ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 1: Ρίζες Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1η ΕΝΟΤΗΤΑ

1. ΡΙΖΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κλασικό πρόβλημα των στοιχειωδών μαθηματικών είναι η εύρεση μιας τιμής ρ τέτοιας, ώστε για μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, b)$ να ισχύει:

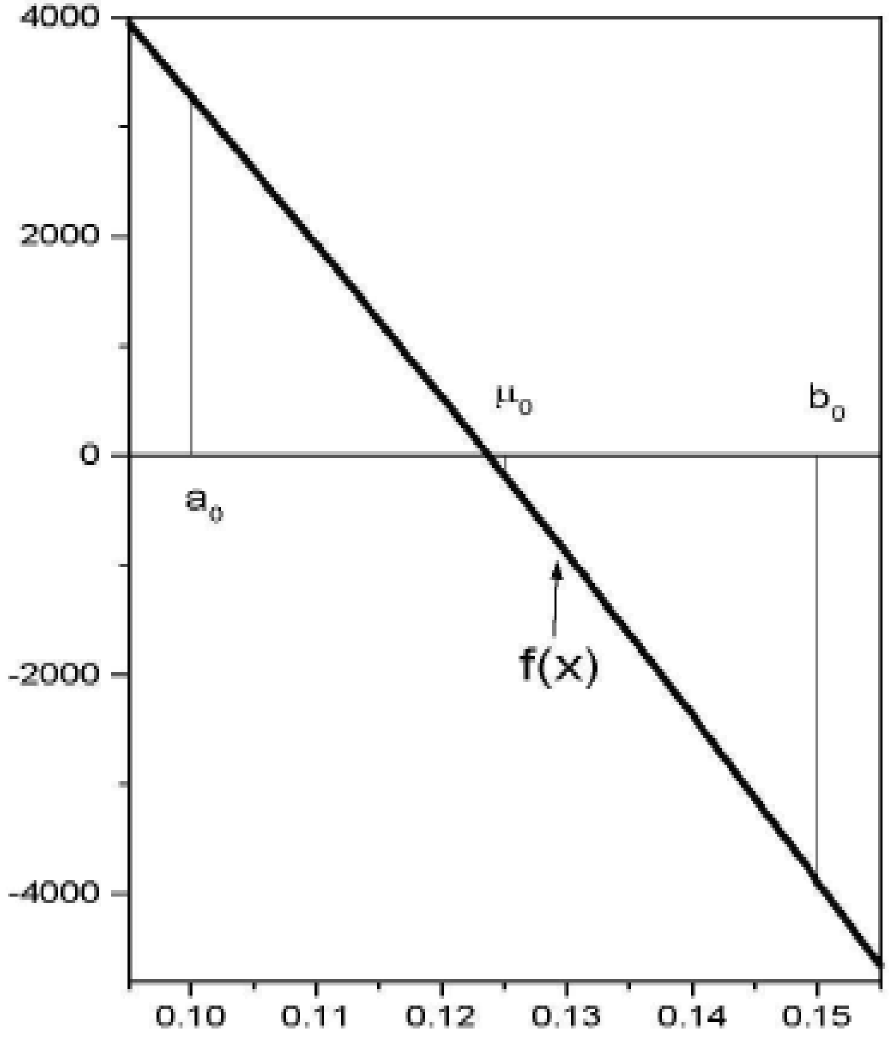
$$f(\rho) = 0$$

Η βασική διαδικασία για την εύρεση ριζών μη-γραμμικών εξισώσεων είναι η δημιουργία μιας αναδρομικής σχέσης. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί και στην εύρεση ριζών γραμμικών και μη-γραμμικών συστημάτων, αλλά και στην αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Επομένως, σε κάθε μέθοδο που θα αναπτύξουμε, στόχος μας είναι η εύρεση αναδρομικών σχέσεων της μορφής

$$x_{n+1} = \sigma(x_n)$$

που θα δίνει μια ακολουθία τιμών $x_0, x_1, \ldots, x_\kappa, \ldots$ και στο όριο $\kappa \to \infty$ να δίνει τη ρίζα της εξίσωσης (1.1).

1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ



1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Έστω ότι μια ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[a_0, b_0]$, τότε $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Αν $\mu_0 = (a_0 + b_0)/2$, τότε:

- (I) είτε $f(\mu_0) \cdot f(a_0) < 0$
- (II) είτε $f(\mu_0) \cdot f(b_0) < 0$
- (III) είτε $f(\mu_0) = 0$.

Αν ισχύει η (III), τότε έχει υπολογισθεί η ρίζα και σταματά η διαδικασία, αλλιώς ορίζω νέο διάστημα

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\mu_0, b_0] & \text{αν} \quad (II) \\ \\ [a_0, \mu_0] & \text{αν} \quad (I) \end{cases}$$

ΚΡΙΤΙΚΗ

Δύο στοιχεία κάνουν την μέθοδο ελάχιστα ελκυστική :

- Η αργή σύγκλιση
- Επικίνδυνη, όταν υπάρχουν ασυνέχειες

ΣΦΑΛΜΑ

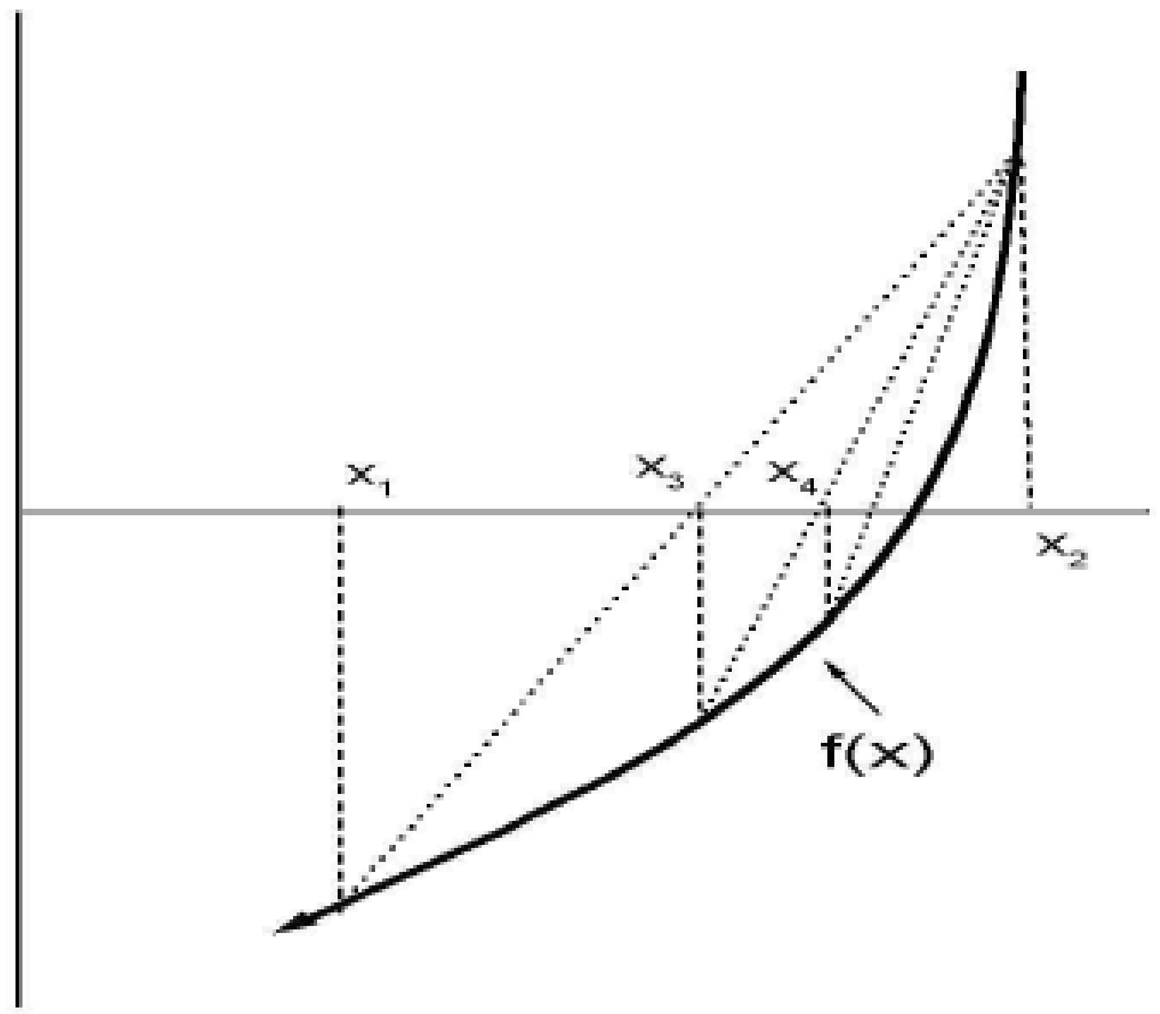
Ως σφάλμα ορίζουμε την " απόσταση" $\varepsilon_n = |\rho - x_n|$ της τιμής x_n από τη ρίζα ρ της εξίσωσης. Για τη μέθοδο διχοτόμησης το σφάλμα είναι μικρότερο απο το μισό του διαστήματος στο οποίο περικλείεται η ρίζα

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\,|a_n - b_n|$$

Σε κάθε βήμα το σφάλμα μειώνεται στο μισό του προηγουμένου

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{\varepsilon_0}{2^n}$$

1.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ



1.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στηρίζεται στην εξής λογική: Αν στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει μία ρίζα της $f(x)$, δηλαδή $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, τότε φέρνω την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με εξίσωση:

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

η οποία τέμνει τον άξονα Ox έστω στο σημείο x_3 που υπολογίζεται απο την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η σχέση (1.12) με κατάλληλους δείκτες είναι η ζητούμενη αναδρομική σχέση :

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f\left(x_{n+1}\right)}{f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right)}\left(x_{n+1} - x_n\right) .$$

Δηλαδή αν δοθούν δύο αρχικές τιμες x_n και x_{n+1} με την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε μια νέα τιμή x_{n+2} που βρίσκεται πλησιέστερα στη ρίζα ρ της μη-γραμμικής εξίσωσης.

Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής :

- Συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο διχοτόμησης
- Δεν είναι υποχρεωτικό η ρίζα να εσωκλείεται μεταξύ των δύο αρχικών τιμών.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Έστω ξ η ακριβής ρίζα της εξίσωσης. Αν θεωρήσουμε ότι $\varepsilon_n = |\xi - x_n|$ είναι το σφάλμα στην εύρεση της ρίζας της $f(x) = 0$ για $x = x_n$, τότε η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής συγκλίνει με βάση τη σχέση

$$\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^{1.618}$$

1.3 ΜΕΘΟΔΟΣ MULLER

Η μέθοδος Muller αποτελεί επέκταση της μεθόδου της γραμμικής παρεμβολής και αντί να προσεγγίζει την συνάρτηση με ευθεία την προσέγγιζει με *παραβολή*.

Αν δοθούν τρεις αρχικές τιμές x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, υποθέτουμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται από ένα 2ο-βάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου εύκολα υπολογίζουμε τις ρίζες. Για τις τρεις αρχικές τιμές του x_i λαμβάνουμε τρεις εξισώσεις της μορφής :

$$f(x_i) \approx P(x_i) = Ax_i^2 + Bx_i + \Gamma$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τους 3 συντελεστές του τριωνύμου μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned}
A &= qP(x_i) - q(1+q)P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2}) \\
B &= (2q+1)P(x_i) - (1+q)^2P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2}) \\
\Gamma &= (1+q)P(x_i)
\end{aligned}$$

όπου

$$q = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}}\,.$$

Οπότε η επόμενη προσεγγιστική τιμή x_{i+1} βρίσκεται ως η ρίζα της παραβολής

$$Ax^2 + Bx + \Gamma = 0\,.$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η παρακάτω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την εύρεση της ρίζας

$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[\frac{2\Gamma}{B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}} \right]$$

Το σημείο του παρονομαστή επιλέγεται ούτως ώστε να γίνεται το κλάσμα μικρότερο απολύτως.

ΣΦΑΛΜΑ

Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της μεθόδου είναι:

$$\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n^{1.84}$$

δηλαδή η συγκλιση είναι σημαντικά καλύτερη από τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

ΚΡΙΤΙΚΗ

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι:

- Συγκλίνει ταχύτατα
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση μιγαδικών ριζών.

1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ x=g(x)

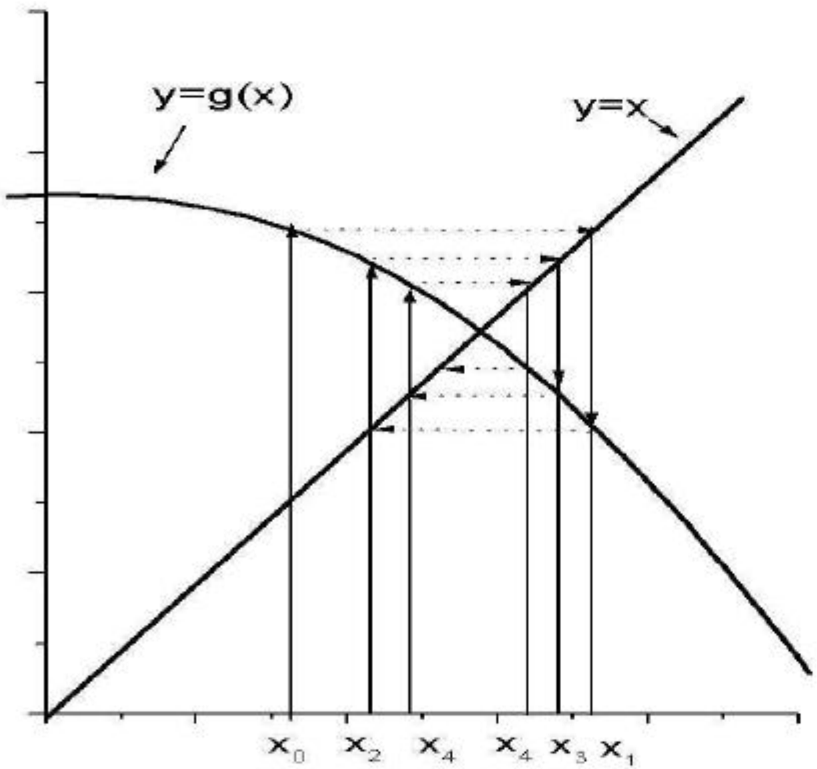
Επομένως, προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση της μορφής

$$x_{n+1} = g\left(x_n\right)$$

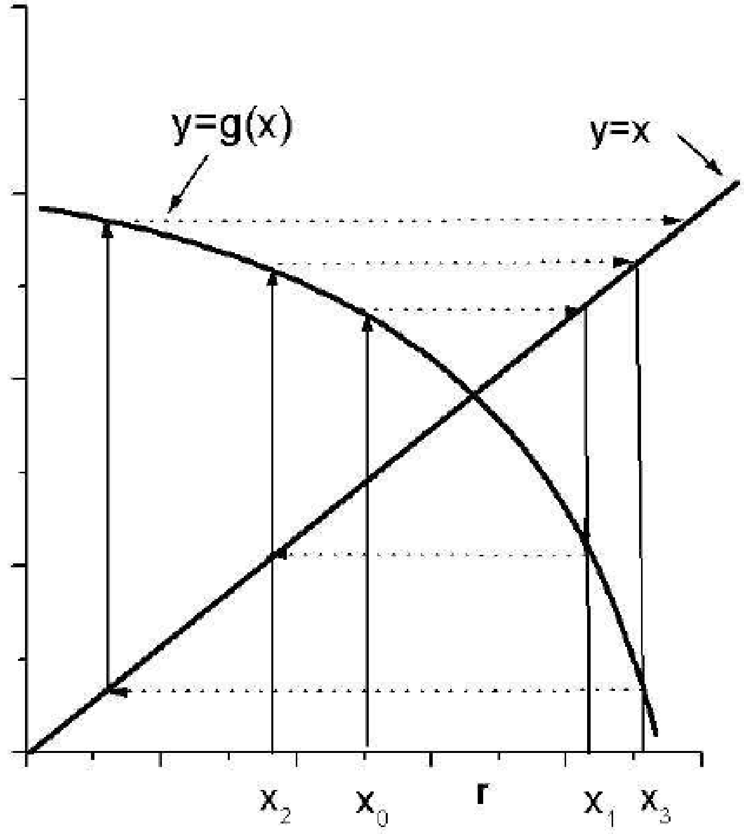
ούτως ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \rho\,.$$

Σύγκλιση όταν |g’(x)|<1



Απόκλιση όταν |g'(x)|>1



ΣΦΑΛΜΑ

$$\varepsilon_{n+1} = g'(r)\varepsilon_n$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης :

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$
  αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$ ***οπότε δεν συγκλίνει.***
- $x_{n+1} = e^{-x_n}$
  οπότε $|y'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1$ ***άρα συγκλίνει.***
- *Μια άλλη γραφή είναι η εξής :* $x = (x + e^{-x})/2$
  οπότε $|g'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-1}| = 0.316$ ***άρα συγκλίνει.***
- $x = \frac{x+2e^{-x}}{3}$ *οπότε* $|g'(x)| = \frac{1}{3}|1 - 2e^{-x}| \leq \frac{1}{3}|1 - 2e^{-1}| = 0.03$ ***άρα συγκλίνει.***

Προφανώς θα επιλέξουμε την τελευταία γραφή και η ζητούμενη αναδρομική σχέση θα είναι:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2e^{-x_n}}{3} \; .$$

1.4.1 Βελτίωση Aitken

Όταν η σύγκλιση μιας μεθόδου είναι γραμμική, όπως στην προηγούμενη μέθοδο, όπου είχαμε $e_{n+1} = g'(\rho)e_n$, τότε, για $n \to \infty$, η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί, για να επιτύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα χωρίς επιπλέον πράξεις.

Το σφάλμα μετά από n εφαρμογές της σχέσης $x_{n+1} = g'(x_n)$ είναι:

$$\rho - x_{n+1} \approx g'(\rho)(\rho - x_n)$$

και μετά από $n+1$ εφαρμογές είναι:

$$\rho - x_{n+2} \approx g'(\rho)(\rho - x_{n+1})$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι

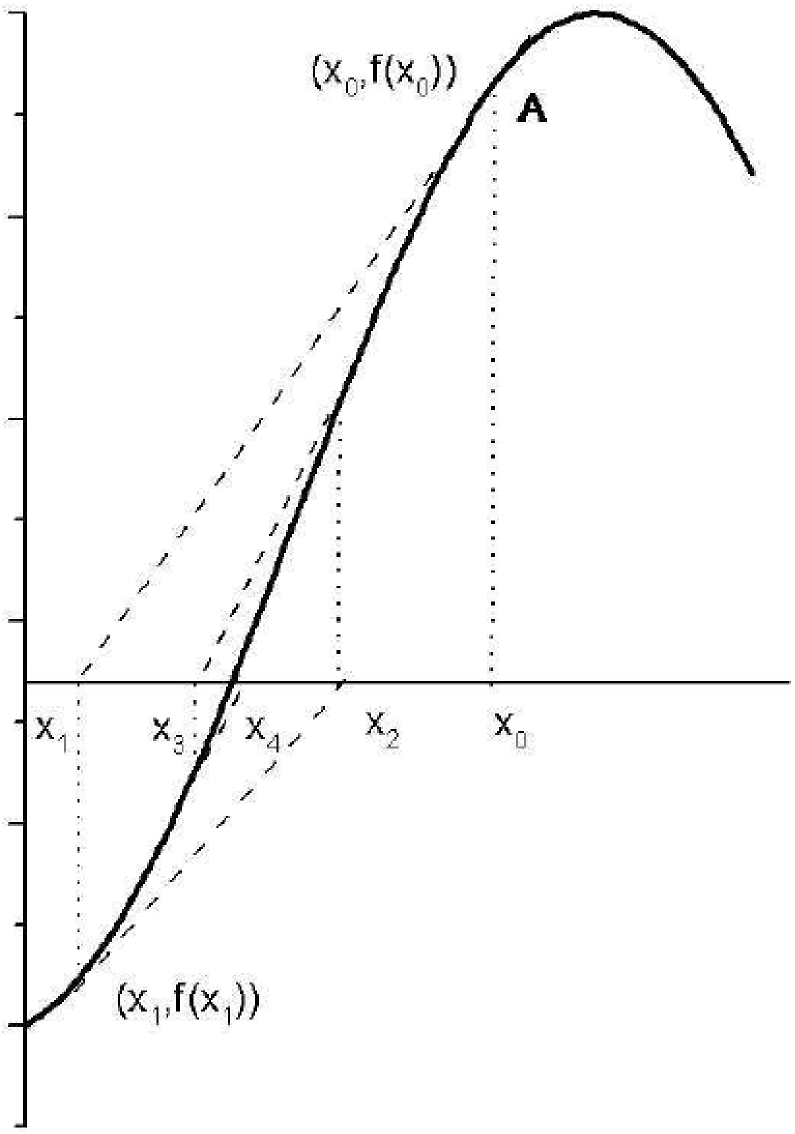
$$\frac{\rho - x_{n+1}}{\rho - x_{n+2}} = \frac{g'(\rho)(\rho - x_n)}{g'(\rho)(\rho - x_{n+1})}$$

και λύνοντας ως προς ρ βρίσκουμε:

$$\rho = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *βελτίωση του Aitken*.

1.5 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON



Θα δημιουργήσουμε την αναδρομική σχέση της μεθόδου Newton – Raphson με αυστηρό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι x_{n+1} είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης και μια τιμή x_n βρίσκεται σχετικά κοντά στην x_{n+1} και έστω $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$. Τότε:

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_n + \varepsilon_n\right) = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''\left(x_n\right) + \cdots$$

Αλλά, επειδή υποθέσαμε ότι η x_{n+1} είναι ρίζα της $f\left(x\right)$, θα ισχύει $f\left(x_{n+1}\right) = 0$, και έτσι αναγόμαστε στη σχέση

$$0 = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right)$$

δηλαδή

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

οπότε καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω ξ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Τότε $x_n = \xi + \varepsilon_n$ και $x_{n+1} = \xi + \varepsilon_{n+1}$, οπότε:

$$\xi + \varepsilon_{n+1} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi + \varepsilon_n)}{f'(\xi + \varepsilon_n)} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi) + \varepsilon_n f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(\xi)}{f'(\xi) + \varepsilon_n f''(\xi)}$$

Επειδή όμως $f(\xi) = 0$ και

$$\frac{1}{1 + \varepsilon f''(\xi)/f'(\xi)} \approx 1 - \varepsilon_n \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \cdot \varepsilon_n^2$$

Όπως παρατηρείτε, η σύγκλιση της μεθόδου είναι " τετραγωνική", δηλαδή καλύτερη από κάθε άλλη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα.

- Έχει ταχύτατη συγκλιση
- Απαιτεί γνώση της 1ης παραγώγου της συνάρτησης

1.5.1 Δεύτερης τάξης Newton-Raphson (Halley)

$$x_{n+1} = \quad x_n - \frac{2f\left(x_n\right)f'\left(x_n\right)}{2f'^2\left(x_n\right) - f''\left(x_n\right)\,f\left(x_n\right)}$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

$$\varepsilon_{n+1} = -\left[\frac{1}{6}\frac{f'''\left(\xi\right)}{f'\left(\xi\right)} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''\left(\xi\right)}{f'\left(\xi\right)}\right)^2\right]\cdot\varepsilon_n^3$$

1.5.2 Πολλαπλές ρίζες

$$f(x) = (x-\rho)^m q(x)$$

όπου m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ρ

Επομένως, $f'(x) = (x-\rho)^{m-1}\left[mq(x) + (x-\rho)q'(x)\right]$

άρα οι $f(x)$ και $f'(x)$ μηδενίζονται συγχρόνως για $x = \rho$

οπότε ο λόγος $f(x)/f'(x)$ θα υπολογίζεται με μεγάλο σφάλμα

Για να ξεπερασθεί το πρόβλημα δημιουργούμε μια νέα συνάρτηση

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\rho)q(x)}{mq(x) + (x-\rho)q'(x)}$$

η οποία έχει τη ρ ως ρίζα με πολλαπλότητα $m = 1$ και η αναδρομική σχέση είναι:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

1.6 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

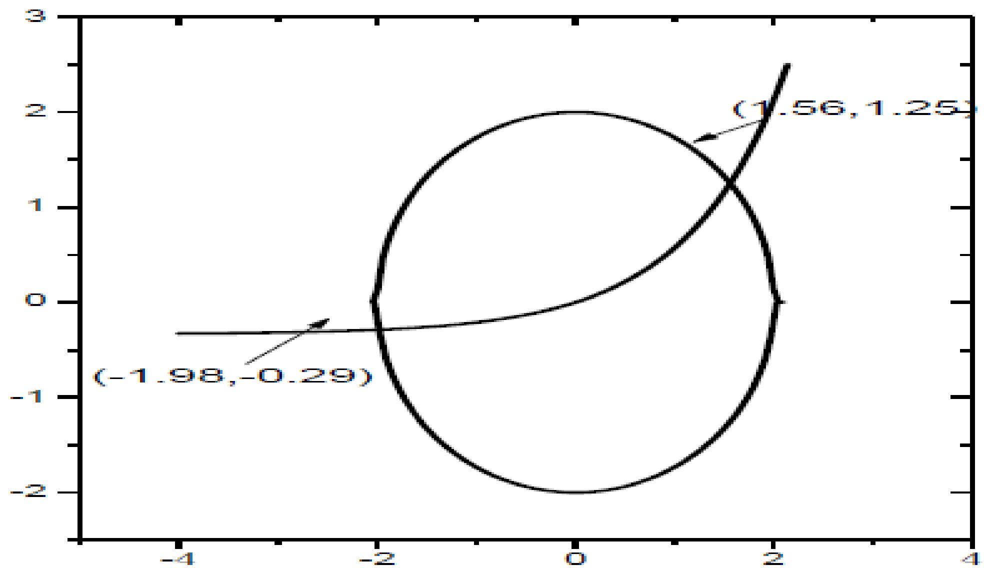
Ένα παράδειγμα συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων είναι το εξής. Έστω δύο συναρτήσεις :

$$f(x,y) = e^x - 3y - 1$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

Ζητούμε τα πιθανά σημεία για τα οποία ταυτοχρόνως ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\begin{gathered} f\left(x,y\right) = 0 \\ g\left(x,y\right) = 0 \end{gathered}$$


(1.56,1.25)
(-1.98,-0.29)
3
2
1
0
-1
-2
-4
-2
0
2
4

1.6.1 Η Μέθοδος Newton

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω το σύστημα

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από τη λύση, βρίσκουμε:

$$0 \cong f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong f(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$0 \cong g(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong g(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial g}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}$$
$$y_{n+1} = y_n - \frac{g \cdot f_x - f \cdot g_x}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $f_x = \partial f / \partial x$.

1.6.2 Μέθοδος τύπου $x = g(x)$

Έστω το σύστημα των N εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\ \vdots &\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \end{aligned}$$

Εάν είναι δυνατόν το σύστημα να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ \ldots \\ x_N &= F_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{aligned}$$

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο $x = g(x)$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_N}\right| < 1$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\left|\frac{\partial f_N}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_N}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_N}{\partial x_N}\right| < 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$e^x - 3y = 1$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_{n+1} = -\sqrt{4 - y_n^2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

1η μέθοδος

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	-2	-1.9884	-1.9791	-1.9792	-1.9793
y	0	-0.2107	-0.2882	-0.2877	-0.2873	-0.2873

2η μέθοδος

n	0	1	2	3
x	-1	-2	-1.9791	-1.9793
y	0	-0.2882	-0.2873	-0.2873

1.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $e^x - \sin(x) = 0$ ($\rho = -3.183063012$). Αν το αρχικό διάστημα είναι [-4, -3], πόσες εφαρμογές της μεθόδου διχοτόμησης απαιτούνται, για να επιτύχουμε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (δηλαδή) $|x_n - \rho| < 0.00005$·
2. Υπολογίστε το σημείο τομής των καμπυλών $y = e^x$ και $y = 2x + 1$ με ακρίβεια τριων δεκαδικών ψηφίων *με τη μέθοδο της διχοτόμησης*.
3. Εφαρμόστε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής στη λύση του προβλήματος 1. Πόσες επαναλήψεις απαιτούνται για την επίτευξη της ακρίβειας των τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων·
4. Επαναλάβετε την άσκηση 2 με τη χρήση γραμμικής παρεμβολής.
5. Εφαρμόστε τη μέθοδο Muller στις ασκήσεις 1 και 2.
6. Βρείτε τις τρεις ρίζες της $e^x - 2x^2 = 0$, με κατάλληλη χρήση της μεθόδου $x = g(x)$.

7. Να βρεθούν οι ρίζες της $3x - \sin(x) - e^x = 0$ με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής και τη μέθοδο Newton-Raphson.
8. Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 3 = 0$ (προφανώς είναι 3 και -1) με τη μέθοδο $x = g(x)$. Δοκιμάσετε τις κατάλληλες γραφές για να επιτύχεται σύγκλιση.
9. Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson στις ασκήσεις 1 και 2.
10. Να βρεθεί η n-οστή ρίζα ενός αριθμού (αναδρομική σχέση)
11. Να βρεθεί η 3η ρίζα ενός αριθμού
12. Να βρεθεί η ιδιοτιμή λ της εξίσωσης $y'' + \lambda^2 y = 0$ με οριακές συνθήκες $y\left(0\right) = 0$ και $y\left(1\right) = y'\left(1\right)$.
13. Γνωρίζουμε ότι αν η $f\left(x\right)$ έχει διπλή ρίζα στο $x = r$ τότε $f'\left(r\right) = 0$. Επίσης αν η $f\left(x\right)$ έχει μια ρίζα με πολλαπλότητα m στο $x = r$ τότε $f^{(i)} = 0$, για $i = 1, 2, ..., m - 1$. Με βάση τα προηγούμενα να δειχθεί ότι αν $f\left(x\right), f'\left(x\right)$ και $f''\left(x\right)$ είναι συνεχείς και φραγμένες σ'ενα διάστημα που περιέχει μια ρίζα πολλαπλότητας m δηλαδή είναι $f\left(r\right) = f'\left(r\right) = ... = f^{(m-1)}\left(r\right) = 0$ αλλά $f^{(m)}\left(r\right) \neq 0$ τότε η

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

συγκλίνει τετραγωνικά.

14. Να βρεθεί ο αντίστροφος ενός αριθμού χωρίς χρήση διαίρεσης.
15. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $x = g(x)$ να βρεθεί μια ρίζα του πολυωνύμου $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$ κοντά στο 1. Χρησιμοποιείστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές αναδιατάξεις του πολυωνύμου και συγκρίνετε το αποτέλεσμα. Τέλος χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Aitken για τη βελτίωση του τελικού αποτελέσματος.
16. Να βρεθεί αριθμητικά η τιμή του $1/\sqrt{a}$
17. Η $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ έχει τρείς ρίζες. Αν γραφεί στη μορφή $x = \pm\sqrt{e^x/3}$ να βρεθούν οι ρίζες της, όσες είναι δυνατόν, και αν δεν μπορεί να βρεθεί κάποια με αυτό το σχήμα τότε δοκιμάστε εναλλακτικά σχήματα.

18. Να γίνουν δύο βήματα με τη μέθοδο Newton-Raphson για το παρακάτω σύστημα, με αρχικές τιμές $(0, 1)$:

$$4x^2 - y^2 = 0$$
$$4xy^2 - x = 1$$

19. Με αρχικές τιμές (0,0,1) να γίνει ένα βήμα με τη μέθοδο Newton-Raphson για το σύστημα

$$\begin{aligned} xy - z^2 &= 1 \\ xyz - x^2 + y^2 &= 2 \\ e^x - e^y + z &= 3 \end{aligned}$$

Να εξηγηθεί το αποτέλεσμα.

20. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με χρήση των δύο αριθμητικών μεθόδων και συγκρίνεται την ταχύτητα σύγκλισης τους.

$$\begin{aligned} e^x - y &= 0 \\ xy - e^x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xyz - x^2 + y^2 &= 1.34 \\ xy - z^2 &= 0.09 \\ e^x - e^y + z &= 0.41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y &= 0 \\ x^2 + y^3 &= 1 \end{aligned}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης