ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και την Πρώτη Σχολική Ηλικία

Ενότητα 6: Αριθμοί και Πράξεις

Διδάσκουσα: Μαριάννα Τζεκάκη
Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής & Εκπαίδευσης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια ΤΕΠΑΕ, Α.Π.Θ.

Αριθμοί και Πράξεις

Περιεχόμενα ενότητας (1)

1. Σημασία εισαγωγής στην αρίθμηση.
2. Έννοια του αριθμού.
3. Αριθμητική μάθηση.
4. Διαστάσεις του αριθμού.
5. Δράσεις με αριθμούς.
6. Ιστορία των Αριθμών.
7. Συστήματα αρίθμησης – εξέλιξη.
8. Αριθμητικά σύμβολα – εξέλιξη.
9. Αριθμητικά σύμβολα.

Περιεχόμενα ενότητας (2)

10. Συστήματα αρίθμησης.
11. Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.
12. Φυσικοί Αριθμοί.
13. Οι απειρίες του Cantor.
14. Άλλα σύνολα αριθμών.
15. Διάκριση Ρητών – Άρρητων.
16. Ο αριθμός π.
17. Σύνολα αριθμών.
18. Χαρακτηριστικοί Αριθμοί.
19. Διδακτικές κατευθύνσεις.

Περιεχόμενα ενότητας (3)

20. Παραστάσεις αριθμών.
21. Περιεχόμενο πρώτης αρίθμησης.
22. Δραστηριότητες.

Πράξεις

1. Σημασία εισαγωγής στις πράξεις.
2. Νόημα Πρόσθεσης – Αφαίρεσης.
3. Σχέσεις αριθμών.
4. Προσθετικές καταστάσεις.
5. Διδακτικές εφαρμογές.
6. Δραστηριότητες.

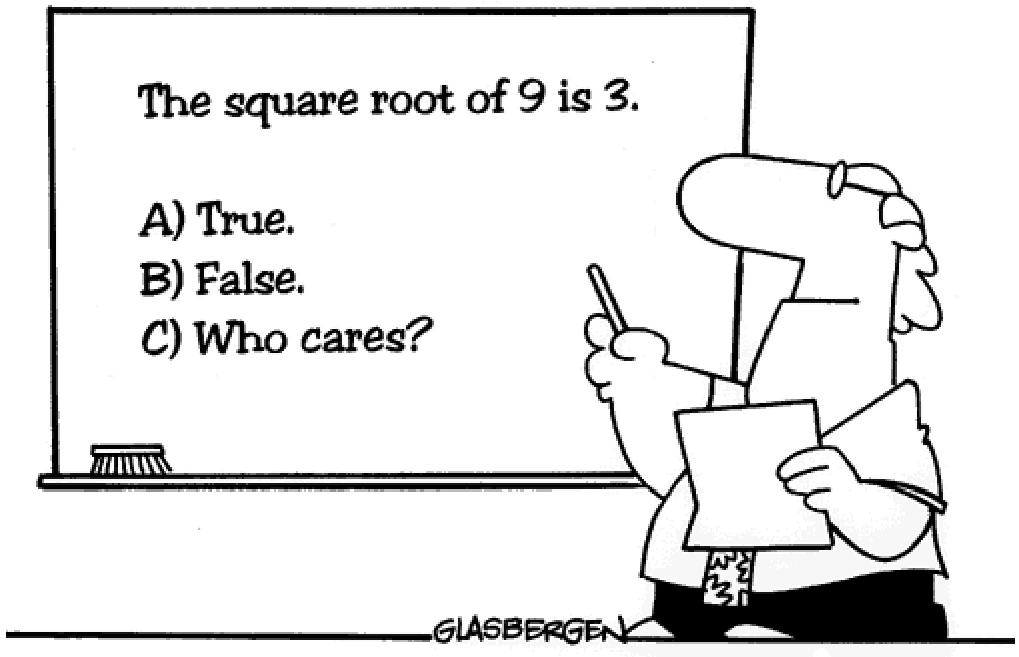
Περιεχόμενα ενότητας (4)

7. Νόημα Πολ/σμού – Διαίρεσης.
8. Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις.
9. Διδακτικές εφαρμογές.
10. Δραστηριότητες.
11. Αλγόριθμοι των πράξεων.
12. Υπολογιστικές μηχανές.
13. Ερωτήσεις.
14. Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία.

Σκοποί ενότητας

- Να γίνουν σαφή:

1. Τι σημαίνει πρώτη αρίθμηση και ποια η σημασία της;
2. Πώς ορίζεται ο αριθμός και σε ποιες διαφορετικές καταστάσεις χρησιμοποιείται;
3. Ποιοι είναι οι δύο βασικοί κανόνες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και ποια είναι τα 5 βασικά σύνολα αριθμών;
4. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την πρώτη αρίθμηση
5. Πώς ορίζονται η πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών αριθμών και ποιες ιδιότητες έχουν;
6. Πώς ορίζονται ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση φυσικών αριθμών και ποιες ιδιότητες έχουν;
7. Ποιες είναι οι διαφορετικές προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ;
8. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την εισαγωγή των πράξεων (πρόσθεση και πολλαπλασιασμού) στα νήπια.



Εικόνα 1. Cartoon.

Σημασία εισαγωγής στην αρίθμηση (1)

- Οι αριθμοί και η μέτρηση αποτελούν θεμελιακή λειτουργία του ανθρώπου για την αντιμετώπιση καθημερινών πραγματικών καταστάσεων.
- Η εμφάνιση του αριθμού από τόσο νωρίς, όπως και η ανάπτυξη αριθμητικών εννοιών από τα πρώτα χρόνια του παιδιού δεν συνεπάγεται και την απλότητά τους.
- Αυτό που μοιάζει ως αριθμητική μάθηση, όπως ότι τα παιδιά να «μετρούν» δεν σχετίζεται με τη μάθηση των αριθμών ή την προσέγγιση της σημασίας και του νοήματός τους.

Σημασία εισαγωγής στην αρίθμηση (2)

- Απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη όχι μόνο των πιο εξελιγμένων αριθμητικών μοντέλων, αλλά και τη γενικότερη ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού.
- Εμπλέκεται σε πολλά άλλα γνωστικά αντικείμενα, όπως οι φυσικές επιστήμες, η τεχνολογία κλπ.
- Η προσωπική, επαγγελματική και κοινωνική ζωή των πολιτών συνδέεται με μεγάλο αριθμό αποφάσεων στις οποίες εμπλέκονται αριθμητικά δεδομένα με κάθε τρόπο.

Έννοια του Αριθμού

- Η χρήση του όρου "αριθμός" συχνά παραμένει ασαφής καθώς συγχέεται με τα σύμβολα, τις ποσότητες ή τις αριθμητικές λέξεις.
- Ο αριθμός αποτελεί μια μαθηματική κατασκευή η οποία, αν και παίρνει το νόημα της από πραγματικές καταστάσεις, αποτελεί μέλος ενός αριθμητικού συνόλου, έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και ένα δίκτυο σχέσεων με τους άλλους αριθμούς.
- οι αριθμοί της πρώτης αρίθμησης, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί (0, 1, 2, 3, 4, …), αποτελούν ένα αριθμητικό σύνολο που στην πορεία συμπληρώνεται με τα επόμενα αριθμητικά συστήματα όπως οι ακέραιοι, οι ρητοί κι οι πραγματικοί αριθμοί.

Αριθμητική μάθηση

- Η πρώτη αριθμητική μάθηση: κατανόηση των αριθμών, αρχικά της πρώτης δεκάδας (και στη συνέχεια των επομένων), τρόπων παράστασής, μελέτη των αριθμητικών σχέσεων.
- Αντίληψη του επαναλαμβανόμενου σχήματος από το οποίο προκύπτει η διαδοχή των αριθμών μετά την πρώτη δεκάδα.
- Η κατανόηση αυτή απαιτεί μια σημαντική εννοιολογική επεξεργασία για να συνδυασθούν όλα τα στοιχεία που συγκροτούν την έννοια του αριθμού.

Διαστάσεις του αριθμού

- Η πιο συνηθισμένη εισαγωγή του αριθμού με την χρήση ποσοτήτων - πληθική σημασία του αριθμού.
- Οι αριθμοί βρίσκονται σε μία διάταξη - τακτική σημασία του αριθμού.
- Οι αριθμοί εμπλέκονται σε σταθερές σχέσεις με τους άλλους αριθμούς της πρώτης δεκάδας που οδηγούν και στις σχέσεις των μεγαλύτερων αριθμών.
- Η προσέγγιση και των τριών αυτών στοιχείων (πληθικότητα, τακτικότητα και σχέσεις) είναι θεμελιακή για την κατανόηση αριθμητικών εννοιών.

Δράσεις με αριθμούς

Με βάση τα στοιχεία αυτά οι αριθμοί εμπλέκονται σε διαφορετικές *αριθμητικές δραστηριότητες*:

- αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων.
- αναγνώριση ποσοτήτων με μια ματιά.
- απαγγελία αριθμητικής ακολουθίας. ένα, δύο, τρία,...
- η απαρίθμηση (ή καταμέτρηση).
- η μέτρηση μεγεθών.

Εικόνα 2. Αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων.

Εικόνα 3. Αναγνώριση ποσοτήτων με μια ματιά.

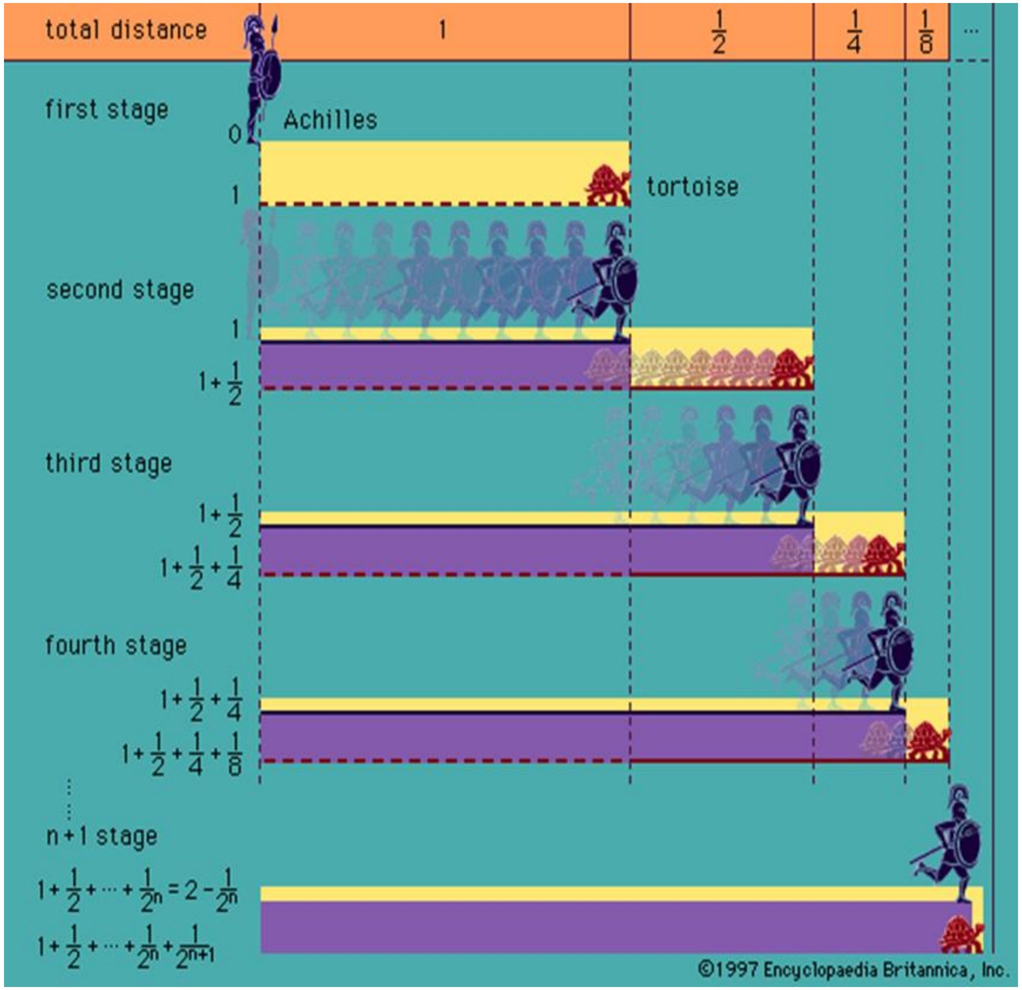
Εικόνα 5. Απαρίθμηση.

Εικόνα 4. Μέτρηση μεγεθών.

Ιστορία των Αριθμών

- Στην πρώτη εμφάνιση τους, οι μικροί αριθμοί προσεγγίζονται με ποιοτικό τρόπο, δηλαδή αντιμετωπίζονται ως ιδιότητες των αντικειμένων και το όνομά τους χρησιμοποιείται ως επίθετο.
- Στο γεγονός αυτό αποδίδονται οι λέξεις οι οποίες υποδηλώνουν ποσότητα με ποιοτικό τρόπο, όπως είναι οι λέξεις ζευγάρι, δίδυμοι, ντουέτο κλπ. που διατηρούνται ακόμα στις διάφορες γλώσσες.

Συστήματα αρίθμησης – εξέλιξη (1)

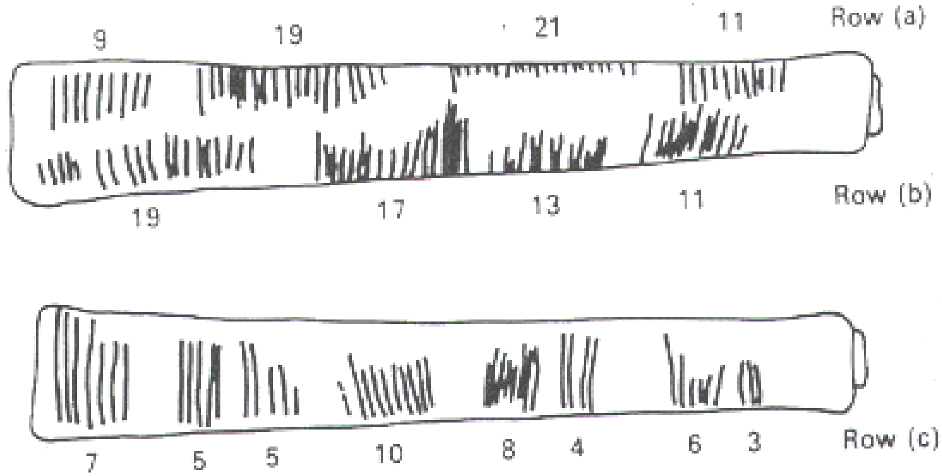


Εικόνα 6. Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας.

- Πρώτα ευρήματα από το 30.000 π.Χ.
- Τον 15ο αιώνα π.Χ. οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι εμφανίζουν γραπτούς αριθμούς και πράξεις.
- Το 300-200 π.Χ. οι αρχαίοι Έλληνες μελετούν τους άρρητους αριθμούς και αναπτύσσουν ιδέες για την έννοια του απείρου και των ορίων. (Ζήνων ο Ελεύς, 5ος αιώνα π.Χ. το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας)
- Τον 7ο – 8ο αιώνα ο αριθμός παίρνει μαθηματική μορφή από τους Ινδούς και τους Άραβες.
- Τον 18ο αιώνα συγκροτείται μαθηματική θεωρία που ολοκληρώνεται τον 19ο –20 ο αιώνα.

Συστήματα αρίθμησης - εξέλιξη (2)

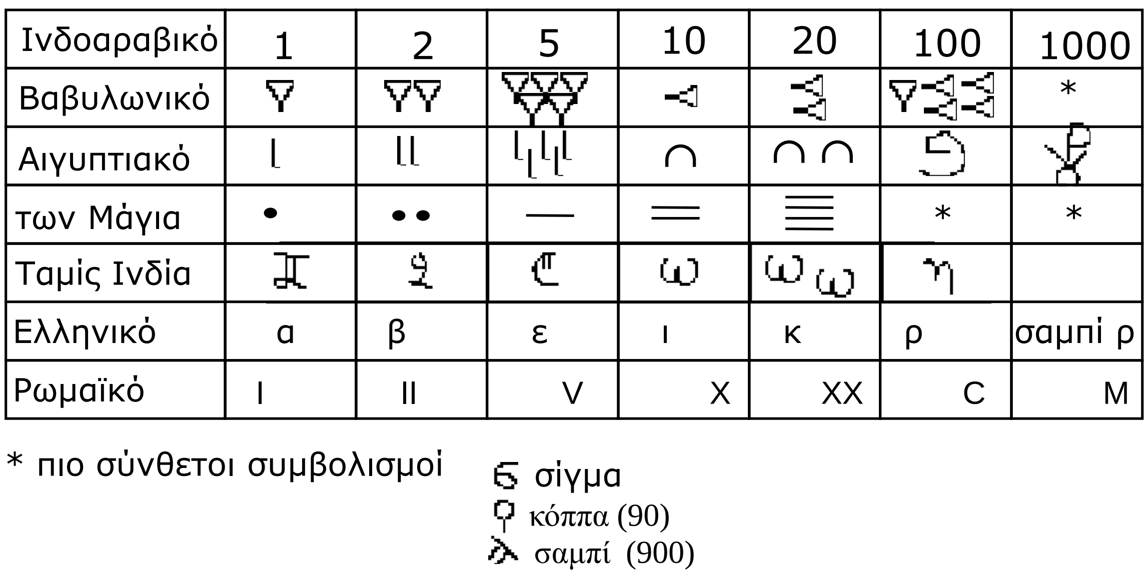
- Σύστημα αρίθμησης ονομάζεται ένα σύνολο, συμβόλων, κανόνων και συμβάσεων, σύμφωνα με το οποίο ονομάζονται και γράφονται οι φυσικοί αριθμοί.
- Τα ευρήματα ξεκινάν από πολύ παλιά. Ο αρχαιολόγος Karl Absolom ανακάλυψε ένα οστό λύκου 30.000 χρόνων με χαράξεις που δείχνουν την τάση των ανθρώπων να μετρούν.
- Αντίστοιχο εύρημα είναι το κόκαλο του Ishango, που ανακαλύφθηκε εκεί το 1960 από 9000 ως 6000 π.Χ.
- Αρχικά οι Αιγύπτιοι (1500 π.Χ.) και αργότερα οι Βαβυλώνιοι και εμφανίζουν γραπτούς αριθμούς και πράξεις.



Εικόνα 7. Κόκαλα Ishango.

Αριθμητικά σύμβολα - εξέλιξη

- Παράλληλα με την εξέλιξη της έννοιας του αριθμού και των πράξεων, το πρόβλημα του συμβολισμού τους ακολουθεί ένα εξίσου μακρύ δρόμο πριν φτάσει στη σημερινή του μορφή.



Εικόνα 8. Αριθμητικά σύμβολα.

Αριθμητικά σύμβολα

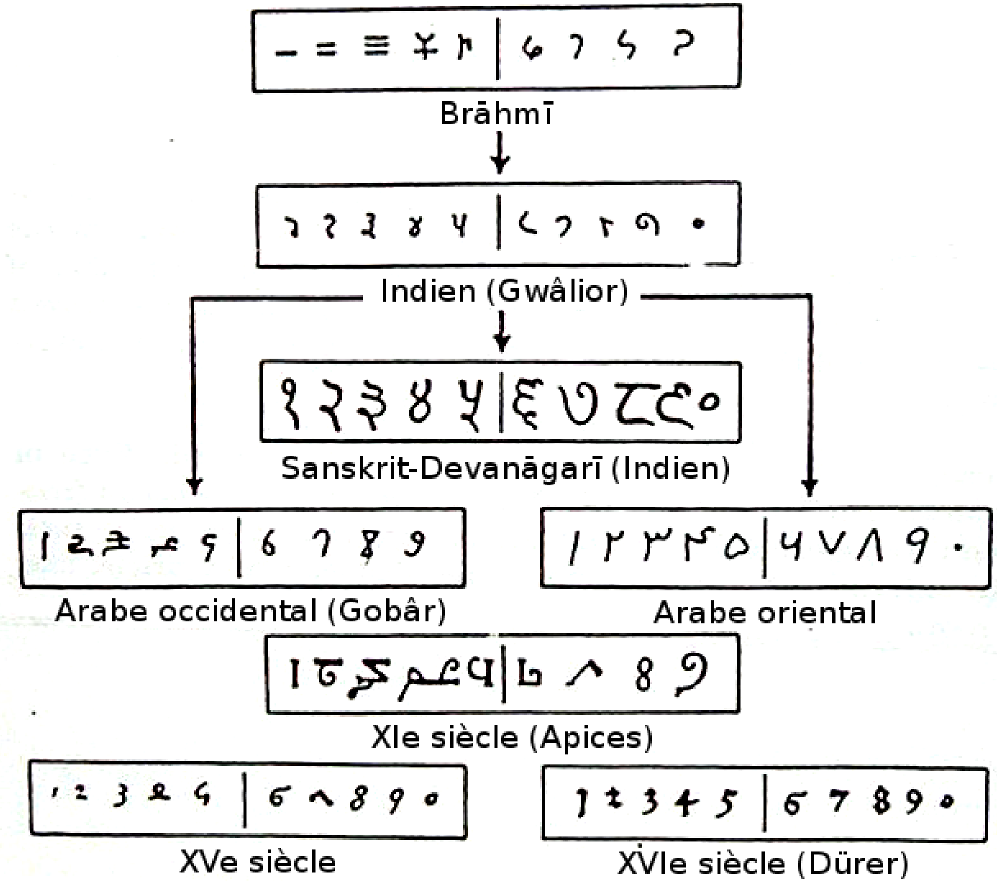
- **Ελληνικό σύστημα.**

,γιγ' ∟''δ''	$3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,[=3013\frac{3}{4}]$				
ἐπὶ ,γιγ' ∟''δ''	$\times\,3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$				
$\overset{\lambda\gamma}{\mathrm{MM}}$,θ,αφψν'	9,000,000	30,000	9,000	1500	750
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ρλε'β' ∟''	30,000	100	30	5	$2\frac{1}{2}$
,θλθ'α' ∟'' ∟''δ''	9,000	30	9	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
,αφ'ε'α' ∟''δ''η''	1,500	5	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
ψν'β' ∟'' ∟''δ''η''ιϛ''	750	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
[ὁμοῦ] $\overset{\lambda\eta}{\mathrm{M}}$,βχπθ'ιϛ''	$[9{,}041{,}250 + 30{,}137\frac{1}{2} + 9{,}041\frac{1}{4} + 1506 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 753 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}] = 9{,}082{,}689\frac{1}{16}$.				

Εικόνα 9. Αριστερά, το αρχαίο ελληνικό σύστημα από το χειρόγραφο του Ευτόχιου. Δεξιά το σύγχρονο σύστημα με ψηφία.

Συστήματα αρίθμησης

- Ο πίνακας δείχνει την εξέλιξη των συστημάτων γραφής.



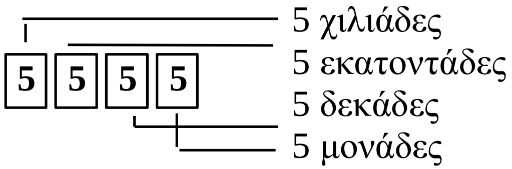
Εικόνα 10. Εξέλιξη των συστημάτων γραφής.

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (1)

- Το τελικό σύστημα αρίθμησης αλλά και γραφής που επικρατεί είναι το Ινδο-Αραβικό δεκαδικό σύστημα και στηρίζεται σε δύο κανόνες:

Α. Στη δημιουργία μονάδων διαφορετικής τάξης όπου η κάθε μια είναι δεκαπλάσια της προηγούμενης : 1, 10, 100, 1000,…

Β. Στη θεσιακή αξία των ψηφίων, ανάλογα με την τάξη μονάδας που εκφράζει. Έτσι κάθε ψηφίο δεν έχει μόνο μία αξία, αλλά μια απειρία αξιών ανάλογα με τη θέση που βρίσκεται:



Εικόνα 11. Θεσιακή αξία ψηφίων.

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (2)

- Το σύστημα αυτό επιτρέπει να παραστήσουμε μια απειρία αριθμών με 10 σύμβολα (τα ψηφία από 0 ως 9).
- Επιτρέπει επίσης να παραστήσουμε έναν αριθμό ως άθροισμα δυνάμεων του 10:

  $4539 = 4.10^3+5.10^2+3.10^1+9.10^0$
- Επιτρέπει τέλος την εφαρμογή της δομής του συστήματος σε άλλη βάση: δυαδικό σύστημα, πενταδικό, κλπ.
- Παράδειγμα: Ο αριθμός 10 στο δεκαδικό, στο δυαδικό 1010

  στο τριαδικό 101, στο τετραδικό 22, στο πενταδικό 20.

Φυσικοί Αριθμοί

- Οι φυσικοί αριθμοί ακολουθούν την ιστορία της εξέλιξης των συστημάτων αρίθμησης και μέτρησης, αλλά παίρνουν τη μαθηματική τους υπόσταση και θεμελιώνονται με τη χρήση της θεωρίας συνόλων τον $19^{ο}$ αιώνα από το ρώσο μαθηματικός G. Cantor, με τις έννοιες των αντιστοιχιών:
  - δύο σύνολα είναι ισοδύναμα όταν έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (πληθικός αριθμός),
  - με βάση τους πληθικούς αριθμούς ορίζει το σύνολο N.
- Μεταγενέστεροι μαθηματικοί (1888) όπως ο R. Dedekind και αργότερα ο G. Peano στηρίζουν μια προσέγγιση που στηρίζεται στη λογική του ν+1, δηλαδή από κάθε φυσικό αριθμό ν παίρνω τον επόμενο ν+1 προσθέτοντας 1 μονάδα.

Οι απειρίες του Cantor (1)

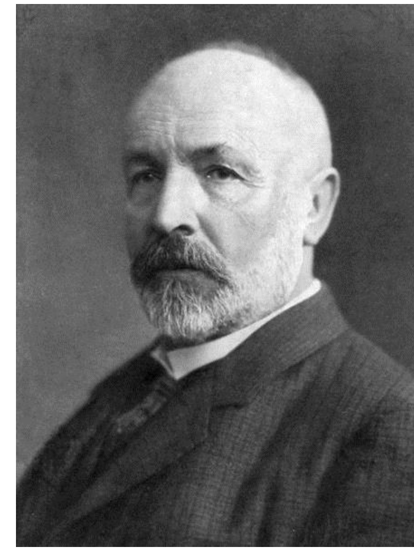
- Ο Cantor μελέτησε τα απειροσύνολα και τους «βαθμούς» απειρίας, με βάση τη μέτρηση που αποτελεί μια αντιστοίχιση.
- Μέχρι τον Cantor, η απειρία ήταν μόνο μία: ∞. Ο Cantor όμως έβαλε τα παρακάτω ερωτήματα: *Μπορούν να αντιστοιχηθούν δηλαδή να έχουν το "ίδιο" πλήθος στοιχείων τα σύνολα των φυσικών και των διπλάσιών τους;*

{ 1, 2, 3, 4, … , ν, ν+1, … }

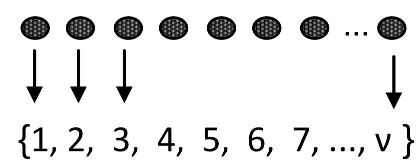
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

{ 2, 4, 6, 8, … , 2ν, 2(ν+1), … }

- Ο Cantor απάντησε ότι τα σύνολα αυτά είναι ισοδύναμα, τα ονόμασε αριθμήσιμα σύνολα, και παράστησε το πλήθος τους με το εβραϊκό γράμμα με το όνομα **άλεφ**. (**À**).



Εικόνα 12. Cantor.



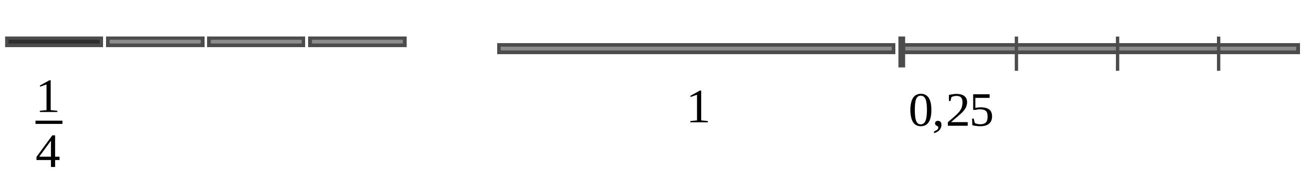
Εικόνα 13. Αριθμήσιμα σύνολα.

Οι απειρίες του Cantor (2)

- Υποστήριξε ότι υπάρχουν σύνολα (μη αριθμήσιμα) με απειρία μεγαλύτερη από αυτή του $\aleph_0$ και έτσι και το άλεφ τους είναι μεγαλύτερης τάξης: για παράδειγμα, οι ρητοί αριθμοί ή οι πραγματικοί αριθμοί ή το σύνολο των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Η θεωρία συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε αρχικά με δυσπιστία κι επιθετικότητα από την πλειονότητα των μαθηματικών της εποχής για την ισχύ και το βάρος των αποτελεσμάτων της, μεταγενέστερα όμως έγινε θριαμβευτικά αποδεκτή και επεκτάθηκε σε πολλές εφαρμογές και άνοιξε το δρόμο για νέες μαθηματικές ανακαλύψεις.

Άλλα σύνολα αριθμών (1)

- Πολύμορφες ανάγκες της καθημερινής ζωής αλλά και της επιστημονικής αναζήτησης οδήγησαν στην ανάπτυξη και άλλων αριθμητικών συνόλων.
- Αρχικά η υποδιαίρεση των μονάδων για τις ανάγκες της μέτρησης οδηγεί στην ανάπτυξη των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών.



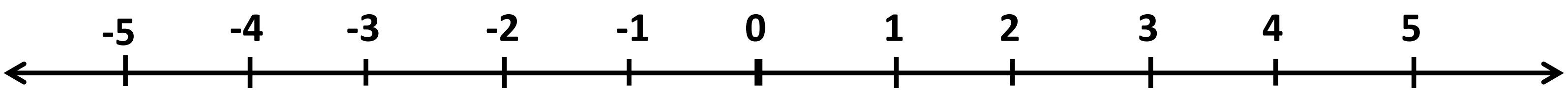
Εικόνα 14. Κλασματικοί και δεκαδικοί αριθμοί.

- Όμοια οι πράξεις και οι κατευθύνσεις οδηγούν στην ανάπτυξη των αρνητικών αριθμών.

Εικόνα 15. Αρνητικοί αριθμοί.

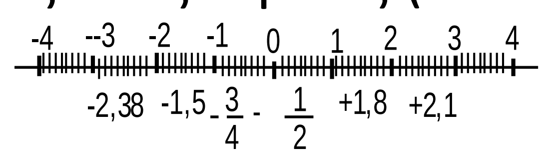
Άλλα σύνολα αριθμών (2)

- Αν τους αριθμούς τους παραστήσουμε πάνω σε μια ευθεία όπου έχουμε τοποθετήσει δύο σημεία, τότε με βάση το διάστημα αυτό χωρίζουμε σε ίσα διαστήματα, προς τα δεξιά και τοποθετούμε τους Φυσικούς Αριθμούς.
- Επεκτείνουμε τα διαστήματα αυτά και προς τα αριστερά και συμμετρικά ως προς το 0 τοποθετούμε τους αρνητικούς. Έτσι έχουμε παραστήσει το σύνολο των Ακεραίων:



Εικόνα 16. Σύνολο Ακεραίων.

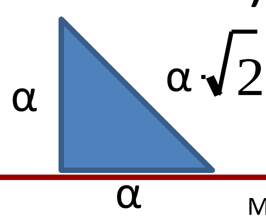
- Χωρίζοντας τα διαστήματα σε υποδιαιρέσεις τοποθετούμε ανάμεσα στους ακέραιους αριθμούς τους Ρητούς (σε κλασματική ή δεκαδική μορφή).



Εικόνα 17. Σύνολο Ρητών.

Άλλα σύνολα αριθμών (3)

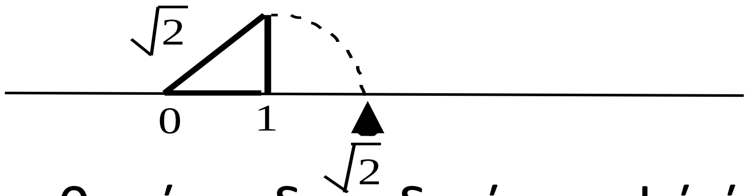
- Όλοι οι Ρητοί αριθμοί έχουν μια θέση πάνω στην ευθεία των αριθμών.
- Από τον 5ο – 6ο αιώνα π.Χ. οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι εκτός από τους ρητούς υπάρχουν και άλλοι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, για αυτό τους αποκαλούσαν Άρρητους.
- Αφορμή έδωσε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:
- Σε ένα τρίγωνο ισοσκελές και ορθογώνιο πλευράς α, η υποτείνουσα δεν μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιασμό του α με ένα ρητό αριθμό: (υποτείνουσα)^2=α^2+α^2= 2α^2 άρα υποτείνουσα =$α\cdot\sqrt{2}$.



Εικόνα 18. Ισοσκελές τρίγωνο.

Διάκριση Ρητών - Άρρητων

- Στην ευθεία των αριθμών υπήρχαν θέσεις για τους άρρητους:



Εικόνα 19. Θέση άρρητου αριθμού.

- Όλοι οι ρητοί αριθμοί σε δεκαδική μορφή έχουν ορισμένα δεκαδικά ψηφία, ή άπειρα αλλά περιοδικώς επαναλαμβανόμενα

  π.χ. 2,15 ή 7, 6728 ή 3, 333... ή 10, 121212...

- Αντίθετα οι Άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία (γεγονός που εξηγεί και το όνομά τους): Άρρητοι, δηλαδή αριθμοί που δεν μπορούν να εκφραστούν με ακρίβεια, γιατί αποτελούνται από άπειρα ψηφία.

Ο αριθμός π

- Διάσημος άρρητος: ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου.
- Ορισμένα από τα άπειρα δεκαδικά ψηφία του:

  π =3.14159265358979323846264338327950288419716...

- Μέχρι το 1844 είχαν εντοπισθεί 200 ψηφία. Από τότε και μέχρι το 1959 είχαν εντοπισθεί 1000 ψηφία, που σήμερα ξεπερνούν το ένα δισεκατομμύριο.
- Palais de la Decouverte, στο Παρίσι:

  η αίθουσα του π, θόλος με 700

  πρώτα ψηφία του π.

Εικόνα 20.
Αίθουσα π.

Σύνολα αριθμών

Οι Φυσικοί αριθμοί **N** επεκτείνονται με τους

- Ακέραιους αριθμούς **Z**: ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
- Ρητούς αριθμούς **Q**: τα κλάσματα της μορφής, μ/ν όπου μ και ν ακέραιοι, ν≠0.

  Οι Ρητοί αριθμοί αποδίδονται σε δεκαδική μορφή: 0,127 ή 3,75.

- Άρρητοι αριθμοί **A**: όλοι οι μη ρητοί

  Οι Άρρητοί αριθμοί αποδίδονται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά.

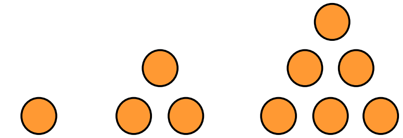
- Πραγματικοί αριθμοί **R**: οι ρητοί και οι άρρητοι

  (υπάρχουν και άλλα σύνολα αριθμών).

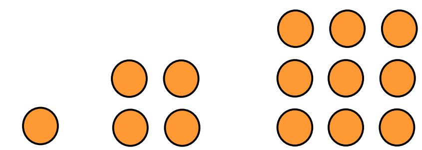
Χαρακτηριστικοί Αριθμοί

Ανάμεσα στις πιο χαρακτηριστικές διαδοχές αριθμών είναι οι πολυγωνικοί αριθμοί:

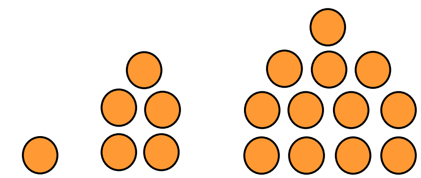
- Οι *τριγωνικοί αριθμοί* : 1, 3, 6, 10, ...
- Οι *τετραγωνικοί αριθμοί* **:** 1, 4, 9, 16, ...
- Οι *πενταγωνικοί αριθμοί* : 1, 5, 12, 22, ...
- Η ακολουθία του Fibonacci (μαθηματικός του 12ου αιώνα): ο κάθε όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,....
- Την ακολουθούν πολλά φυσικά φαινόμενα: ο αριθμός των φύλλων στο κοτσάνι ενός δένδρου, το σπιράλ στο σαλιγκάρι,κλπ.



Εικόνα 21. Σχηματισμός τριγώνων.



Εικόνα 22. Σχηματισμός τετραγώνων.



Εικόνα 23. Σχηματισμός πενταγώνων.

1/1	=	1
2/1	=	2
3/2	=	1.5
5/3	=	1.666666666
8/5	=	1.6
13/8	=	1.625
21/13	=	1.615384615
34/21	=	1.619047619
55/34	=	1.617647059
89/55	=	1.618181818

Εικόνα 24. Το πηλίκο δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci τείνει στην χρυσή τομή.

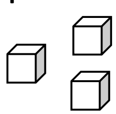
Διδακτικές κατευθύνσεις

- Η έννοια του αριθμού εμφανίστηκε πολύ νωρίς στην ιστορία της ανθρωπότητας και εισάγεται νωρίς στα παιδιά.
- Ωστόσο για την εισαγωγή αυτή, διδακτικά, δεν είναι αρκετό να επιδιώκουμε να μάθουν τα παιδιά να «μετρούν».
- Επιδιώκουμε να αντιληφθούν τα παιδιά την έννοια του αριθμού, τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε, όπως και τις σχέσεις που τους συνδέουν.
- Τα παιδιά συνδέουν τους αριθμούς με την ποσότητα και αποδίδουν το νόημα αυτό με αυθαίρετες και στη συνέχεια συμβατικές μορφές συμβόλων.

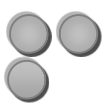
Παραστάσεις αριθμών

- Οι παραστάσεις αυτές βοηθούν τα παιδιά να αποκτήσουν ισχυρές αναπαραστάσεις για τους αριθμούς και τις μεταξύ τους σχέσεις.
- Ο συμβολισμός τους με τα συμβατικά σύμβολα και η τοποθέτηση πάνω στην αριθμητική ευθεία βοηθάει τα παιδιά να οικοδομήσουν τις αριθμητικές έννοιες, να σταθεροποιήσουν τις μεταξύ τους σχέσεις και να τις διατάξουν.

Εικόνα 25. Τριάδα.

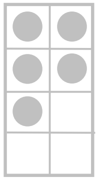


Εικόνα 26. Τριάδα.

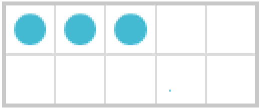


Εικόνα 27. Δυάδα.

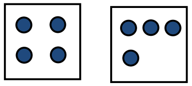
Εικόνα 28. Πεντάδα.



Εικόνα 29. Τριάδα.

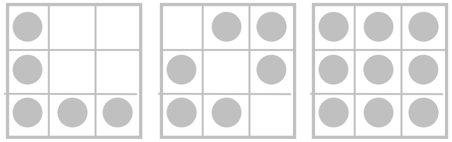


Εικόνα 30. Τετράδα.

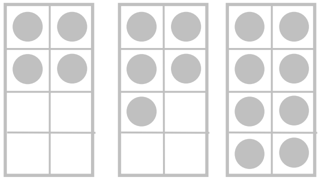


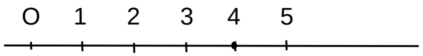
Εικόνα 31. Αριθμοκάρτες.

Εικόνα 32. Σχηματισμοί.



Εικόνα 33. Σχηματισμοί.





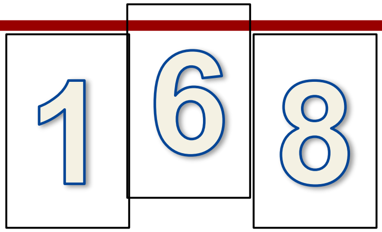
Εικόνα 34. Αριθμογραμμή.

Περιεχόμενο πρώτης αρίθμησης

- Άμεση αναγνώριση ποσοτήτων μέχρι 10 στοιχείων με τη χρήση υλικού και αναπαραστατικών μέσων. Σύνδεση με αριθμούς, σύμβολα και λέξεις.
- Μέτρηση ως το 10 και μέτρηση με βήματα εμπρός και πίσω (ανά 2, 3), πιθανή μέτρηση μέχρι το 20. Σύνδεση της μέτρησης με την ποσότητα και την πληθικότητα. Ανάπτυξη πρώτων στρατηγικών μέτρησης.
- Διάταξη ποσοτήτων και αριθμών, παράσταση στην αριθμογραμμή.
- Σταθερές σχέσεις αριθμών της πρώτης δεκάδας.

Δραστηριότητες (1)

- **Γνωρίζω τους αριθμούς**: Τα παιδιά παίζουν ψάχνοντας τις αριθμοκάρτες με τους αριθμούς από το 1 ως το 9. Ο/η εκπαιδευτικός φωνάζει έναν αριθμό και τα παιδιά ψάχνουν να βρουν την σχετική κάρτα.

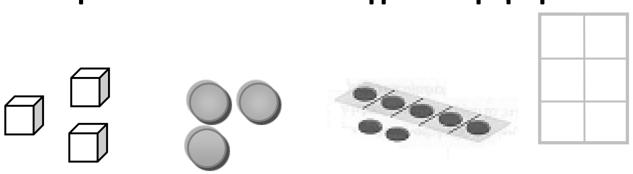


Εικόνα 35. Αριθμητικά σύμβολα.

- **Ξέρω πόσα είναι χωρίς να μετρήσω**: Σκορπισμένες στο πάτωμα βρίσκονται κάρτες με σχηματισμούς από 0-5 και τα παιδιά με το σύνθημα και σε χρόνο περιορισμένο βρίσκουν όσες περισσότερες κάρτες μπορούν.

Εικόνα 36. Αριθμητικές ποσότητες.

- **Φτιάχνω πολλά σχήματα**: Ο/η εκπαιδευτικός λέει ένα αριθμό και τα παιδιά πρέπει με υλικά να δημιουργήσουν πιθανούς σχηματισμούς.



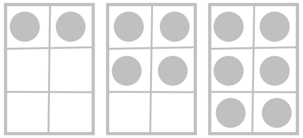
Εικόνα 38. Ανάπτυξη σχηματισμών.

- **Πόσο ξέρεις να μετράς**: Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η κάθε ομάδα αρχίζει να μετράει 1,2,… Κερδίζει η ομάδα που τα παιδιά φτάνουν σε μεγαλύτερους αριθμούς χωρίς λάθη.

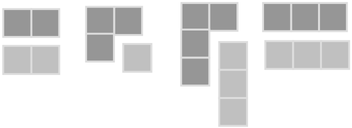
Εικόνα 37. Αρχικές μετρήσεις.

Δραστηριότητες (2)

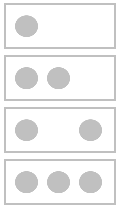
- **Βάζω στη σειρά τις κάρτες:** Τα παιδιά έχουν μια στοίβα κάρτες με σχηματισμούς από 0-10, αλλά κάθε μία διαφορετική και δοκιμάζουν να βάλουν τις κάρτες στη σειρά.
- **Βάζω στη σειρά τους αριθμούς:** Τα παιδιά έχουν μια στοίβα με αριθμοκάρτες και δοκιμάζουν να βάλουν τις κάρτες στη σειρά.
- **Βάζω τους αριθμούς σε μια γραμμή:** Τα παιδιά έχουν μια στοίβα αριθμοκάρτες από 0-10 και μια αριθμητική γραμμή και δοκιμάζουν να βάλουν τις κάρτες στη γραμμή.
- **Ποια ταιριάζουν;** Ο εκπαιδευτικός κληρώνει ένα αριθμό (λεκτικό ή συμβολικό) και με το σύνθημα και σε χρόνο περιορισμένο τα παιδιά βρίσκουν όσες περισσότερες κάρτες μπορούν που αθροίζουν τον αριθμό αυτό.
- **Πόσα ακόμα χρειάζονται;** Τα παιδιά έχουν στα χέρια τους μια ποσότητα με υλικό και πρέπει να βρουν πόσα χρειάζεται να συμπληρώσουν για ένα αριθμό.



Εικόνα 39. Δραστηριότητα διάταξης.



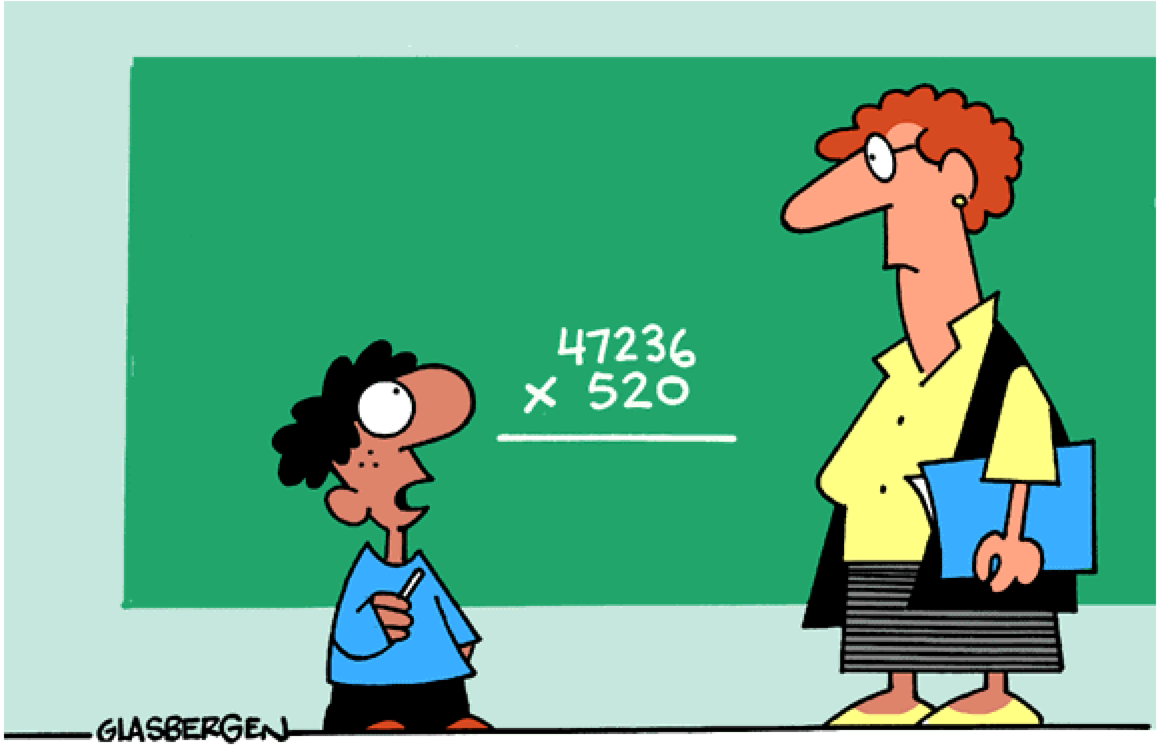
Εικόνα 40. Συνδυασμοί.



Εικόνα 41. Ποσότητες.

Πράξεις

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



"Δεν υπάρχουν ήδη αρκετά προβλήματα στον κόσμο;"

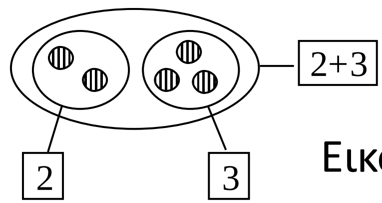
Εικόνα 42. Cartoon.

Σημασία εισαγωγής στις πράξεις

- Στοιχείο της πρώτης αρίθμησης είναι και οι πράξεις των αριθμών.
- Μεγάλος αριθμός καθημερινών συναλλαγών ή υπολογισμών περιλαμβάνουν πράξεις με αριθμούς.
- Τα παιδιά ολοκληρώνουν το νόημα των αριθμών με την κατανόηση του νοήματος των πράξεων.

Νόημα Πρόσθεσης – Αφαίρεσης (1)

- Η πράξη της πρόσθεσης δεν αποτελεί απλά την ένωση δύο συνόλων: δηλαδή το πλήθος της ένωσης του Α με το Β είναι το πλήθος του Α και το πλήθος του Β.



Εικόνα 43. Ένωση δύο συνόλων.

- Την άποψη αυτή αποκτούμε όταν βλέπουμε την πρόσθεση ως ένωση συνόλων αντικειμένων.
- Η έννοια της πράξης όμως είναι μια έννοια ευρύτερη:

Α, Β σύνολα αντικειμένων ⟶ ένωση AUB

α, β πληθικοί αριθμοί ⟶ άθροισμα α+β

(α, β) αριθμοί ⟶ εσωτερική πράξη γ

Εικόνα 44. Δημιουργία αντιστοιχίας στα αριθμητικά σύνολα.

Νόημα Πρόσθεσης – Αφαίρεσης (2)

- Μία διμελής πράξη αριθμών είναι μια αντιστοιχία η οποία σε κάθε ζεύγος αριθμών (α,β) αντιστοιχεί ένα μοναδικό αριθμό, γ:

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \gamma$$

- Ως πρόσθεση των φυσικών αριθμών α και β ορίζεται μια διμελής πράξη η οποία στο ζεύγος (α,β) του NxN αντιστοιχεί το μοναδικό αριθμό γ του N (το άθροισμά τους):

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \alpha+\beta=\gamma$$

Σχέσεις αριθμών (1)

- Η πρόσθεση των φυσικών αριθμών είναι μια εσωτερική πράξη μέσα στο σύνολο **N** που είναι ένα σύνολο κλειστό ως προς την πρόσθεση.
- Ένα σύνολο ονομάζεται κλειστό ως προς μία πράξη όταν το αποτέλεσμα της πράξης είναι επίσης στοιχείο του συνόλου.

Η πρόσθεση των φυσικών αριθμών έχεις ιδιότητες:

- Αντιμεταθετική**:** α+β=β+α,
- Προσεταιριστική: α+(β+γ)=(α+β)+γ, και
- Έχει ουδέτερο στοιχείο το 0: α+0=0+α=α

Σχέσεις αριθμών (2)

- Από τον ορισμό της πρόσθεσης προκύπτει και η αφαίρεση, για την οποία το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι κλειστό (δηλαδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς, η διαφορά α-β δεν είναι πάντα φυσικός αριθμός).
- Ορίζουμε όμως το εξής:

  Αν α και β είναι δύο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει α + β = γ τότε ορίζονται οι διαφορές γ – β ή γ - α:

  Αν α + β = γ τότε α = γ - β ή β = γ - α.

Νόημα Πρόσθεσης – Αφαίρεσης (3)

- Υπάρχουν τρία στοιχεία που εντοπίζονται στην ανάπτυξη γνώσης για την πρόσθεση και την αφαίρεση:

1) οι σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας που αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη κάθε πρόσθεσης και με μεγαλύτερους αριθμούς,
2) οι πράξεις με αριθμούς μετά την πρώτη δεκάδα, και
3) το πλαίσιο - πρόβλημα μέσα στην οποία η πράξη αυτή εμφανίζεται.

Νόημα Πρόσθεσης – Αφαίρεσης (4)

- Σταθερές σχέσεις στην πρώτη δεκάδα ονομάζονται όλοι οι συνδυασμοί που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των αριθμών ως το 10.
- Πχ. το 4 είναι 1+3, 2+2 και επίσης 3+1, δηλαδή υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς της πρώτης δεκάδας.
- Όμοια, το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζονται τα προβλήματα παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς τον τρόπο με τον οποίο γίνεται κατανοητό στα παιδιά.
- Τρεις μεγάλες κατηγορίες: ενώνω/ συνδυάζω, αλλάζω/ μετασχηματίζω, συγκρίνω.

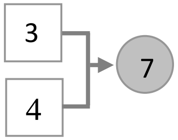
Προσθετικές καταστάσεις

Οι διαφορετικές αυτές μορφές προβλημάτων ονομάζονται προσθετικές καταστάσεις και περιλαμβάνουν πρόσθεση και αφαίρεση.

- **Ενώνω/ συνδυάζω ποσότητες**

  Πάνω στο τραπέζι βρίσκονται τα 3 μολύβια του Ανδρέα και τα 4 του Πέτρου.
  Πόσα είναι όλα μαζί τα μολύβια;

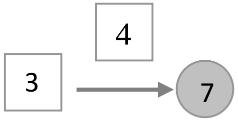
Εικόνα 45. Ένωση ποσοτήτων.



- **Αλλάζω/μετασχηματίζω ποσότητες**

  Ο Ανδρέας είχε 3 μολύβια και η μαμά του αγόρασε κι άλλα 4. Πόσα έχει τώρα;

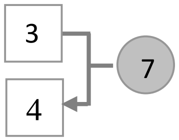
Εικόνα 46. Μετασχηματισμός ποσοτήτων.



- **Συγκρίνω ποσότητες**

  Ο Ανδρέας έχει 3 μολύβια.
  Ο Πέτρος έχει 4 περισσότερα.
  Πόσα μολύβια έχει ο Πέτρος;

Εικόνα 47. Σύγκριση ποσοτήτων.

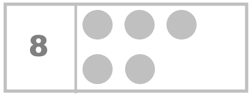


Διδακτικές εφαρμογές (1)

- Η πρόσθεση δεν είναι μέτρηση «τα βάζω όλα μαζί και τα μετρώ».
- Είναι μια πράξη σύνθεσης που προκύπτει από διαφορετικές καταστάσεις.
- Για το λόγο αυτό προτείνονται στα παιδιά καταστάσεις υπολογισμού του αποτελέσματος σύνθεσης, χωρίς μέτρηση.
- Προτείνονται επίσης διαφορετικές προσθετικές καταστάσεις.

Δραστηριότητες (3)

- **Βάζω μαζί ή βάζω κι άλλο:** Τα παιδιά σε ομάδες έχουν ένα σύνολο από υλικά. Ο/η εκπαιδευτικός δείχνει ένα αριθμό και οι ομάδες δοκιμάζουν να ενώσουν τα υλικά για να έχουν μια ποσότητα ίση με αυτόν. Εναλλακτικά σε κάρτες.



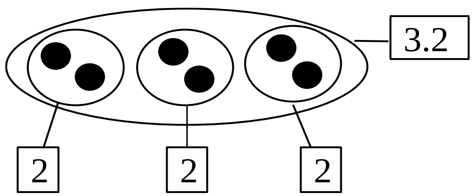
Εικόνα 48. Δραστηριότητα «Βάζω μαζί ή βάζω κι άλλο».

- **Στοιχήματα:** Τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια. Κάθε παιδί έχει 5, 6 7 ή 8 ή 10 σπίρτα. Το ένα παιδί χωρίζει την ποσότητα, παρουσιάζει το ένα χέρι με τη μια ποσότητα και κρύβει το άλλο την υπόλοιπη. Πόσα σπίρτα είναι κρυμμένα; (όμοια κρύβει με ένα τρόπο, σκεπάζει ή βάζει κάτω από ένα δοχείο).
- **Ποιος έχει πιο πολλά;** Τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια και έχουν μια στοίβα από κάρτες. Σε κάθε γύρο το ένα παιδί δείχνει δύο κάρτες στο άλλο που κάνει επίσης το ίδιο. Κερδίζει το παιδί με το μεγαλύτερο άθροισμα κερδίζει.


Εικόνα 49. Δραστηριότητα «Ποιος έχει πιο πολλά;».

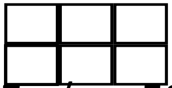
Νόημα Πολ/σμού – Διαίρεσης (1)

- Η κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων συνδέεται στενά με την ανάπτυξη του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού που αφορά τόσο τον πολλαπλασιασμό όσο και τη διαίρεση.
- Ο πολλαπλασιασμός γίνεται αντιληπτός ως πράξη σύνθεσης ανάμεσα σε σύνολα ή επαναλαμβανόμενη πρόσθεση:
- Μια άλλη μορφή αποτελεί η συμμεταβολή ποσοτήτων, όπως και η δημιουργία τρίτου μεγέθους:



Εικόνα 50. Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

Εικόνα 51. Συμμεταβολή ποσοτήτων



2.3=3.2

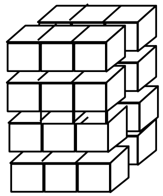
Εικόνα 52. Δημιουργία νέου μεγέθους

Σχέσεις αριθμών (3)

- Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται ως μία εσωτερική πράξη του συνόλου των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι κλειστό ως τον πολλαπλασιασμό.
- Σε κάθε ζεύγος (α,β) του NxN αντιστοιχεί το μοναδικό αριθμό γ (το γινόμενο τους): (α,β) → α.β =γ
- Έχει τις ιδιότητες:
  - Αντιμεταθετική: α.β=β.α ,
  - Προσεταιριστική α.(β.γ)=(α.β).γ και
  - Επιμεριστική α.(β+γ) = α.β+α.γ

  Με ουδέτερο στοιχείο το 1 όπου 1.α =α.1=α

  και το 0 απορροφητικό α.0=0.α=0.



Εικόνα 53. Προσεταιριστική ιδιότητα.

Σχέσεις αριθμών (4)

- Η διαίρεση δεν είναι μια πράξη που είναι πάντα δυνατή στο Ν αλλά ισχύει με ορισμένες προϋποθέσεις.
- Αν α και β είναι δύο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει α=β.γ ή β=α.γ τότε ορίζεται το γ ως το πηλίκο της διαίρεσης του γ=α:β ή του γ=β:α.
- Όπως και η αφαίρεση, η διαίρεση δεν είναι αντιμεταθετική πράξη**:** α:β ≠ β:α.
- Η διαίρεση με το 0 παρουσιάζει ορισμένες ιδιαιτερότητες: 0:α=0 γιατί 0=0.α αλλά το πηλίκο α:0 όπως και 0:0 δεν ορίζονται.

Νόημα Πολ/σμού – Διαίρεσης (2)

- Η ανθρωπότητα επιδιώκει να σταθεροποιήσει ποιοι αριθμοί είναι δυνατό να διαιρεθούν όπως και να συμπεράνει τι συμβαίνει όταν δε διαιρούνται ακριβώς.
- Οι ιδιαιτερότητες της διαίρεσης οδηγούν σε δύο βασικά θέματα:

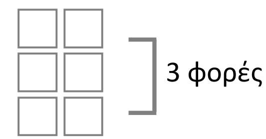
I. Τους κανόνες διαιρετότητας.

II. Την Ευκλείδεια διαίρεση.

Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

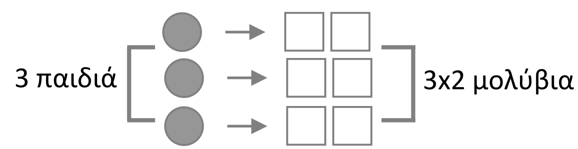
Οι διαφορετικές αυτές μορφές προβλημάτων ονομάζονται πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

- Επανάληψη μιας ποσότητας (ένας μέγεθος)
  Ο Ανδρέας έχει 2 μολύβια.
  Ο Πέτρος έχει 3 φορές περισσότερα.
  Πόσα έχει ο Πέτρος;



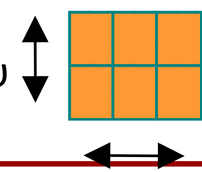
Εικόνα 54. Επανάληψη μιας ποσότητας.

- Αναλογία/συμμεταβολή (δύο μεγέθη)
  Κάθε παιδί έχει 2 μολύβια.
  Πόσα μολύβια έχουν τα 3παιδιά;



Εικόνα 55. Αναλογία μεγεθών.

- Δημιουργία νέου μεγέθους.


Εικόνα 56. Δημιουργία νέου μεγέθους.

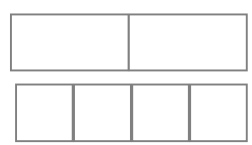
3 μήκος Χ 2 πλάτος= 6 επιφάνεια

Διδακτικές εφαρμογές (2)

- Ο πολλαπλασιασμός όπως και η διαίρεση δεν εισάγονται ως έννοιες στα παιδιά.
- Αναπτύσσονται, όπως και στην πρόσθεση, μια πράξη σύνθεσης ή μια πράξη «μοιρασιάς».
- Εκτός από την προσθετική διάσταση «αυτή η ποσότητα επαναλαμβάνεται τόσες φορές», ενθαρρύνεται η διάσταση «έχω τόσες δυάδες – τριάδες κλπ.» που παραπέμπει σε αυτή τη σύνθεση.
- Επιδιώκουμε να αντιληφθούν τα παιδιά την ανάγκη να εντοπίσουν ένα αποτέλεσμα χωρίς μέτρηση.

Δραστηριότητες (4)

- **Ξέρω πόσα είναι όλα:** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Έχουν μπροστά τους στοίβες με δυάδες (και μετά διαδοχικά τριάδες, τετράδες και πεντάδες. Ο/η εκπαιδευτικός λέει έναν αριθμό, και οι ομάδες βάζουν μαζί τόσες δυάδες όσο ο αριθμός και υπολογίζουν πόσα είναι όλα μαζί.
- **Ξέρω πόσα είναι μέσα:** Μαύρο κουτί: τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Μια αριθμοκάρτα παρουσιάζει πόσα ζεύγη, τριάδες ή τετράδες βρίσκονται μέσα στο μαγικό κιβώτιο. Τα παιδιά προσπαθούν να υπολογίσουν πόσα αντικείμενα είναι στο κουτί, όταν τα μετράνε ένα-ένα.
- **Ξέρω να μοιράζω:** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες στην κάθε ομάδα δίνεται ένα υλικό και τα παιδιά πρέπει να βρουν τρόπους να το μοιράζουν στα 2 (3, 4 κλπ).



Εικόνα 57. Μοιράζω στα 4.

Εικόνα 58. Μοιράζω στα 6.

Αλγόριθμοι των πράξεων (1)

- Οι αριθμητικές πράξεις απασχόλησαν επί αιώνες την ανθρωπότητα που δοκίμαζε διάφορους τρόπους για να επιτύχει την ταχύτερη αντιμετώπισή τους.
- Η τυποποίηση των πράξεων ακολούθησε μια μεγάλη πορεία εξέλιξης.

Αλγόριθμοι των πράξεων (2)

- ***Πολλαπλασιασμός των Αιγυπτίων***

  Οι Αιγύπτιοι ακολουθούσαν τη μέθοδο του διπλασιασμού, για παράδειγμα 28 Χ 35:

  2 70

  4 140

  8 280

  16 560 και από αυτά τα αποτελέσματα

  χρησιμοποίησαν όποια ήταν βολικά

  τα 16 και 4 και 8 δηλαδή 560 +140 +280 = 980

Αλγόριθμοι των πράξεων (3)

- ***Πολλαπλασιασμός των Ρώσων***

  Οι Ρώσοι ακολουθούν μια αντίστοιχη μέθοδο με το δύο αλλά συνδυάζουν διαιρέσεις. Για την ίδια πράξη 28 Χ 35:

28 x 35 = (2x14)x35 = 2x35x14 =70x2x7=140x7=

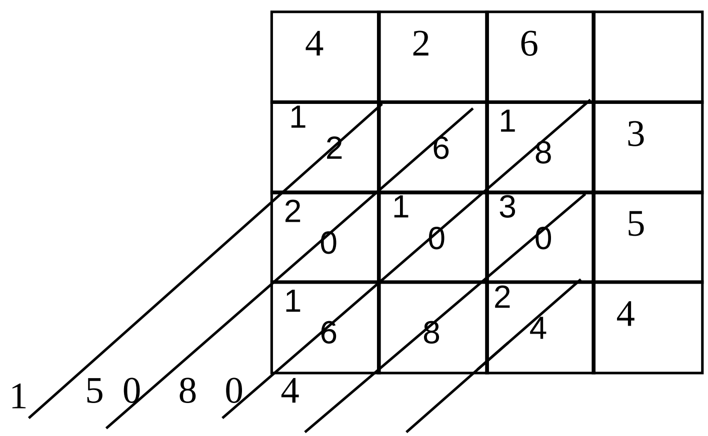
= 140x(2x3+1)=280x3+140 =

= 280x (2+1)+140=560+280+140 = 980

Αλγόριθμοι των πράξεων (4)

- ***Πολλαπλασιασμός των Αράβων***

Οι Άραβες χρησιμοποιούν ένα πίνακα (που θεωρείται και ο πρόδρομος των υπολογιστικών μηχανών). Ας δούμε τον πολλαπλασιασμό 426x354:



Εικόνα 59. Πίνακας Αράβων.

Αλγόριθμοι των πράξεων (5)

- ***Πολλαπλασιασμός των Ελλήνων***

  Αντίστοιχες μορφές πίνακα ακολουθούν και οι Έλληνες για το γινόμενο **426x 354=150804.**

	400	20	6
300	120000	6000	1800
50	20000	1000	300
4	1600	800	24

141.600 + 7080 + 2124 = 150804

Εικόνα 60. Πίνακας Ελλήνων.

- Το βίντεο των Κινέζων.

Αλγόριθμοι των πράξεων (6)

Αν δεν δίναμε στους μαθητές Δημοτικού τον αλγόριθμο;

- Παρακάτω δείχνουμε δύο τρόπους που χρησιμοποίησαν μαθητές για να υπολογίσουν το γινόμενο **35x27= 945** πριν διδαχθούν τον αλγόριθμο. *Οι τρόποι τους είναι πολύ κοντά σε μεθόδους που χρησιμοποίησε η ανθρωπότητα ιστορικά:*
- **1ος τρόπος:**

35 X 10 = 350

35 X 10 = 350 αποτέλεσμα 350+350+245=945

35 X 7 = 245

- **2ος τρόπος**

35+35 →70+70→140+140→280+280→560+280→840+105

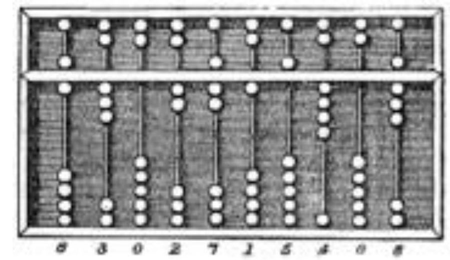
2 φορές 4 φορές 8 φορές 16 φορές +8 φορές +3 φορές

σύνολο 24 φορές +3 φορές

Αλγόριθμοι των πράξεων (7)

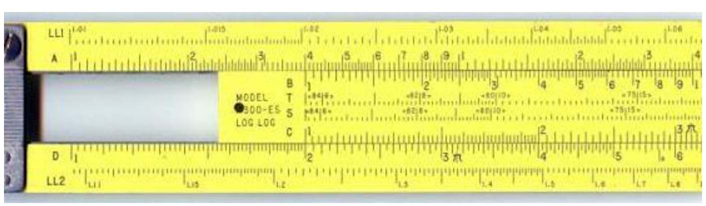
- Οι πρώτες υπολογιστικές μηχανές των ανθρώπων ήταν τα δάκτυλα.
- Στην προσπάθειά του να βοηθηθεί ο άνθρωπος αναζητά τις κατάλληλες μηχανές όπως ο άβακας.
- Ο μηχανισμός των Αντικηθύρων, όπως και ο αστρολάβος θεωρούνται οι πρώτοι υπολογιστές της ανθρωπότητας για αστρονομικές αναζητήσεις.
- O J. Napier κατασκεύασε βοηθήματα αξιοποιώντας θεωρητικά εργαλεία και μετατρέποντας τον πολ/σμό και διαίρεση σε πρόσθεση και αφαίρεση που αξιοποιήθηκαν στη συνέχεια.

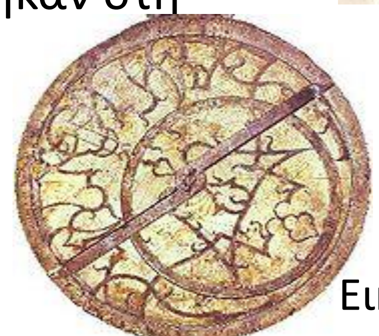
Εικόνα 61. Άβακας



Εικόνα 62. Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων

Εικόνα 63. Κανόνας.



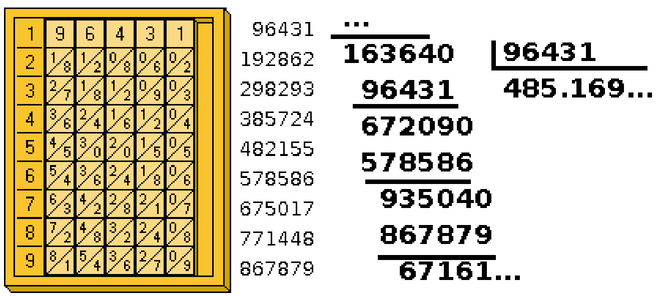


Εικόνα 64. Αστρολάβος

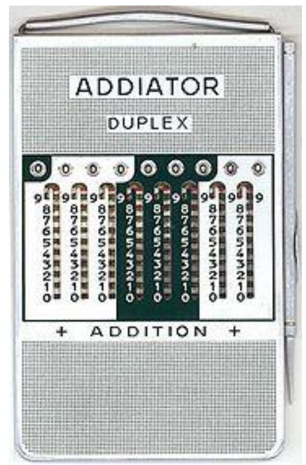
Υπολογιστικές μηχανές

Οι υπολογιστικές μηχανές δεν ήταν όπως τις ξέρουμε!

Εικόνα 65. Napier's bones



Εικόνα 66. Addiator



Εικόνα 67. Gosremprom

Εικόνα 68. Μηχανική υπολογιστική μηχανή.

Εικόνα 69. Calculator FACIT

Εικόνα 70. Comptometer

Ερωτήσεις

1. Ποια η σημασία εισαγωγής στην αρίθμηση;
2. Τι επιδιώκει η πρώτη αριθμητική μάθηση;
3. Σε ποιες διαφορετικές δραστηριότητες χρησιμοποιούνται οι αριθμοί;
4. Ποιοι είναι οι δύο βασικοί κανόνες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης;
5. Ποια είναι τα 5 βασικά σύνολα αριθμών;
6. Ποιο είναι το διδακτικό περιεχόμενο της πρώτης αριθμητικής μάθησης;
7. Τι ορίζεται ως πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών αριθμών;
8. Ποιες είναι οι ιδιότητες πρόσθεσης φυσικών αριθμών;
9. Ποια είναι τα διαφορετικά είδη προσθετικών καταστάσεων;
10. Τι ορίζεται ως πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών;
11. Ποιες είναι οι ιδιότητες πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών;
12. Ποια είναι τα διαφορετικά είδη πολλαπλασιαστικών καταστάσεων;
13. Γιατί η ανθρωπότητα μελέτησε τους κανόνες διαιρετότητας και την ευκλείδεια διαίρεση;
14. Πώς εισάγονται ο έννοιες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στα νήπια;

Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία

1. Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Εκδ. Ζυγός. – σελίδες 287- 347
2. Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά νοήματα.* Αθήνα: Gutenberg – σελίδες 201-204 & 214-221 &229-235
3. Διδασκαλία πρώτη αρίθμηση
   Καφούση Σ. Καφούση, Χ, Σκουμπουρδή (2006). *Τα Μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών, Αριθμοί και χώρος*. Αθήνα: Πατάκης
4. Συστήματα αρίθμησης
   Τριανταφυλλίδης, Τ., Σδρόλιας, Κ. (2007). *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης*. Αθήνα: Τυπωθήτω (51-67 & 91-111)
   Χατζηκυριάκου, Κ. (2008). *Αριθμοί, σύνολα, σχήματα : μαθηματικά για τη δασκάλα και τον δάσκαλο.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Σοφία *(21-33, 37-45, 71-87)*
5. Αριθμητικές Πράξεις
   Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αθήνα: Πατάκης.
   Van de Walle, J.A. (2001). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια Εξελικτική Διδασκαλία. Αθήνα (2005): Τυπωθήτω – ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ

Αναφορές εικόνων (1)

1. By ΒΑΣΙΛΗΣ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ (http://users.otenet.gr/~billstef/), original file by Randy Glasbergen Copyright 1996 (http://www.glasbergen.com).
2. Bus at Athens Airport (line X95).jpg
   http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bus_at_Athens_Airport_(line_X95).jpg
   By Yoo Chung (Own work) [CC-BY-SA-2.5 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/deed.en)], via Wikimedia Commons
3. Backgammon PrecisionDice.jpg
   http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Backgammon_PrecisionDice.jpg
   See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
4. Εκατοστόμετρο
   http://pixabay.com/el/%CE%B5%CE%BA%CE%B1%CF%84%CE%BF%CF%83%CF%84%CF%8C%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%BF-%CE%B5%CE%BE%CE%BF%CF%80%CE%BB%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82-%CE%B9%CE%BD%CF%84%CF%83%CF%8E%CE%BD-2262/
   See page for author [Public domain], via Pixabay

Αναφορές εικόνων (2)

5. Drawing of human hand representing number 3.gif
   http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drawing_of_human_hand_representing_number_3.gif
   By Angel18 (Own work) [GFDL (http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en)], via Wikimedia Commons
6. Zeno's Paradox of Achilles and the Tortoise. By Luke Mastin © 2010 (http://www.storyofmathematics.com/greek.html).
7. Ishango bone, by Chris K. Caldwell © 1999-2014 (http://primes.utm.edu/glossary/xpage/IshangoBone.html).
8. Προσωπικό αρχείο.
9. Ελληνικό σύστημα αρίθμησης, by Thanasis Kopadis (http://thanasiskopadis.blogspot.gr/2010/12/blog-post_24.html).
10. Numeration-brahmi fr.png
    http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Numeration-brahmi_fr.png
    See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (3)

11. Προσωπικό αρχείο.
12. Georg Cantor2.jpg
    http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Cantor2.jpg
    See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

13-19. Προσωπικό αρχείο.

20. By Blog à Maths (http://mathblogger.free.fr/index.php?entry=entry080307-181225).

21-23. Προσωπικό αρχείο.

24. Ακολουθία Fibonacci, by (http://users.sch.gr/theoj/etwin/fibonacci/akolouthia.htm).

25-41. Προσωπικό αρχείο.

42. By Winningmath (https://ecomatheasy.wordpress.com/2011/11/11/math-jokes/) original file by Randy Glasbergen Copyright 2002 (http://www.glasbergen.com).

43-60. Προσωπικό αρχείο.

61. Abacus 6.png
    http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Abacus_6.png
    See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (4)

62. NAMA Machine d'Anticythère 1.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NAMA_Machine_d%27Anticyth%C3%A8re_1.jpg
[GFDL (http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License) or CC-BY-SA-3.0-migrated (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en) or CC-BY-2.5 (http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/)], via Wikimedia Commons
63. Pocket slide rule.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pocket_slide_rule.jpg
[GFDL-1.2 (http://commons.wikimedia.org/wiki/Commons:GNU_Free_Documentation_License,_version_1.2)], via Wikimedia Commons
64. Astrolab.JPG
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Astrolab.JPG
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
65. Napier-example-4.png
http://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B9%84%E0%B8%9F%E0%B8%A5%E0%B9%8C:Napier-example-4.png

Αναφορές εικόνων (5)

[GFDL (http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_the_GNU_Free_Documentation_License) or CC-BY-SA-3.0 (http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License)], via Wikimedia Commons

66. Addiator.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Addiator.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
67. Gosremprom.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gosremprom.jpgSee page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
68. By Tüm Hakları Saklıdır, Bilgiustam © 2014 (http://www.bilgiustam.com/hesap-makinesinin-icadi-tarihcesi/).
69. Calculator facit hg.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Calculator_facit_hg.jpg
By Hannes Grobe (Self-published work) [CC-BY-SA-2.5 (http://commons.wikimedia.org/wiki/Template:Cc-by-sa-2.5)], via Wikimedia Commons

Αναφορές εικόνων (6)

70. Comptometer1920Model.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comptometer1920Model.jpg
By self (Own work) [CC-BY-SA-2.5 (http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-2.5)], via Wikimedia Commons

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τζεκάκη Μαριάννα. «Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία. Ενότητα 6. Αριθμοί και Πράξεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS177/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Στοϊνίτση Αφροδίτη

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-15

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.