Υδραυλική των Υπόγειων Ροών

Ενότητα 5: Αριθμητικά μοντέλα υπόγειων υδροφορέων

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου
Καθηγητής Περικλής Λατινόπουλος

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αριθμητικά μοντέλα υπόγειων υδροφορέων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το μαθηματικό πρόβλημα

- Εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς.
- Διδιάστατα και τριδιάστατα συστήματα.
- Οριακές συνθήκες προβλήματος ροής.
- Εξισώσεις γραμμών ροής και δυναμικού.
- Εξισώσεις συναγωγής διασποράς.
- Οριακές συνθήκες προβλήματος μεταφοράς.

Μαθηματικά μοντέλα (1/2)

Με τον όρο μαθηματικό μοντέλο υπόγειου υδροφορέα ορίζεται μια μη-μοναδική, απλοποιημένη μαθηματική έκφραση ενός υπόγειου υδροφορέα, που παρουσιάζει τις ουσιαστικότερες λειτουργίες του συστήματος, ανάλογα με τους στόχους για τους οποίους έχει αναπτυχθεί, και που περιλαμβάνει διάφορες παραδοχές, υποθέσεις και περιορισμούς που επιβάλλονται από το ίδιο το σύστημα.

Το μοντέλο εκφράζει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαφόρων μεγεθών του συστήματος αλλά και μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντός του.

Η λύση ενός μαθηματικού μοντέλου μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή στο χώρο ή και στο χρόνο.

Μαθηματικά μοντέλα (2/2)

Ανάλογα με την εφαρμογή τους τα μαθηματικά μοντέλα κατατάσσονται σε τέσσερις βασικές κατηγορίες :

- Μοντέλα επεξεργασίας δεδομένων.
- Μοντέλα καθορισμού των παραμέτρων του προβλήματος.
- Μοντέλα πρόβλεψης της λειτουργίας του συστήματος.
- Μοντέλα διαχείρισης.

Αξιοπιστία μαθηματικών μοντέλων και αβεβαιότητα

Μέθοδοι επίλυσης

(α) αναλυτικές λύσεις, (β) αριθμητικά σχήματα

Αναλυτικές λύσεις

Χαρακτηριστικό των αναλυτικών λύσεων οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος είναι ότι αποτελούν μια κλειστή έκφραση, μια σχέση δηλαδή που συνδέει την άγνωστη μεταβλητή με τις παραμέτρους, σε συνάρτηση κάθε φορά με τις ισχύουσες αρχικές και οριακές συνθήκες.

Τα μειονεκτήματα τους είναι :

α) δεν υπάρχουν λύσεις για τις γενικές μορφές των εξισώσεων,

β) δεν αντιμετωπίζονται πεδία με σύνθετη γεωμετρία ορίων

γ) είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν σύνθετα προβλήματα, όπως ταυτόχρονη λειτουργία πηγαδιών και μεταφορά ρύπων, κυρίως γιατί τα αντίστοιχα πεδία ταχυτήτων είναι τελείως διαφορετικά από τα ομοιόμορφα που απαιτούνται για την αναλυτική επίλυση της εξίσωσης συναγωγής - διασποράς.

Αριθμητικά σχήματα (1/2)

Α Στάδιο: Αξιολόγηση του μοντέλου σε ότι αφορά τα αριθμητικά σφάλματα από την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Η διαδικασία αυτή γίνεται συνήθως συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αντίστοιχα αποτέλεσμα αναλυτικών λύσεων.

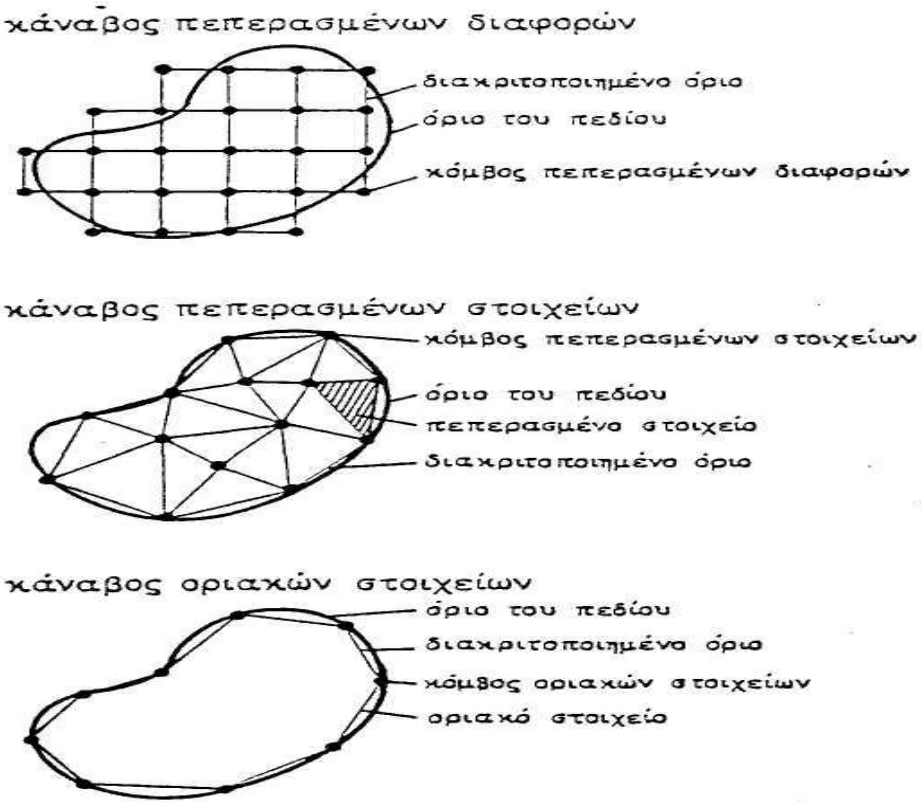
Β Στάδιο: Έλεγχος αν πράγματι το μοντέλο προσομοιώνει τα φυσικά φαινόμενα τα οποία υποτίθεται ότι αναπαράγει. Αυτή η διαδικασία ελέγχου υλοποιείται συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με αντίστοιχες μετρήσεις στο εργαστήριο ή στο πεδίο.

Γ Στάδιο: Φάση εφαρμογής του μοντέλου, με στόχο την προσομοίωση των φυσικών φαινομένων ενός πραγματικού συστήματος και ειδικότερα η διερεύνηση ή η πρόγνωση των πιο δυσμενών καταστάσεών του.

Αριθμητικά σχήματα (2/2)

Οι πιο συνηθισμένες αριθμητικές μέθοδοι είναι οι:

α) η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών,
β) η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων,
γ) η μέθοδος των οριακών στοιχείων και
δ) η μέθοδος των κινούμενων σημείων.



Σχήμα 1: Μορφές διακριτοποίησης πεδίων.

Πηγή: Περικλής Λατινόπουλος, Προστασία και Εξυγίανση των Υπόγειων Νερών – Σημειώσεις Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Προστασία Περιβάλλοντος και Βιώσιμη Ανάπτυξη», Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 115.

Η αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Φ_E= ακριβής λύση διαφορικής εξίσωσης

Φ_Δ= ακριβής λύση διακριτοποιημένης με αριθμητική μέθοδο εξίσωσης

Φ_A= αριθμητική λύση διακριτοποιημένης εξίσωσης

$|\Phi_E-\Phi_\Delta|$= **σφάλμα αποκοπής**

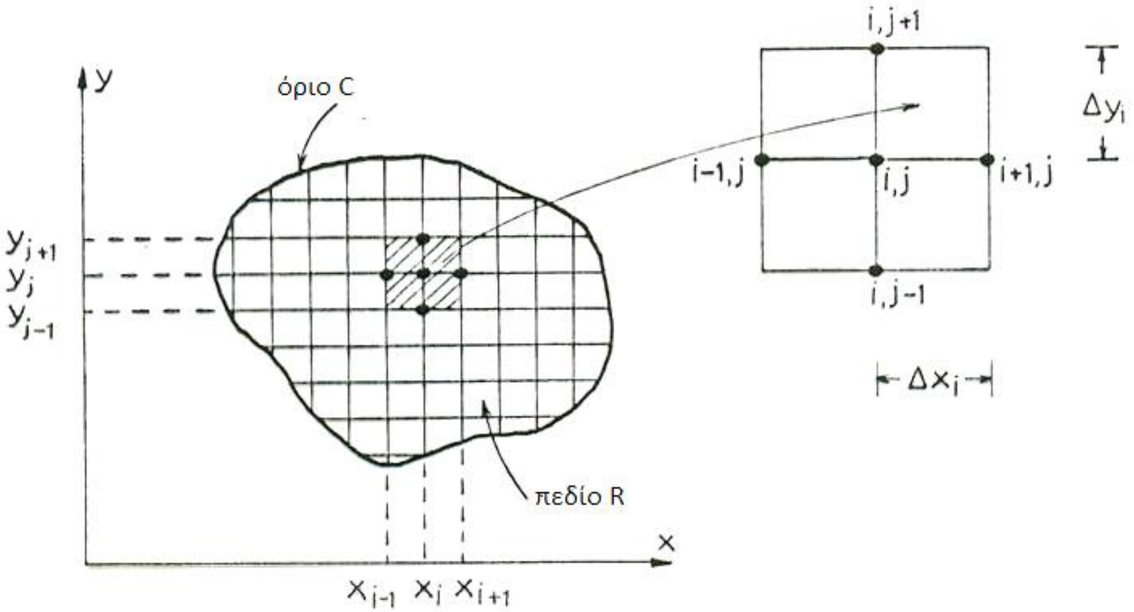
$|\Phi_\Delta-\Phi_A|$= **σφάλμα στρογγύλευσης**

$|\Phi_E-\Phi_A|$= **συνολικό σφάλμα**

Κριτήριο σύγκλισης = $|\Phi_E-\Phi_\Delta| < \varepsilon_1$

Κριτήριο σύγκλισης = $|\Phi_\Delta-\Phi_A| < \varepsilon_2$

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (1/6)



Σχήμα 2: Τυπική μορφή καννάβου πεπερασμένων διαφορών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (2/6)

Ανάπτυγμα μεταβλητής $\varphi = \varphi(x)$ σε σειρά Taylor

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \Delta x \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} + \ldots$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + 0\Delta x$$

Εμπροσθοδομική διαφορά

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \approx \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

Οπισθοδρομική **διαφορά**

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \approx \frac{\varphi(x) - \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Κεντρική **διαφορά**

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \approx \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (3/6)

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \approx \frac{\varphi(x+\Delta x - 2\varphi(x)+\varphi(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\varphi(t)-\varphi(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (4/6)

Μονοδιάστατα προβλήματα

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial t} = T\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{S}{T}\frac{\varphi_i^{k+1}-\varphi_i^{k}}{\Delta t} = \frac{\lambda(\varphi_{i-1}^{k+1}-2\varphi_i^{k+1}+\varphi_{i+1}^{k+1})+(1-\lambda)(\varphi_{i-1}^{k}-2\varphi_i^{k}+\varphi_{i+1}^{k})}{(\Delta x)^2}$$

$\lambda = 0$ (ρητό σχήμα)

$$\frac{S}{T}\frac{\varphi_i^{k+1}-\varphi_i^{k}}{\Delta t} = \frac{\varphi_{i-1}^{k}-2\varphi_i^{k}+\varphi_{i+1}^{k})}{(\Delta x)^2} \qquad \text{κριτήριο ευστάθειας} = \frac{T}{S}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

$\lambda = 1$ (πεπλεγμένο σχήμα)

$$\frac{S}{T}\frac{\varphi_i^{k+1}-\varphi_i^{k}}{\Delta t} = \frac{\varphi_{i-1}^{k+1}-2\varphi_i^{k+1}+\varphi_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

$\lambda = 1/2$ (πεπλεγμένο σχήμα Crank - Nicolson)

$$\frac{S}{T}\frac{\varphi_i^{k+1}-\varphi_i^{k}}{\Delta t} = \frac{\varphi_{i-1}^{k+1}-2\varphi_i^{k+1}+\varphi_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{i-1}^{k}-2\varphi_i^{k}+\varphi_{i+1}^{k}}{(\Delta x)^2}$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (5/6)

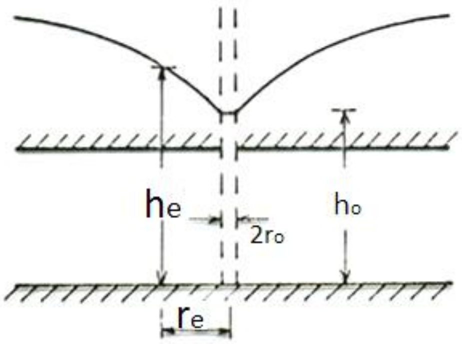
Διδιάστατα προβλήματα

$$\frac{S}{T}\frac{\varphi_{i,j}^{k+1}-\varphi_{i,j}^{k}}{\Delta t}=\frac{\lambda(\varphi_{i-1,j}^{k+1}-2\varphi_{i,j}^{k+1}+\varphi_{i+1,j}^{k+1})}{(\Delta x)^2}+\frac{(1-\lambda)(\varphi_{i-1,j}^{k}-2\varphi_{i,j}^{k}+\varphi_{i+1,j}^{k})}{(\Delta x)^2}+$$

$$+\frac{\lambda(\varphi_{i,j-1}^{k+1}-2\varphi_{i,j}^{k+1}+\varphi_{i,j+1}^{k+1})}{(\Delta y)^2}+\frac{(1-\lambda)(\varphi_{i,j-1}^{k}-2\varphi_{i,j}^{k}+\varphi_{i,j+1}^{k})}{(\Delta y)^2}-\frac{Q}{T}$$

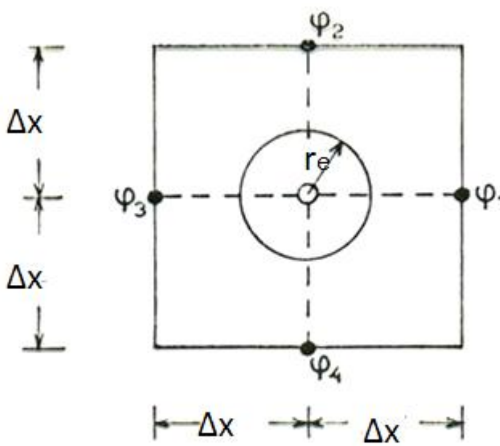
Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (6/6)

Διδιάστατα προβλήματα



$$r_e = \exp(-0.5\pi)\Delta x = 0.208\Delta x$$

$$\varphi_o = \varphi_e - (Q/2\pi T)\ln(0.208\Delta x/r_o)$$



Σχήμα 3: Προσέγγιση τιμών φορτίων κοντά σε πηγάδι άντλησης.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Κωνσταντίνος Κατσιφαράκης, Νικόλαος Θεοδοσίου, Περικλής Λατινόπουλος. «Υδραυλική των Υπόγειων Ροών. Ενότητα 5. Αριθμητικά μοντέλα υπόγειων υδροφορέων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:http://eclass.auth.gr/courses/OCRS179/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης
Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.