ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 2: Γραμμικά Συστήματα

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Να λυθεί το σύστημα : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ a_{21} & & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Να λυθεί το σύστημα : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ a_{21} & & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

<u>Επιτρέπονται:</u>

- Αλλαγή της σειράς δυο εξισώσεων.
- Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μια μη-μηδενική σταθερά.
- Αντικατάσταση εξίσωσης από γραμμικό συνδυασμό αυτής με άλλες.

2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS

Αναλυτική γραφή του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \ldots + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}
$$

1ο βήμα: θέλουμε να απαλείψουμε τους συντελεστές κάτω από τη διαγώνιο στην 1η στήλη.

Πολλαπλασιάζω την 1η εξίσωση με a_{21}/a_{11} και την αφαιρώ από τη 2η.

Ομοίως με τις υπόλοιπες:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
0 + a_{N2}^{(1)}x_2 + a_{N3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(1)}x_N &= b_N^{(1)}
\end{aligned}
$$

Οι νέοι συντελεστές είναι π.χ.

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}$$

Συνεχίζω ομοίως, ώστε να μηδενιστούν οι συντελεστές της 2ης στήλης κάτω από τη διαγώνιο:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(2)}x_N &= b_N^{(2)}
\end{aligned}
$$

Οι νέοι συντελεστές είναι π.χ.

$$
a_{33}^{(2)} = \frac{a_{32}^{(1)}\, a_{33}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - a_{33}^{(1)}
$$

Μετά από N-1 βήματα καταλήγω στο **άνω τριγωνικό** σύστημα:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
&\vdots \\
0 + 0 + \cdots + a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}$$

Επίλυση **άνω τριγωνικού** συστήματος:

$$x_N = \frac{b_N^{(N-1)}}{a_{NN}^{(N-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^{N} a_{ik}^{(i-1)} x_k}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Χρήση της Οδήγησης (Pivoting)

Για τη βελτίωση της ακρίβειας των υπολογισμών φροντίζουμε στο σύστημα (2.3) το a_{11} να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο. Αντίστοιχα, στο σύστημα (2.4) το $a_{22}^{(1)}$ πρέπει να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω ότι, μετά από τη χρήση της μεθόδου Gauss στη λύση ενός $N \times N$ συστήματος, οι δυο τελευταίες εξισώσεις, η $N-1$ και η N είναι:

$$\begin{aligned} 0x_{N-1} + x_N &= 1 \\ 2x_{N-1} + x_N &= 3 \end{aligned}$$

Προφανώς, έχουν λύση: $x_{N-1} = x_N = 1$. Αλλά, λόγω σφαλμάτων αποκοπής, στην πράξη το σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \epsilon\, x_{N-1} + x_N &= 1 \\ 2x_{N-1} + x_N &= 3 \end{aligned}$$

οπότε συνεχίζοντας στο τελευταίο βήμα θα πάρουμε:

$$
\begin{aligned}
\epsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \\
\left(1 - \frac{2}{\epsilon}\right) x_N &= 3 - \frac{2}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

με λύσεις

$$
\begin{aligned}
x_N &= \frac{3 - \frac{2}{\epsilon}}{1 - \frac{2}{\epsilon}} \approx 1 \qquad \textit{σωστό} \\
x_{N-1} &= \frac{1 - x_N}{\epsilon}\,!
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε δηλαδή, πως το x_{N-1} είναι απροσδιόριστο, γιατί αποτελεί το λόγο δυο μικρών αριθμών, των οποίων η ακρίβεια εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία εκτελεί τις πράξεις ο Η/Υ. Στη συνέχεια, ο όρος x_{N-1} θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των $x_{N-2}, \ldots, x_1$ με καταστροφικά αποτελέσματα.

Αν όμως χρησιμοποιηθεί **οδήγηση**, *το σύστημα γράφεται:*

$$
\begin{aligned}
2x_{N-1} + x_N &= 3 \\
\epsilon x_{N-1} + x_N &= 1
\end{aligned}
$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας επί ϵ *την πρώτη και επί 2 την δεύτερη καταλήγουμε*

$$
\begin{aligned}
2x_{N-1} + x_N &= 3 \\
\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x_N &= 1 - \frac{3\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

οπότε η λύση του είναι $x_N \approx 1.0$ *και* $x_{N-1} = \frac{3 - x_N}{2} \approx 1.0$.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-JORDAN

Σε κάθε βήμα μηδενίζω τους συντελεστές και πάνω από τη διαγώνιο!

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + 0 + a_{13}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{1N}^{(2)}x_N &= b_1^{(2)} \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
&\vdots \\
0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N &= b_N^{(2)}
\end{aligned}
$$

Στο τέλος καταλήγω σε ένα **διαγώνιο πίνακα**:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(N-1)} \\
a_{22}^{(1)}x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_2^{(N-1)} \\
&\vdots \\
a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}
$$

Στο τέλος καταλήγω σε ένα **διαγώνιο πίνακα**:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(N-1)} \\
a_{22}^{(1)}x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_2^{(N-1)} \\
&\vdots \\
a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}
$$

με προφανή λύση:

$$x_i = \frac{b_i^{(N-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ L-U

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \underset{(lower)}{\mathbf{L}} \cdot \underset{(upper)}{\mathbf{U}}$$

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ L-U

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \underset{(lower)}{\mathbf{L}} \cdot \underset{(upper)}{\mathbf{U}}$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή του **L** με την 1η στήλη του **U** βρίσκουμε:

$$l_{11} = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31}, \quad l_{41} = a_{41}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή του **L** με τις υπόλοιπες στήλες του **U** βρίσκουμε:

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

Ομοίως, με τη δεύτερη στήλη της **U** βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + l_{22} &= a_{22} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} &= a_{32} \\ l_{41}u_{12} + l_{42} &= a_{42} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} \\ l_{42} &= a_{42} - l_{41}u_{12} \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Συνοπτικά:

Για j=1: $$l_{i1} = a_{i1}$$

Για i=1: $$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

Για όλα τα υπόλοιπα:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad \text{για} \quad j \leq i \quad \text{και} \quad i = 1, 2, ..., N$$

$$u_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}}{l_{jj}} \quad \text{για} \quad j \leq i \quad \text{και} \quad j = 2, 3, ..., N$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα εφαρμόσθει ή μέθοδος LU για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε με βάση τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε:

$$l_{11} = 3, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 2, \quad u_{12} = -\frac{1}{3}, \quad u_{13} = \frac{2}{3}$$
$$l_{22} = 2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}, \quad l_{32} = -\frac{4}{3}, \qquad u_{23} = 1, \qquad l_{33} = -1$$

οπότε τελικά οι ζητούμενοι πίνακες είναι:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & 4/3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμογή της ‘ L-U ’ στα γραμμικά συστήματα

Με τη μέθοδο L-U ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $\mathbf{A} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}$ ανάγεται στο σύστημα

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}$$

Λύνουμε πρώτα το κάτω-τριγωνικό σύστημα $\mathbf{L} \cdot \mathrm{b}' = \mathrm{b}$ σύμφωνα με τον κανόνα:

$$b'_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad b'_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}} \quad \text{για} \quad i = 2, 3, ..., N$$

οπότε απομένει να λύσουμε το τριγωνικό σύστημα $\mathbf{U} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}'$ με τις σχέσεις που δόθηκαν στη μέθοδο Gauss, για την επίλυση τριγωνικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν έχουμε να λύσουμε ένα μεγάλο αριθμό γραμμικών συστημάτων που διαφέρουν μόνο στο διάνυσμα b.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ)

Είναι γενίκευση της x=g(x) στα γραμμικά συστήματα:

Έστω το σύστημα των N εξισώσεων με N αγνώστους :

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\
&\;..... \\
f_n(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0
\end{aligned}
$$

που εύκολα μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g_1(x_2, x_3, ..., x_N) \\
x_2 &= g_2(x_1, x_3, ..., x_N) \\
&\;... \\
x_N &= g_N(x_1, x_2, ..., x_{N-1})
\end{aligned}
$$

κάθεμια από τις N εξισώσεις θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} a_{ij} x_j$$

και στη συνέχεια δίνοντας N 'αυθαίρετες' αρχικές τιμές $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$, δημιουργώ μια γενικευμένη αναδρομική σχέση της μορφής

$$x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)}) .$$

Ικανή **συνθήκη σύγκλισης** είναι η:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$$

Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το σύστημα

$$
\begin{aligned}
4x - y + z &= 7 \\
4x - 8y + z &= -21 \\
-2x + y + 5z &= 15
\end{aligned}
$$

(που έχει λύσεις x = 2, y = 4, z = 3) μπορώ να δημιουργήσω τις αναδρομικές σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4} \\
y^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8} \\
z^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}
\end{aligned}
$$

και θέτοντας ως αρχικές τιμές $(1,2,2)$ *παίρνω την ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων*

$$\begin{aligned}(1,2,2) &\rightarrow (1.75, 3.375, 3)\\ &\rightarrow (1.844, 3.875, 3.025)\\ &\rightarrow (1.963, 3.925, 2.963)\\ &\rightarrow (1.991, 3.977, 3.0)\\ &\rightarrow (1.994, 3.995, 3.001)\end{aligned}$$

Δηλαδή, απαιτήθηκαν 5 συνολικά επαναλήψεις, για να βρούμε τη λύση του συστήματος με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ)

Στη γενική περίπτωση για τον υπολογισμό του x_1 μετα από k επαναλήψεις θα χρησιμοποιώ μια σχέση της μορφής :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{N} a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

στη δεύτερη εξίσωση από την οποία θα υπολογίζω το x_2 μετά από k επαναλήψεις αντικαθιστώ το $\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)}\right)$ και υπολογίζω το $x_2^{(k+1)}$ απο τη σχέση

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{N} a_{2j} x_j^{(k)} \right)$$

οπότε στην τρίτη εξίσωση θέτω $\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)}\right)$ κ.ο.κ. Άρα, ο γενικός τύπος θα είναι :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Και εδώ, η συνθήκη σύγκλισης είναι:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{D^{-1}} \left(\mathbf{B} \; - \; \mathbf{L}\mathbf{x^{(k+1)}} - \mathbf{U}\mathbf{x^{(k)}} \right)$$

όπου $\mathbf{A} = \underset{lower}{\mathbf{L}} + \underset{diagonal}{\mathbf{D}} + \underset{upper}{\mathbf{U}}$. Ο πίνακας $\mathbf{L}$ περιέχει τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{A}$ που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, ο πίνακας $\mathbf{D}$ μόνο τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ και τέλος ο πίνακας $\mathbf{U}$ τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{A}$ που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο.

$Παίρνω\ την\ ακολουθία\ τιμών:$

$$
\begin{aligned}
(1,2,2) &\rightarrow (1.75, 3.75, 2, 95) \\
&\rightarrow (1.95, 3.97, 2.99) \\
&\rightarrow (1.996, 3.996, 2.999)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή χρειάστηκαν μόνο 3 αντί για 5 επαναλήψεις (περίπου οι μισές).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εφαρμόστε την μέθοδο Gauss-Seidel στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου και συγκρίνετε την ταχύτητα σύγκλισης.

Πρακτικά οι προηγούμενες αναδρομικές σχέσεις θα γραφούν ως

$$x^{(k+1)} = \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{21 + 4x^{(k+1)} + z^{(k)}}{8}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{15 + 2x^{(k+1)} - y^{(k)}}{5}$$

2.7 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0$$

Για παράδειγμα, στην εξίσωση

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u_1}} = \underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u_1}}$$

το διάνυσμα $\mathbf{v_1} = (2, 1, -2)^\top$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και $\lambda_1 = -1$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$$

Το πολυώνυμο $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και οι ρίζες του $\lambda_i = -1$, 3 και 3 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$.

2.7.1 Η μέθοδος των δυνάμεων

Η μέθοδος εφαρμόζεται αν υπάρχει μια ιδιοτιμή λ_1 που είναι απολύτως μεγαλύτερη από όλες τις υπόλοιπες, δηλαδή

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_N| \tag{2.34}$$

και επίσης, αν κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των N ιδιοδιανυσμάτων $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}^{(N)}\right\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{u}^{(i)}$ ισχύει:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \qquad (1 \leq i \leq N) \tag{2.35}$$

και

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\mathbf{u}^{(N)} \tag{2.36}$$

Αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέλη της (2.36) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα έχω:

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1 \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + a_2 \lambda_2 \mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N \lambda_N \mathbf{u}^{(N)} \tag{2.37}$$

Αν πολλαπλασιάσω k φορές την (2.37) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα καταλήξω σε μια σχέση της μορφής

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} \equiv \mathbf{A}^k \mathbf{x} &= a_1 \lambda_1^k \mathbf{u}^{(1)} + a_2 \lambda_2^k \mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N \lambda_N^k \mathbf{u}^{(N)} \\
&= \lambda_1^k \left(a_1 \mathbf{u}^{(1)} + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{u}^{(N)} \right)
\end{aligned}$$

επειδή όμως η λ_1 είναι η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή (σχέση 2.34), οι όροι $(\lambda_j/\lambda_1)^k$ τείνουν στο μηδέν, καθώς το $k \to \infty$.

Άρα, για $k \to \infty$ λαμβάνουμε προσεγγιστικά ότι:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{x} \approx \lambda_1^k a_1 \mathbf{u}^{(1)} \tag{2.39}$$

και επομένως, ο λόγος

$$\mathbf{r}_k \equiv \frac{\mathbf{x}^{(k+1)}}{\mathbf{x}^{(k)}} = \frac{\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}}{\mathbf{A}^k \mathbf{x}} \approx \frac{\lambda_1^{k+1} a_1 \mathbf{u}^{(1)}}{\lambda_1^k a_1 \mathbf{u}^{(1)}} \to \lambda_1 \tag{2.40}$$

τείνει στην τιμή λ_1, καθώς $k \to \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι από την (2.39) υπολογίζουμε προσεγγιστικά και το αντίστοιχο ιδιοδυανύσμα $\mathbf{u}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(k)}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\textit{Έστω ο πίνακας}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\textit{Εστω, το τυχαίο διάνυσμα}\ \mathbf{x} = (1, 2, 1)^{\top}$

οπότε,

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 68 & 0 & 164 \\ 136 & 32 & 428 \\ 164 & 0 & 396 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^6 = \begin{pmatrix} 232 & 0 & 560 \\ 532 & 64 & 1484 \\ 560 & 0 & 1352 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{A}^5\mathbf{x} = (232, 628, 560)^\top$$

$$\mathbf{x}^{(6)} = \mathbf{A}^6\mathbf{x} = (792, 2144, 1912)^\top$$

$$\lambda_1 \approx \frac{x^{(6)}}{x^{(5)}} = \frac{2144}{628} \approx 3.4140$$

το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)}$ *θα είναι ίσο με το* $\mathbf{x}^{(6)}$

με κανονικοποίηση (διαιρούμε με το μεγαλύτερο στοιχείο του)

$$(0.3694, 1, 0.8918)$$

2.7.3 Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα $\mathbf{A}$, τότε η λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{-1}$.

Επομένως, εάν ένας πίνακας $\mathbf{A}$ έχει N ιδιοτιμές $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{N-1}| > |l_N| > 0$, τότε, οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^{-1}$ είναι οι τιμές λ_i^{-1}, για τις οποίες θα ισχύει:

$$\left|\lambda_N^{-1}\right| > \left|\lambda_{N-1}^{-1}\right| \geq \cdots \geq \left|\lambda_1^{-1}\right| > 0 \tag{2.43}$$

2.7.4 Μέθοδος της μετάθεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν οι N τιμές λ_i με $(i = 1, \ldots, N)$ είναι ιδιοτιμές ενός $N \times N$ πίνακα $\mathbf{A}$, τότε δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού μ ο πίνακας $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$: ο μοναδιαίος πίνακας) θα έχει ως ιδιοτιμές τις $(\lambda_i - \mu)$ για $(i = 1, \ldots N)$.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης