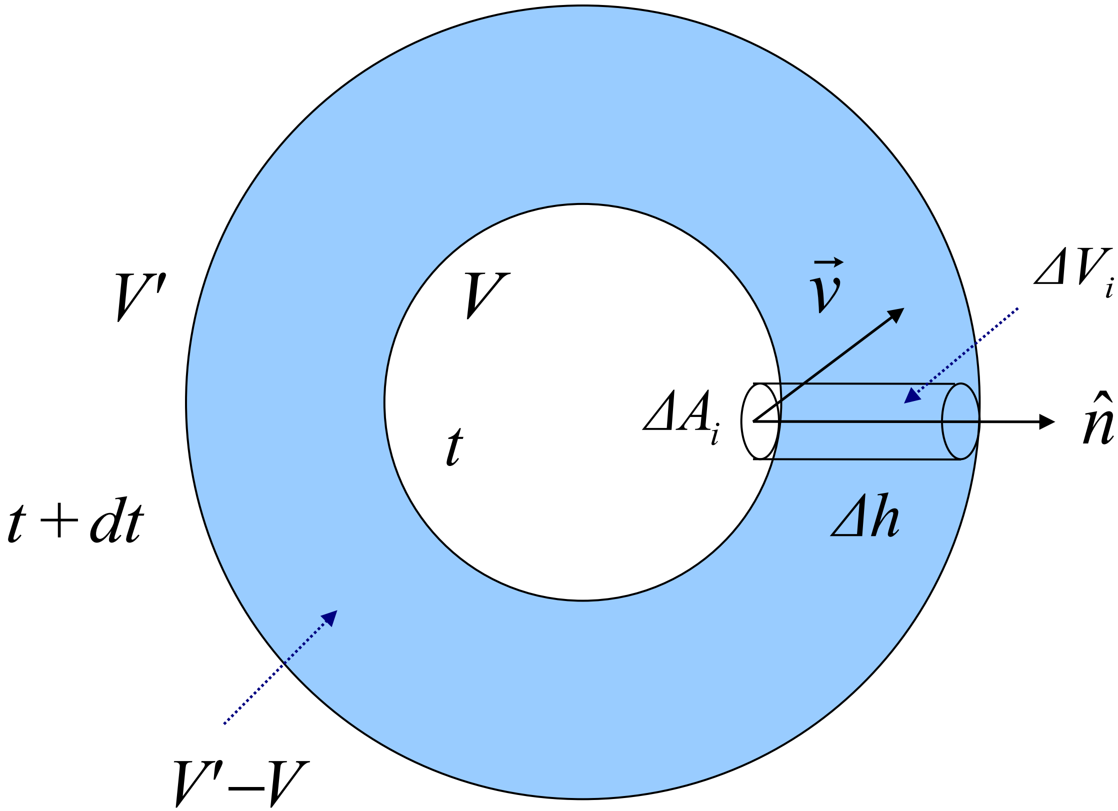
$$m' = \int_{V'} \rho(\vec{r}, t + dt)\, dV$$

Εάν ο όγκος *V'* περιλαμβάνει το ίδιο σύνολο σωματιδίων με τον όγκο *V*, τότε η μάζα διατηρείται και αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{Dm}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = 0$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Υπολογισμός:



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Υπολογισμός (συνέχεια):

$$0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V'} \rho(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \int_{V} \rho(\vec{r}, t) dV}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V'-V} \rho(\vec{r}, t + \Delta t) dV + \int_{V} [\rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t)] dV \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \rho(\vec{r}, t + \Delta t) \frac{\Delta V_i}{\Delta t} + \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα όγκου μετατράπηκε σε άθροισμα κυλινδρικών όγκων

$$\Delta V_i = \Delta A_i \cdot \Delta h = \Delta A_i \cdot (\vec{v} \hat{n} \Delta t)$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

- Υπολογισμός (συνέχεια):

$$0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \rho(\vec{r}, t + \Delta t)\vec{v}\hat{n}\Delta A_i + \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV$$

$$= \int_A \rho(\vec{r}, t)\vec{v}\hat{n}dA + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$= \int_V \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$= \int_V \left[\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dV$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Gauss. Σε *διαφορική μορφή*:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ)

- Η ορμή ενός στοιχειώδους όγκου *ΔV* είναι

$$\Delta\vec{Q} = \Delta m\vec{v} = \rho\vec{v}\Delta V$$

ενώ η ολική ορμή είναι

$$\vec{Q} = \int_V \rho\vec{v}dV$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα προβλέπει:

$$\vec{F}_{o\lambda.} = \vec{F}_{\mu\acute{\alpha}\zeta.} + \vec{F}_{\varepsilon\pi.} = \Delta m\vec{a} = \frac{D\vec{Q}}{Dt}$$

$$\Rightarrow \int_V \rho\vec{f}dV - \int_A p\hat{n}dA = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{v}dV$$

$$\Rightarrow \int_V \rho\vec{f}dV - \int_A \vec{\nabla}PdV = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{v}dV$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ)

- (συνέχεια): Όμως, επειδή ήδη δείξαμε ότι *Dm/Dt=0*

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{v}dV = \frac{D}{Dt}\int_V \vec{v}dm = \int_V \frac{D\vec{v}}{Dt}dm = \int_V \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}dV$$

κι έτσι

$$\int_V \left[\rho\vec{f} - \vec{\nabla}P - \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\right]dV = 0$$

Σε διαφορική μορφή:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{f}$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ένα ρευστό περιέχει μακροσκοπική *κινητική ενέργεια* καθώς και *εσωτερική θερμική ενέργεια*. Η πυκνότητα της ενέργειας που έχει το ρευστό είναι

$$E = \varepsilon_{\kappa\nu} + \varepsilon_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε $\varepsilon_{\varepsilon\sigma} = U/V = (m/V)(U/m) = \rho e$).

Η *ολική ενέργεια* που περικλείεται στον όγκο του ρευστού είναι

$$\int E dV = \int \rho\left(v^2/2 + e\right) dV$$

Η ενέργεια ενός στοιχειώδους όγκου μπορεί να αλλάζει εξαιτίας:

- του έργου που παράγουν οι δυνάμεις μάζας που ασκούνται,
- του έργου που παράγουν οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται,
- της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας (π.χ. λόγω θερμοπυρηνικών αντιδράσεων),
- της απώλειας ενέργειας λόγω διάδοσης θερμότητας ή ακτινοβολίας.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Το έργο που παράγεται από μια δύναμη που δρα πάνω σε ένα υλικό σημείο είναι $\vec{v} \cdot \vec{F}$. Άρα το έργο που παράγουν οι δυνάμεις μάζας στο ρευστό είναι

$$\int \vec{v} \cdot \rho \vec{f} dV$$

ενώ το έργο που παράγουν οι επιφανειακές δυνάμεις είναι

$$\int \vec{v} \cdot \left(-P\hat{n}\right) dA$$

Εάν ορίσουμε ως λ τον *ρυθμό παραγωγής εσωτερικής ενέργειας* ανά μονάδα μάζας, τότε ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας λόγω εσωτερικής παραγωγής ενέργειας είναι

$$\int \lambda \rho dV$$

Εάν ορίσουμε ως $\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$ το *διάνυσμα της ροής θερμότητας* (θερμότητα που ρέει ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου), τότε ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας λόγω ροής θερμότητας είναι

$$\int \vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu} \cdot \left(-\hat{n}\right) dA$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Τελικά, η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{D}{Dt}\int_V E dV = \int_A \rho\vec{v}\cdot\vec{f} dV - \int_A P\vec{v}\cdot\hat{n} dA$$
$$+\int_V \lambda\rho dV - \int_A F_{\theta\varepsilon\rho\mu}\cdot\hat{n} dA$$

Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μάζας καθώς και το νόμο του Gauss, η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να γραφεί στην εξής διαφορική μορφή:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}+e\right) = \rho\vec{v}\cdot\vec{f} - \vec{\nabla}\left(P\vec{v}\right) + \lambda\rho - \vec{\nabla}\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνησης με την ταχύτητα και την αφαιρούμε από την παραπάνω εξίσωση. Χρησιμοποιώντας και την εξίσωση συνέχειας, τελικά προκύπτει ο διαφορικός νόμος

$$\frac{De}{Dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \lambda - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ

- Για ένα ιδανικό ρευστό, οι μεταβλητές *ρ*, *P, e* και $\vec{v}$ καθορίζονται από το *πλήρες σύστημα* των εξισώσεων:

$\rho \rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\vec{v} = 0$$ (εξίσωση συνέχειας)

$P \rightarrow$ $$P = P(\rho, e)$$ (καταστατική εξίσωση)

$\vec{v} \rightarrow$ $$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}\mathrm{P} + \rho\vec{f}$$ (εξίσωση κίνησης)

$e \rightarrow$ $$\frac{De}{Dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + \lambda - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$ (διατήρηση ενέργειας)

ΒΑΡΟΤΡΟΠΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ

- Εάν το ρευστό είναι βαροτροπικό, ώστε *P = P(ρ),* και $\vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$ με *λ,* μηδενικά, τότε η ειδική εσωτερική ενέργεια *e* συνδέεται άμεσα με τις *ρ*, *P* από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, που γίνεται

$$de = \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

- Έτσι η ειδική εσωτερική ενέργεια δεν είναι πλέον ελεύθερη μεταβλητή και το πλήρες σύστημα για τις *ρ*, *P* και $\vec{v}$ είναι:

$\rho \rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0$$ (εξίσωση συνέχειας)

$P \rightarrow$ *P = P(ρ)* (καταστατική εξίσωση)

$\vec{v} \rightarrow$ $$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} \mathrm{P} + \rho \vec{f}$$ (εξίσωση κίνησης)

$e \rightarrow$ $$\frac{De}{Dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \lambda - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \vec{F}_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$ (διατήρηση ενέργειας)

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης

Θεσσαλονίκη, 31 Μαρτίου 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης