ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 5: Αριθμητική Ολοκλήρωση

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

5.1 ΤΥΠΟΙ NEWTON-COTES

$$\int_a^b y(x)dx \rightarrow \int_a^b P_n(x)dx$$

Το συμπτωτικό πολυώνυμο μπορεί να υπολογισθεί με χρήση του τύπου του Newton

$$P_n(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots$$

Το σφάλμα

$$E = \int_a^b E_n(x_s)dx$$

όπου

$$E_n(x_s) = \frac{s(s-1)(s-2)...(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

για $\xi \in [a, b]$.

- **Συμπτωτικό πολυώνυμο 1ου βαθμού**
  Βρίσκουμε:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \to \int_{x_0}^{x_1} P_1(x_s)dx = \int_{x_0}^{x_1} (f_0 + s\Delta f_0)\, dx = h \int_{s=0}^{s=1} (f_0 + s\Delta f_0)\ ds$$

$$= h f_0 s \Big|_0^1 + h\Delta f_0 \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0\right)$$

$$= \boxed{\frac{h}{2}(f_0 + f_1)}$$

ΣΦΑΛΜΑ

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{2}s(s-1)h^2 f''(\xi) \quad \text{για} \quad x_0 \le \xi \le x_1$$

$$E = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}s(s-1)h^2 f''(\xi)dx = \frac{h^3}{2}\int_{s=0}^{s=1} f''(\xi)ds$$
$$= h^3 f''(\xi_1)\left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4}\right)_0^1 = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi_1)$$

όπου $\xi_1 \in [x_0, x_1]$.

- **Συμπτωτικό πολυώνυμο 2ου βαθμού**

  Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \to \int_{x_0}^{x_2} P_2(x_s)dx &= \int_{x_0}^{x_2} \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 f_0 \right) dx \\
&= h\int_{s=0}^{s=2} \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 f_0 \right) ds \\
&= h\left(2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 \right) \\
&= \boxed{\frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 \right)}
\end{aligned}
$$

ΣΦΑΛΜΑ

Μια σημαντική διαπίστωση είναι ότι αν ολοκληρώσουμε τον επόμενο όρο του συμπτωτικού πολυωνύμου για τον υπολογισμό του σφάλματος βρίσκουμε ότι μηδενίζεται. Δηλαδή

$$\frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_2} s(s-1)(s-2)\Delta^3 f_0 dx = 0\,.$$

Επομένως

$$E = \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} s(s-1)(s-2)(s-3)h^4 f^{(4)}(\xi)dx = \ldots = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi_1)$$

για $x_0 \le \xi_1 \le x_2$.

- **Προσέγγιση με συμπτωτικό πολυώνυμο 3ου βαθμού**
  Με βάση τα προηγούμενα βρίσκουμε:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \to \int_{x_0}^{x_3} P_3(x_s)dx = \boxed{\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)}.$$

ΣΦΑΛΜΑ

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$E = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi_1) \quad \text{για} \quad x_0 \leq \xi_1 \leq x_3$$

τύποι Newton-Cotes.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi_1)$$

5.1.1 Κανόνας τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} P_1(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_1(x)dx$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})}$$

Οπότε καταλήγουμε στη σχέση :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + ... + 2f_{n\text{-}1} + f_n \quad)}$$

ΣΦΑΛΜΑ

$$E = -\frac{h^3}{12}\left[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \ldots + f''(\xi_n)\right]$$

$$= -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi)$$

<u>επειδή $h = (b-a)/n$</u>

5.1.2 Κανόνας του Simpson

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{h}{3}\left(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)}$$

απαιτείται **άρτιος αριθμός υποδιαιρέσεων** του διαστήματος (a, b).

ΣΦΑΛΜΑ

$$E = -\frac{h^5}{90}\frac{n}{2}f^{(4)}(\xi) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \text{για} \quad x_0 \leq \xi \leq x_n$$

5.1.3 Κανόνας του Simpson (3/8)

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f\left(x\right)dx = \boxed{\frac{3h}{8}\left(f_0+3f_1+3f_2+2f_3+\ldots+2f_{n-3}+3f_{n-2}+3f_n+f_{n+1}\right)}$$

που προφανώς θα ισχύει για αριθμό υποδιαιρέσεων που διαιρείται με το 3.

ΣΦΑΛΜΑ

$$E = -\frac{b-a}{80}h^4 f^{(4)}(\xi_1) \quad \text{για} \quad x_0 \le \xi_1 \le x_n$$

Οι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης και τα σφάλματα τους:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\right) - \frac{b-a}{12}h^2 f^{(2)}(\xi_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 2f_{n-2} + 4f_n + f_{n+1}\right) - \frac{b-a}{180}h^5 f^{(4)}(\xi_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + ... + 3f_{n-2} + 3f_n + f_{n+1}\right) - \frac{b-a}{80}h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

5.1.4 Η βελτίωση του Romberg

- για βήμα h: Ακριβής Τιμή $A = I_1 + ch^2$
- για βήμα kh: Ακριβής Τιμή $A = I_2 + ck^2h^2$

όπου c μια σταθερά. Δηλαδή, δημιουργήσαμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους το A και το c, του οποίου η λύση είναι:

$$A = \frac{k^2 I_1 - I_2}{k^2 - 1} \quad \text{και} \quad c = \frac{I_2 - I_1}{h^2(1 - k^2)}$$

Επομένως η *ακριβής τιμή* καθορίζεται από τις τιμές των I_1, I_2 και k. Αν για παράδειγμα θέσουμε $k = 1/2$, τότε

$$\boxed{A = I_2 + \frac{1}{3}\left(I_2 - I_1\right)}$$

Γενικότερα, αν υποθέσουμε μέθοδο με σφάλμα τάξης $O(h^n)$, ο παραπάνω τύπος γενικεύεται ώς ακολούθως :

$$\boxed{A = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{2^n - 1}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η μέθοδος Romberg για τον κανόνα τραπεζίου με $k = 1/2$ είναι ισοδύναμη της μεθόδου Simpson.

Ας δοκιμάσουμε καταρχάς για 3 σημεία. Πράγματι, το ολοκλήρωμα I_1 για βήμα $2h$ και το ολοκλήρωμα I_2 για βήμα h θα είναι:

$$I_1 = \frac{2h}{2}\left(f_0 + f_2\right) = h\left(f_0 + f_2\right)$$
$$I_2 = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) + \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + f_2\right)$$

οπότε η «ακριβής τιμή» μέ βάση τα προηγούμενα, θα είναι:

$$A = \frac{2h(f_0 + 2f_1 + f_2) - h(f_0 + f_2)}{3} = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

που προφανώς αντιστοιχεί στη μεθόδο Simpson, Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων με τη χρήση της μεθόδου Romberg από $O(h^3)$ έχει γίνει $O(h^5)$.

Προφανώς η παραπάνω διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για βελτίωση των αποτελεσμάτων της μεθόδου Simpson οπότε η ακρίβεια των υπολογισμών από $O(h^5)$ γίνεται $O(h^7)$.

5.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Γνωρίζουμε από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό ότι για μια συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει μια κατάλληλη τιμή ξ στο διάστημα ολοκλήρωσης (a, b) ούτως ώστε να ισχύει (θεώρημα μέσης τιμής):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)}$$

Αν το γενικεύσουμε, θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε ένα διάστημα με ένα γραμμικό συνδυασμό τιμών της $f(x)$ εντός του διαστήματος (a, b).

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \equiv c_0 f(a) + c_1 f(b)}$$

Οι τιμές των c_0, c_1 εξαρτώνται από την $f(x)$ αλλά και από τις τιμές των a και b.

Για να είναι αληθής η παραπάνω σχεση, θα πρέπει η $f(x)$ να είναι είτε σταθερή συνάρτηση είτε γραμμική ως προς x.

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \int_a^b x \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \equiv c_0 \cdot a + c_1 \cdot b$$

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \int_a^b 1 \cdot dx = x|_a^b = (b - a) \equiv c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1$$

Οπότε, εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$c_0 = \frac{b-a}{2} \quad \text{και} \quad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

Άρα

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \equiv \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

Ουσιαστικά, έχουμε δημιουργήσει ξανά τον «κανόνα του τραπεζίου», που δίνει ακριβή αποτελέσματα για συναρτήσεις που παριστάνουν ευθείες.

με τρεις όρους

$$\int_a^b f(x)dx \equiv c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_2 f(b)$$

Οπότε, θέτω $f(x) = 1$, $f(x) = x$ και $f(x) = x^2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

που στην ουσία είναι ο κανόνας του Simpson για τρία σημεία.

Θα μπορούσαμε εύκολα να επεκτείνουμε την παραπάνω διακασία, προσθέτοντας και τις πρώτες παραγώγους της συνάρτησης σε κάποια σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης, για παράδειγμα:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = c_0 f(a) + c_1 f(b) + c_2 f'(a) + c_3 f'(b)}$$

οπότε θα πρέπει να καταλήξω σε ένα σύστημα με τέσσερις άγνωστες ποσότητες που θα μας οδηγήσει στη σχέση:

$$\boxed{\int_a^b f\left(x\right) dx = \frac{\left(b-a\right)}{2}\left(f\left(a\right) + f\left(b\right)\right) + \frac{\left(b-a\right)^2}{12}\left(f'\left(a\right) - f'\left(b\right)\right)}$$

Euler-Maclaurin

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$
$$- \frac{h^2}{12}\left[f'(x_n) - f'(x_0)\right]$$
$$+ \frac{h^4}{720}\left[f^{(3)}(x_n) - f^{(3)}(x_0)\right]$$
$$- \frac{h^6}{30240}\left[f^{(5)}(x_n) - f^{(5)}(x_0)\right]$$

που είναι μια *εξαιρετικά ακριβής* μέθοδος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx &= \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &+ \frac{\pi^2}{2^2 \cdot 12}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right)\\ &- \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 720}\left(\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &+ \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 30240}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{48} + \frac{\pi^4}{16 \cdot 720} + \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 30240} = 0.99996732\end{aligned}$$

5.2.1 Μέθοδος του Filon

Είναι μια ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος που βασίζεται στη τεχνική των προσδιοριστέων συντελεστών για ολοκληρώματα της μορφής

$$\boxed{\int_a^b f(x)\sin(x)dx} \quad \text{και} \quad \boxed{\int_a^b f(x)\cos(x)dx}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(\pi) + A_3 f(2\pi)}$$

Η σχέση αυτή θα δίνει ακριβές αποτέλεσμα για $f(x) = 1$, $f(x) = x$ και $f(x) = x^2$ οπότε δημιουργούμε το παρακάτω σύστημα για τους τρείς άγνωστους συντελεστές

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad & \Rightarrow 0 = A_1 + A_2 + A_3 \\ f(x) = x \quad & \Rightarrow -2\pi = \pi A_2 + 2\pi A_3 \\ f(x) = x^2 \quad & \Rightarrow -4\pi^2 = \pi^2 A_2 + 4\pi^2 A_3 \end{aligned}$$

με λύση $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ και $A_3 = -1$. Άρα

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x dx \approx f(0) - f(2\pi)\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x/2} \cos(100x) dx$$

του οποίου η ακριβής τιμή είναι $4.783810813 \times 10^{-5}$, *λαμβανουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.3. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος του Filon δίνει ικανοποιητικό αποτέλεσμα ακόμη και με χρήση μόνο 4 σημείων ενώ η μέθοδος του Simpson απαιτεί τουλάχιστον 1000 σημεία για να επιτύχει την ίδια ακρίβεια.*

n	Simpson	Filon
4	1.91733833E+0	4.77229440E-5
8	-5.73192992E-2	4.72338540E-5
16	2.42801799E-2	4.72338540E-5
128	5.55127202E-4	4.78308678E-5
256	-1.30263888E-4	4.78404787E-5
1024	4.77161559E-5	4.78381120E-5
2048	4.78309107E-5	4.78381084E-5

5.3 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS

Έστω ότι το διαστημα ολοκλήρωσης είναι το $[-1, 1]$ τότε υποθέτουμε ότι :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx af(x_1) + bf(x_2)$$

δηλαδή, έχουμε τέσσερις άγνωστες ποσότητες a, b, x_1 και x_2.

είναι ακριβής για πολυώνυμα έως και τρίτου βαθμού δηλαδή $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ και $f(x) = x^3$.

$$\left.\begin{array}{lll} f\left(x\right)=1 & \Rightarrow & 2=a+b \\ f\left(x\right)=x & \Rightarrow & 0=ax_1+bx_2 \\ f\left(x\right)=x^2 & \Rightarrow & \frac{2}{3}=ax_1^2+bx_2^2 \\ f\left(x\right)=x^3 & \Rightarrow & 0=ax_1^3+bx_2^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=b=1 \\ x_1=-x_2=-\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}=-0.5773 \end{array}$$

Επομένως

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-0.5773\right)+f\left(0.5773\right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν τα όρια ολοκλήρωσης δεν είναι $[-1, 1]$, κάνουμε την αντικατάσταση

$$x = \frac{1}{2}(b-a)\, t + \frac{1}{2}(b+a) \quad \text{και} \quad dx = \frac{b-a}{2}\, dt$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί αριθμητικά η τιμή του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

Κατ'αρχάς, αλλάζουμε τη μεταβλητή και τα όρια ολοκλήρωσης

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(t+1) \quad \text{και} \quad dx = \frac{\pi}{4}dt$$

οπότε, για τα νέα όρια, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(t+1)\right] dt = \frac{\pi}{4}\left[1.0 \cdot \sin(0.10566 \cdot \pi) + 1.0 \cdot \sin(0.39434 \cdot \pi)\right]$$
$$= 0.99847$$

Για σύγκριση αναφέρουμε ότι ο κανόνας τραπεζίου 2 σημείων δίνει: 0.7854 και ο κανόνας Simpson 3 σημείων δίνει: 1.0023.

5.3.1 Μέθοδος Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

Αποδεικνύεται ότι τα x_i είναι ρίζες των πολυωνύμων Legendre βαθμού n των οποίων οι ρίζες βρίσκονται πάντα εντός του διαστήματος $(-1, 1)$. Τα πολυώνυμα Legendre δημιουργούνται από την αναδρομική σχέση:

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) - (2n+1)\,xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

όπου τα 3 πρώτα πολυώνυμα είναι:

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = x \quad \text{και} \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Κατ' αναλογία τα A_i δίνονται από τις σχέσεισ:

$$A_i = \frac{2\left(1 - x^2\right)}{n^2\left[L_{n-1}(x_i)\right]^2}$$

Για παράδειγμα αν $n = 4$ θα πρέπει να βρούμε τις ρίζες του 4ο-βάθμιου πολυωνύμου Legendre

$$P_4 = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

που είναι $x_i = \pm\left[(15 \pm 2\sqrt{30})/35\right]^{1/2}$

n	x_i	A_i
2	$\pm$ 0.57735027	1.0000000
4	$\pm$ 0.86113631	0.34785485
	$\pm$ 0.33948104	0.62214515
8	$\pm$ 0.96028986	0.10122854
	$\pm$ 0.79666648	0.22381034
	$\pm$ 0.52553241	0.31370665
	$\pm$ 0.18343464	0.36268378

5.3.2 Γενίκευση της μεθόδου Gauss

$$I = \int_a^b w(x)y(x)dx \; = \sum_{i=1}^{n} A_i y(x_i)$$

- **Μέθοδος Gauss-Legendre** για συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$ που είναι η μέθοδος της προηγούμενης ενότητας.

- **Μέθοδος Gauss-Laguerre** για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{\infty} e^{-x} y(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i y(x_i)$$

προφανώς η συνάρτηση βάρους είναι $w(x) = e^{-x}$ και τα x_i είναι ρίζες των πολυωνύμων Laguerre που δημιουργούνται από την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$L_n(x) = e^{x} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right)$$

ενώ οι συντελεστές A_i υπολογίζονται από τη σχέση:

$$A_i = \frac{(n!)^2}{x_i \left[L_n'(x_i)\right]^2}$$

n	x_i	A_i
2	0.58578644	0.85355339
	3.41421356	0.14644661
4	0.32254769	0.60315410
	1.74576110	0.35741869
	4.53662030	0.03888791
	9.39507091	0.00053929
6	0.22284660	0.10122854
	1.18893210	0.41700083
	2.99273633	0.11337338
	5.77514357	0.01039920
	9.83746742	0.00026102
	15.98287398	0.00000090

Πίνακας: Οι τιμές των x_i και A_i της μεθόδου Gauss-Laguerre για 2, 4 και 6 σημεία.

- **Μέθοδος Gauss-Hermite** για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} y(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i y(x_i)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση βάρους είναι $w(x) = e^{-x^2}$ ενώ τα x_i είναι οι ρίζες των πολυωνύμων Hermite. Τα πολυώνυμα Hermite μπορούν να δημιουργηθούν από τη σχέση

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

ενώ οι συντελεστές A_i υπολογίζονται από τη σχέση:

$$A_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{\left[H_n'(x_i)\right]^2}$$

Τα x_i, A_i δίνονται σε πίνακες, (βλέπε Πίνακα παρακάτω).

n	x_i	A_i
2	$\pm$ 0.70710678	0.88622693
4	$\pm$ 0.52464762 $\pm$ 1.65068012	0.80491409 0.08131284
6	$\pm$ 0.43607741 $\pm$ 1.33584907 $\pm$ 2.35060497	0.72462960 0.15706732 0.00453001

Πίνακας: Οι τιμές των x_i και A_i της μεθόδου Gauss-Hermite για 2, 4 και 6 σημεία.

- **Μέθοδος Gauss-Chebyshev** για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-1}^{1} \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} y(x_i)$$

δηλαδή η συνάρτηση βάρους είναι

$$w\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ενώ τα x_i είναι ρίζες των πολυωνύμων Chebyshev

$$T_n(x) = \cos\left[n \arccos(x)\right]$$

που δίνονται από τις σχέσεις

$$x_i = \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2i-1)\right] .$$

Τέλος οι συντελεστές A_i δίνονται από μιά απλή έκφραση

$$A_i = \frac{\pi}{n}$$

όπου n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου που χρησιμοποιούμε.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης