ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αστροφυσική

Ενότητα # **6**: Λευκοί Νάνοι

Νικόλαος Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

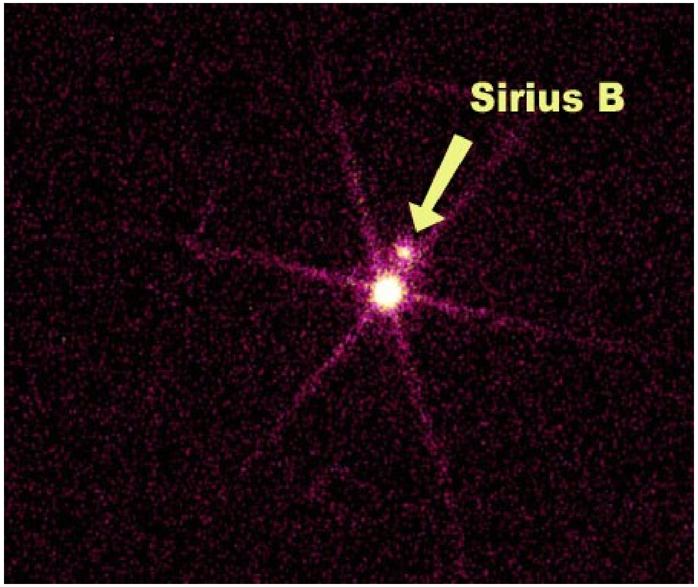
Ο πρώτος γνωστός λευκός νάνος ήταν ο Sirius B, που ανακαλύφθηκε το 1862.

Αρχικά ήταν γνωστή μόνο η φωτεινότητά του

$$L_{SB} \approx 0.03 L_{sun}$$

και η μάζα του

$$M_{SB} \approx 1 M_{sun}$$



Εικόνα 1: Sirius A και Sirius B.

και θεωρούνταν πως πρόκειται για ένα πολύ ψυχρό αστέρα, καθώς για τους αστέρες σε ισορροπία ισχύει ο νόμος των Stefan-Boltzmannn

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Όμως, το 1915 μετρήθηκε η θερμοκρασία του Sirius B ως $T_{SB} \approx 27{,}000K$

Πηγή Εικόνας: *NASA, Sirius A and B (NASA/SAO/CXC)*

ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

- Γνωρίζοντας ότι $T_{sun} \approx 6{,}000K$ μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\frac{R_{SB}^2 T_{SB}^4}{L_{SB}} = \frac{R_{sun}{}^2 T_{sun}^4}{L_{sun}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{SB} = \left(\frac{T}{T_{SB}}\right)^2 \left(\frac{L_{SB}}{L}\right)^{1/2} R$$

$$\approx 0.01R \approx R_{\Gamma H \Sigma}$$

Η ύπαρξη τέτοιων συμπαγών αστέρων, όπου μια μάζα Ηλίου συρρικνώνεται στις διαστάσεις της Γης, εξηγήθηκε τελικά το 1926 από τον Fowler, με βάση την κβαντομηχανική πίεση ενός εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων.

- Μέση πυκνότητα: $\bar{\rho}_{SB} \sim \dfrac{3M}{4\pi R^3} \sim 10^6 \bar{\rho}_{sun}$
- Επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια: $g_{SB} \sim \dfrac{GM}{R^2} \sim 10^4 g_{sun}$

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

- Λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli, δύο φερμιόνια δεν μπορούν να βρεθούν στον ίδιο χώρο στην ίδια ακριβώς ενεργειακή κατάσταση. Σε ένα αέριο υπό κανονικές συνθήκες πυκνότητας, μόνο 1 στις 10^7 επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες είναι κατειλημμένη, οπότε η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν έχει κάποιο ορατό αποτέλεσμα.

Σ' ένα λευκό νάνο όμως, θα δείξουμε ότι η πυκνότητα είναι αρκετά μεγάλη ώστε όλες σχεδόν οι ενεργειακές καταστάσεις να είναι κατειλημμένες, δηλαδή το αέριο ηλεκτρονίων είναι (σχεδόν) *πλήρως εκφυλισμένο*. Ένα αέριο ηλεκτρονίων περιγράφεται από τη στατιστική Fermi-Dirac, σύμφωνα με την οποία η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων με ορμή μεταξύ p και $p+dp$ είναι

$$dn = n(p)dp = F(p)\frac{8\pi}{h^3}p^2dp$$

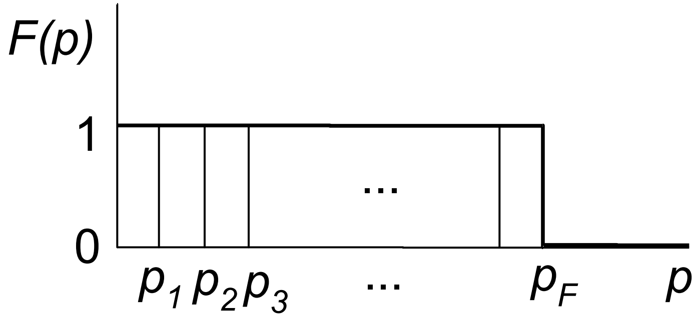
όπου $F(p)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων στις διάφορες επιτρεπτές στάθμες ορμής p.

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο όλες οι επιτρεπτές στάθμες είναι κατειλημμένες, δηλ. υπάρχει ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε στάθμη, μέχρι την τιμή ορμής p_F (*ορμή Fermi*) που έχει το ηλεκτρόνιο με την υψηλότερη ενέργεια από όλα τα υπόλοιπα. Άρα, η συνάρτηση κατανομής έχει τη μορφή:

$$F(p) = \begin{cases} 1 & , p \le p_F \\ 0 & , p > p_F \end{cases}$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

- Η αριθμητική πυκνότητα του αερίου είναι:

$$n = \int dn = \int_0^{\infty} n(p)dp$$

$$= \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

κι έτσι, η ορμή Fermi είναι: $p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi} n \right)^{1/3}$

Η αντίστοιχη *ενέργεια Fermi*, για *μη-σχετικιστικό* αέριο, είναι:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n_e^{2/3}}{8m_e}$$

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

• Στους λευκούς νάνους με σύνθεση άνθρακα και οξυγόνου το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο είναι

$$\mu_e = \frac{A}{Z} \approx 2$$

όπου A είναι ο μαζικός αριθμός και Z ο ατομικός αριθμός των νουκλεονίων του πυρήνα. Η αριθμητική πυκνότητα των βαρυονίων είναι

$$n_B \approx A n_+$$

όπου n_+ είναι η αριθμητική πυκνότητα των θετικά φορτισμένων πυρήνων. Για να υπάρχει *ηλεκτρική ουδετερότητα*, θα πρέπει $Zn_+ = n_e$, οπότε

$$n_B = \mu_e n_e$$

και η *πυκνότητα μάζας* (αγνοώντας τη συνεισφορά των ηλεκτρονίων) είναι

$$\rho = m_B \mu_e n_e$$

όπου m_B είναι η *μάζα ανά βαρυόνιο*.

ΠΛΗΡΩΣ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΟ ΑΕΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

- Τελικώς, η ενέργεια Fermi μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της πυκνότητας μάζας

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{\rho}{\mu_e m_B}\right)^{2/3}$$

Η ενέργεια αυτή μπορεί να συγκριθεί με τη θερμική ενέργεια ανά ηλεκτρόνιο

$$\varepsilon_T \sim \frac{3}{2} k_B T$$

Για τον Sirius B, η εκτίμηση για την κεντρική θερμοκρασία είναι $T_c \sim 8 \times 10^7$ K, οπότε προκύπτει ότι

$$\varepsilon_T \ll \varepsilon_F$$

Άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τη θερμική ενέργεια και δικαιολογείται η προσέγγιση του πλήρως εκφυλισμένου αερίου. Στο λευκό νάνο, η πίεση που αντιστέκεται στη βαρύτητα είναι καθαρά κβαντομηχανικής προέλευσης.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

- Πρόχειρος υπολογισμός:

Λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg, γνωρίζουμε πως για ένα ηλεκτρόνιο ισχύει

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

οπότε, ένα ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε ένα διάστημα Δx έχει ορμή τουλάχιστον

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Εάν υπάρχει *ένα* ηλεκτρόνιο ενά κυβικό όγκο με πλευρά Δx, *τότε η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι*

$$n = \frac{N}{V} \sim \frac{1}{\Delta x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x \sim n^{-1/3}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Οπότε

$$\Delta p \sim \hbar n^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad m_e v \sim \hbar n^{1/3}$$

(θεωρώντας ότι $\Delta v \sim v$).

Από τη στατιστική φυσική, γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός αερίου αριθμητικής πυκνότητας n δίνεται από τη σχέση

$$P = \frac{1}{3} n \langle p v \rangle$$

(όπου με < > υποδηλώνουμε μέση τιμή). Προσεγγιστικά:

$$P \sim n \cdot \hbar n^{1/3} \cdot \frac{\hbar n^{1/3}}{m_e} \Rightarrow \quad P \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n^{5/3}$$

Με τον ακριβή υπολογισμό θα δείξουμε ότι βρήκαμε τη σωστή εξάρτηση.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

- Ακριβής υπολογισμός:

Το διαφορικό της πίεσης είναι

$$dP = \frac{1}{3} pv\,dn = \frac{1}{3} pvn(p)dp$$

$$= \frac{1}{3} pvF(p)\frac{8\pi}{h^3} p^2 dp$$

κι έτσι η πίεση είναι
$$P = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_F} p^3 v\,dp$$

Επειδή σε πολύ μεγάλες πυκνότητες τα ηλεκτρόνια μπορεί να αναπτύξουν *σχετικιστικές ταχύτητες*, στον ακριβή υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε για την ορμή τη σχέση της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{p}{m_e}\left(1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}\right)^{-1/2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ

Οπότε

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\sqrt{1 + p^2/(m_e c)^2}} dp$$

Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι

$$P = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \left\{ X\sqrt{1+X^2}\left(2X^2 - 3\right) + 3\ln\left(X + \sqrt{1+X^2}\right) \right\}$$

όπου ορίσαμε την αδιάστατη μεταβλητή $X = \dfrac{p_F}{m_e c}$

η οποία αποτελεί μέτρο σύγκρισης της ορμής Fermi προς τη μη-σχετικιστική έκφραση της ορμή ενός ηλεκτρονίου, $m_e c$, εάν αυτό είχε ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός (θυμίζουμε ότι σε τέτοιες ταχύτητες η τιμή της ορμής διαφέρει από τη μη-σχετικιστική έκφραση και τείνει στο άπειρο).

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

- Μη-σχετικιστικό όριο: $X \ll 1 \quad (p_F \ll m_e c) \quad \left(\rho \ll 10^6\, g/cm^3\right)$

$$P = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3}$$

Η σχέση αυτή είναι χρήσιμη για λευκούς νάνους μικρής μάζας και δείχνει ότι η πίεση αποτελεί κατά βάση κβαντομηχανικό φαινόμενο (για $h \to 0$ δε θα υπήρχε).

- Σχετικιστικό όριο: $X \gg 1 \quad (p_F \gg m_e c) \quad \left(\rho \gg 10^6\, g/cm^3\right)$

$$P = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc\, n_e^{4/3}$$

Η σχέση αυτή είναι χρήσιμη για λευκούς νάνους μεγάλης μάζας και δείχνει ότι στο όριο αυτό η πίεση καθορίζεται και από τη Σχετικότητα, ενώ η ελάττωση της δύναμης από 5/3 σε 4/3 δείχνει ότι η ύλη συμπιέζεται πιο εύκολα (οδηγώντας τελικά σε κατάρρευση).

ΟΡΙΟ CHANDRASEKHAR

- Στο σχετικιστικό όριο, προκύπτει ότι η μάζα ενός λευκού νάνου έχει μια ανώτατη τιμή. Ένας πρόχειρος υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής:

Εάν υποθέσουμε προσεγγιστικά ότι ο αστέρας είναι ομογενής, τότε γνωρίζουμε ότι η πίεση στο κέντρο του είναι

$$P_c = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

$$\Rightarrow \quad P_c = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \rho^{4/3}$$

$$\Rightarrow \quad P_c = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \left(\mu_e m_B n_e\right)^{4/3}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την ηλεκτρική ουδετερότητα.

ΟΡΙΟ CHANDRASEKHAR

Ο λευκός νάνος διατηρείται σε ισορροπία και αποφεύγει τη βαρυτική κατάρρευση, για όσο η κβαντομηχανική πίεση του πλήρως εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων (στο σχετικιστικό όριο) είναι

$$P \geq P_c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hcn_e^{4/3} \geq \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{2} M^{2/3} \left(\mu_e m_B n_e\right)^{4/3}$$

$$\Rightarrow \quad M \leq \frac{3}{16\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(m_e m_B\right)^2}$$

άρα η μάζα έχει πράγματι μια ανώτατη τιμή.
Με την υπόθεση ότι ο αστέρας είναι ομογενής, το παραπάνω αποτέλεσμα δίνει 0.44 $M_\odot$. Ο ακριβής υπολογισμός δίνει 1.44 $M_\odot$.

Η παραπάνω σχέση συνδέει με μοναδικό τρόπο τις βασικές θεωρίες της φυσικής, δηλ. τη βαρύτητα, την κβαντομηχανική και τη σχετικότητα, μέσω των θεμελιωδών σταθερών G, h και c.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης

Θεσσαλονίκη, 31 Μαρτίου 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης