ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 3: Παρεμβολή και Πρόβλεψη

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

3. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ Η' ΠΡΟΒΛΕΨΗ

3.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ LAGRANGE

- **ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ LAGRANGE**: δοθείσης μιας n-άδας ζευγών σημείων (x_i, y_i), όπου τα $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα, θα υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού, που θα διέρχεται από αυτά τα n σημεία. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **συμπτωτικό πολυώνυμο**.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο 3ου βαθμού που διέρχεται από τα σημεία:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	3.2	2.7	1.0	4.8	5.6
$f(x)$	22.0	17.8	14.2	38.3	51.7
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

Αν το πολυώνυμο έχει τη μορφή $ax^3 + bx^2 + cx + d = P(x)$

τότε δημιουργούμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε:

$$P(x) = -0.5275x^3 + 6.4952x^2 - 16.117x + 24.3499$$

Το **πολυώνυμο Lagrange** δίνει απ' ευθείας το συμπτωτικό πολυώνυμο, χωρίς τη λύση συστήματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θα είναι:

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f_3$$

Στη γενική περίπτωση

$$\boxed{P_n(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + ... + f_nL_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_iL_i(x)}$$

όπου

$$L_j(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

3.1.2 Σφάλμα του τύπου Lagrange

Το σφάλμα που γίνεται στον υπολογισμό μιας τιμής $f(x)$ για κάποιο δοθέν x μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση:

$$\boxed{E(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

όπου n ο βαθμός του συμπτωτικού πολυωνύμου και το ξ είναι κατάλληλο σημείο μεταξύ των $x_0, ..., x_n$.

3.2 ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΓΙΑ ΙΣΑΠΕΧΟΝΤΑ x_i

τελεστή διαφοράς προς τα εμπρός

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+1} - f_i}$$

τελεστή διαφοράς προς τα πίσω

$$\boxed{\nabla f_i = f_i - f_{i-1}}$$

διαφορές 2ης τάξης

$$\Delta^2 f_1 = \Delta(\Delta f_1) = \Delta(f_2 - f_1) = \Delta f_2 - \Delta f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1$$

άρα

$$\boxed{\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}$$

διαφορές 3ης τάξης

$$\Delta^3 f_1 = \Delta(\Delta^2 f_1) = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$$

$$\boxed{\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}$$

διαφορές n-οστής τάξης

$$\boxed{\Delta^n f_i = f_{i+n} - n f_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{i+n-3} + \ldots}$$

πίνακες διαφορών

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0.0	0.000					
		0.203				
0.2	0.203		0.017			
		0.220		0.024		
0.4	0.423		0.041		0.020	
		0.261		0.044		0.032
0.6	0.684		0.085		0.052	
		0.246		0.096		
0.8	1.030		0.181			
		0.527				
1.0	1.557					

συμπτωτικό πολυώνυμο n βαθμού

$$\boxed{P_n(x_s) = f_0 + s \cdot \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \cdot \Delta^3 f_0 + \ldots}$$

$$= f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \binom{s}{3} \cdot \Delta^3 f_0 + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \cdot \Delta^i f_0$$

όπου $x_s = x_0 + s \cdot h$

3.2.1 Τύποι για ισαπέχοντα x_i

- **Newton - Gregory προς τα μπρός** (από το σημείο $x_0 \to x_n$)

$$P_n\ (s) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_0 + \binom{s}{2} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \cdot \Delta^n f_0$$

- **Newton - Gregory προς τα πίσω** (από το σημείο $x_{-n} \to x_0$)

$$P_n\ (s) = f_0 + \binom{s}{1} \cdot \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \cdot \Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3} \cdot \Delta^3 f_{-3} + \ldots + \binom{s+n-1}{n} \cdot \Delta^n f_{-n}$$

3.3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ (HERMITE)

αν απαιτήσουμε

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= y(x) \\ P'(x) &= y'(x) \end{aligned}}$$

για $x_0, x_1, ..., x_n$ καταλήγουμε σε $2n$ εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν ένα πολυώνυμου το πολύ $2n-1$ βαθμού. Το πολυώνυμο αυτό δίνεται από τον **τύπο του Hermite**.

$$\boxed{P_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) y_i + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) y_i'}$$

όπου

$$\begin{aligned} A_i(x) &= [1 - 2(x - x_i) L_i'(x_i)] \cdot [L_i(x)]^2 \\ B_i(x) &= (x - x_i) \cdot [L_i(x)]^2 \end{aligned}$$

όπου $L_i(x)$ είναι οι συντελεστές Lagrange.

ΣΦΑΛΜΑ

Το σφάλμα προφανώς θα είναι ισοδύναμο με αυτό ενός συμπτωτικού πολυωνύμου βαθμού $2n-1$

$$\boxed{y(x)-p(x)=\frac{y^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!}\left[(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)\right]^2}$$

3.4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR

Το πολυώνυμο Taylor έχει την ιδιότητα να ταυτίζεται σέ ένα μόνο σημείο x_0 με τή δοθείσα συνάρτηση, αλλά, επιπλεόν, εάν είναι βαθμού n, τότε και οι πρώτοι παράγωγοί τους μέχρι τάξης n θα ταυτίζονται σε αυτό το σημείο, δηλαδή:

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad \text{για} \quad i = 0, 1, ..., n$$

Το πολυώνυμο Taylor μπορεί να γραφεί:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x - x_0)^i$$

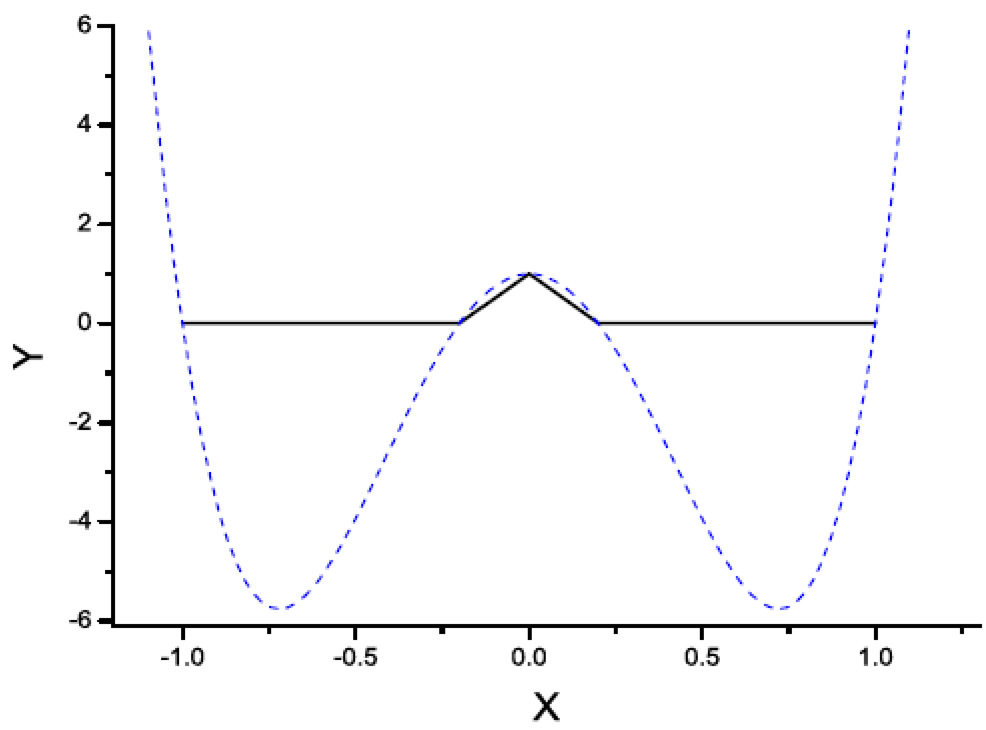
3.5 ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \le x \le -0.2 \\ 1 - 5|x| & -0.2 < x < 0.2 \\ 0 & 0.2 \le x \le 1.0 \end{array} \right.$$

Αν υποθέσουμε ότι βρίσκουμε στο διάστημα (-1,1) το συμπτωτικό πολυώνυμο τέταρτου βαθμού

$$P(x) = 1 - 26x^2 + 25x^4$$



SPLINES:

Για κάθε **ζεύγος σημείων**, βρίσκουμε ένα πολυώνυμο 3ου **βαθμού**.

Απαιτούμε να ταυτίζονται η f' **(κλίση)** και η f'' **(καμπυλότητα)** σε συνεχόμενα ζεύγη σημείων.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης