ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 4: Αριθμητική Παραγώγιση

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

4.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

$$y(x) \to P(x) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2s-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

Επομένως, αν θελήσουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο στη θέση x_0 αρκεί να θέσουμε στην παραπάνω σχέση $s = 0$, για τη θέση x_1 αρκεί να θέσουμε στην παραπάνω σχέση $s = 1$ κ.ο.κ., άρα:

$$\boxed{y_0' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]}$$

ανάλογα με τον αριθμό των όρων που θέλουμε να διατηρήσουμε, μπορούμε να δημιουργήσουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$$
\begin{aligned}
y_0' &= \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h) \\
y_0' &= -\frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{2h} + O(h^2) \\
y_0' &= -\frac{11y_0 - 18y_1 + 9y_2 - 2y_3}{6h} + O(h^3) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Με ανάλογο τρόπο θα υπολογισθεί και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y(x)$ στη θέση x_0. Είναι:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\mathrm{d}^2 p(s)}{\mathrm{d}s^2}} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (s-1)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

οπότε

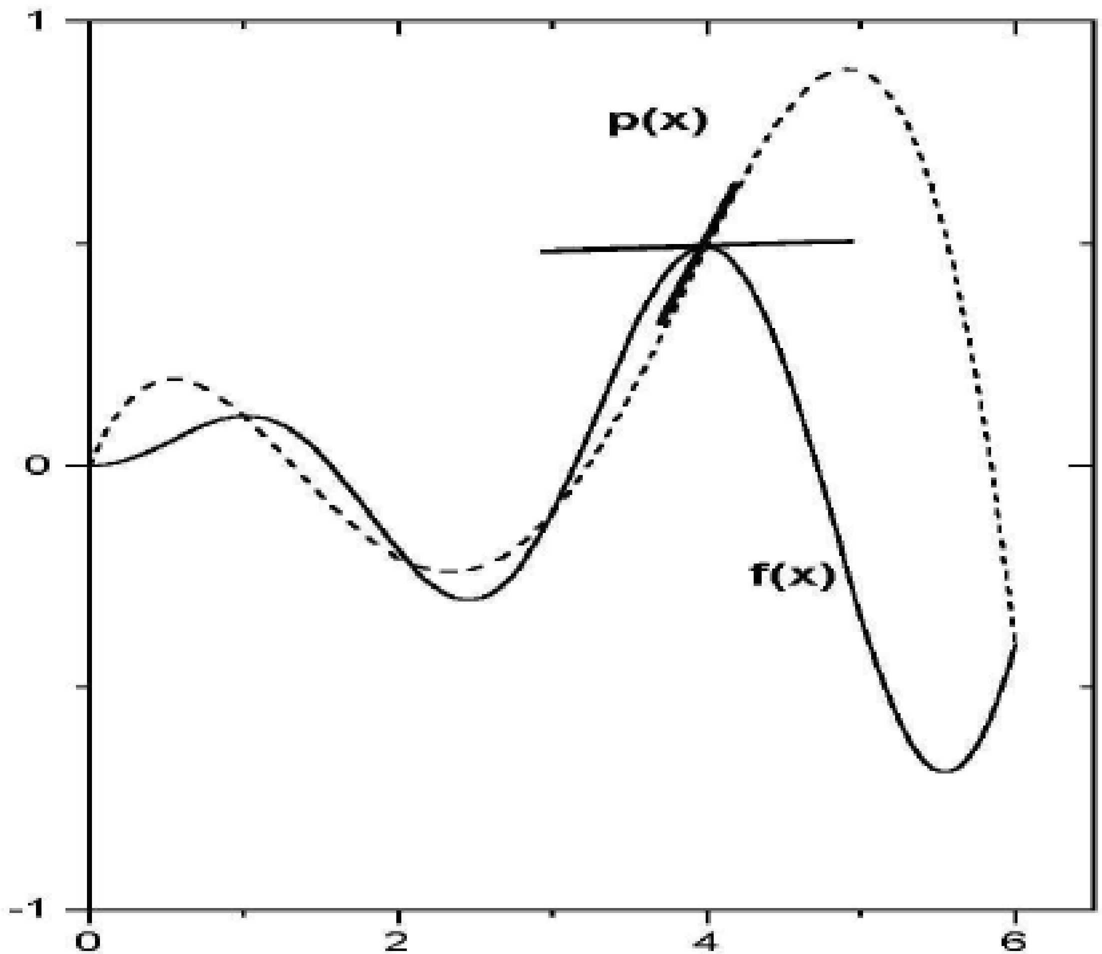
$$y_0'' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h)$$

και

$$y_0'' = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + O(h^2)$$

κ.ο.κ.

ΑΚΡΙΒΕΙΑ



4.2 ΤΥΠΟΙ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ας θεωρήσουμε τα αναπτύγματα Taylor δεξιά και αριστερά του σημείου x_0, στις θέσεις $\underline{x_0 \pm h}$ και $\underline{x_0 \pm 2h}$

$$y(x_0+h) \equiv y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' + \frac{h^4}{24}y_0^{(4)} + \dots$$

$$y(x_0-h) \equiv y_{-1} = y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' - \frac{h^3}{6}y_0''' + \frac{h^4}{24}y_0^{(4)} - \dots$$

$$y(x_0+2h) \equiv y_2 = y_0 + 2hy_0' + 2h^2y_0'' + \frac{4}{3}h^3y_0''' + \frac{2}{3}h^4y_0^{(4)} + \dots$$

$$y(x_0-2h) \equiv y_{-2} = y_0 - 2hy_0' + 2h^2y_0'' - \frac{4}{3}h^3y_0''' + \frac{2}{3}h^4y_0^{(4)} - \dots$$

μπορώ με κατάλληλους συνδυασμούς τους να δημιουργήσω

$$y_(x_0)' = y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_(x_0)' = y_o' = \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$y_(x_0)'' = y_0' = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$y_(x_0)'' = y_0'' = \frac{-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

$$y_(x_0)''' = y_0''' = \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης