Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων-Λυμένες ασκήσεις

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων

2.9 Λυμένες ασκήσεις

2.9.1. (α) Να επαληθεύσετε την παρακάτω έκφραση:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{εάν } a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & \text{για } a \neq 1. \end{cases} \tag{2.9.1}$$

(β) Να δείξετε ότι εάν $|a| < 1$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}. \tag{2.9.2}$$

(γ) Να δείξετε επίσης ότι εάν $|a| < 1$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\ a^n = \frac{a}{(1-a)^2}. \tag{2.9.3}$$

(δ) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n$$

εάν $|a| < 1$.

Λύση:

(α) Αν $a = 1$, τότε

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N. \tag{2.9.4}$$

Αν $a \neq 1$, τότε εφαρμόζοντας τον τύπο του αθροίσματος των όρων γεωμετρικής προόδου παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{a^{N-1}\, a - 1}{a - 1} = \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^N}{1 - a}. \tag{2.9.5}$$

(β) Αν $|a| < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}. \tag{2.9.6}$$

(γ) Διαφορίζοντας την $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ ως προς a προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right) &= \frac{d}{d\,a}\left(\frac{1}{1-a}\right) \Leftrightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} n\, a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} n\, a^n = \frac{1}{(1-a)^2}. \end{aligned} \tag{2.9.7}$$

(δ) Από τις (2.9.5) και (2.9.6) συνάγουμε ότι:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{k-1} a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^k}{1-a} = \frac{1}{1-a}(1 - 1 + a^k) = \frac{a^k}{1-a}. \tag{2.9.8}$$

2.9.2. (α) Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ δείχνεται στο Σχήμα 2.9.1α. Σχεδιάστε και δώστε τιμές προσεχτικά για καθένα από τα παρακάτω σήματα:

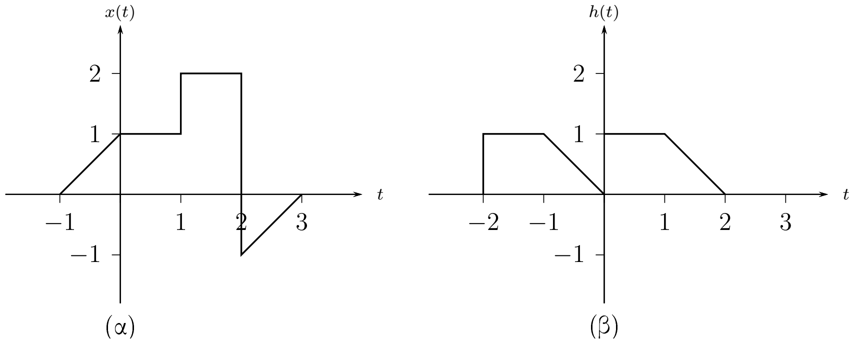
$$x(t-2), \quad x(1-t), \quad x(2t+2),$$

$$x(2-t/3), \quad [x(t) + x(2-t)]\; u(1-t), \quad x(t)\; [\delta(t+3/2) - \delta(t-3/2)]\,.$$

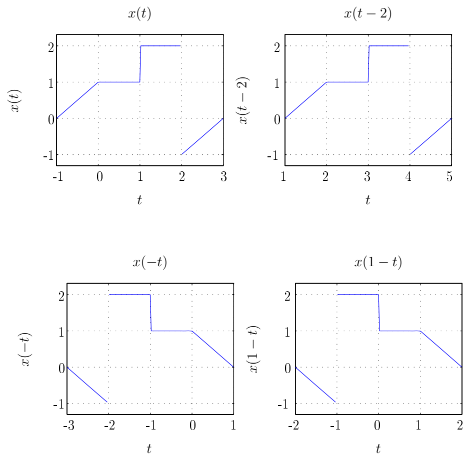
(β) Για το σήμα $h(t)$ που δείχνεται στο Σχήμα 2.9.1β να σχεδιάσετε τα σήματα:

$$x(t)\, h(t+1), \quad x(t)\, h(-t).$$

Λύση:



Σχήμα 2.9.1: Σήματα $x(t)$ και $h(t)$ για την Άσκηση 2.9.2(α).



Σχήμα 2.9.2: Τα σήματα $x(t-2)$ και $x(1-t)$.

(α) Τα σήματα $x(t-2)$ και $x(1-t)$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.9.2. Τα σήματα $x(2t+2)$ και $x(2-\frac{t}{3})$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.9.3.

Τα σήματα $x(t)+x(2-t)$ και $u(1-t)$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.9.4. Το γινόμενο $[x(t)+x(2-t)]u(1-t)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 2.9.5.

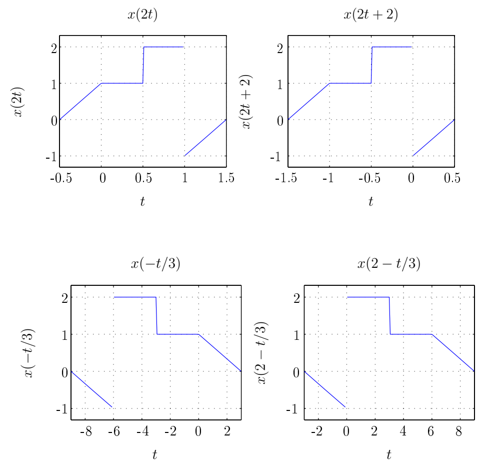
Εύκολα αναγνωρίζουμε ότι

$$x(t)\delta(t+\frac{3}{2}) = x(-\frac{3}{2})\delta(t+\frac{3}{2}) = 0 \tag{2.9.9}$$

$$x(t)\delta(t-\frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2})\delta(t-\frac{3}{2}) = 2\delta(t-\frac{3}{2}) \tag{2.9.10}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και το αρνητικό πρόσημο έχουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 2.9.6.

(β) Τα βασικά σήματα σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.9.7. Τα ζητούμενα $x(t)h(t+1)$ και $x(t)h(-t)$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.9.8.



Σχήμα 2.9.3: Τα σήματα $x(2t+2)$ και $x(2-\frac{t}{3})$.

2.9.3. Στην άσκηση αυτή εκμεταλλευόμαστε τις ιδιότητες των σημάτων άρτιας και περιττής συμμετρίας.

(α) Να δείξετε ότι εάν $x[n]$ είναι σήμα περιττής συμμετρίας, τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0. \tag{2.9.11}$$

(β) Να δείξετε ότι εάν $x_1[n]$ είναι ένα σήμα περιττής συμμετρίας και $x_2[n]$ είναι ένα σήμα άρτιας συμμετρίας, τότε $x_1[n]\, x_2[n]$ είναι ένα σήμα περιττής συμμετρίας.

(γ) Έστω $x[n]$ ένα αυθαίρετο σήμα με άρτια και περιττά μέρη $x_e[n]$ και $x_o[n]$ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]. \tag{2.9.12}$$

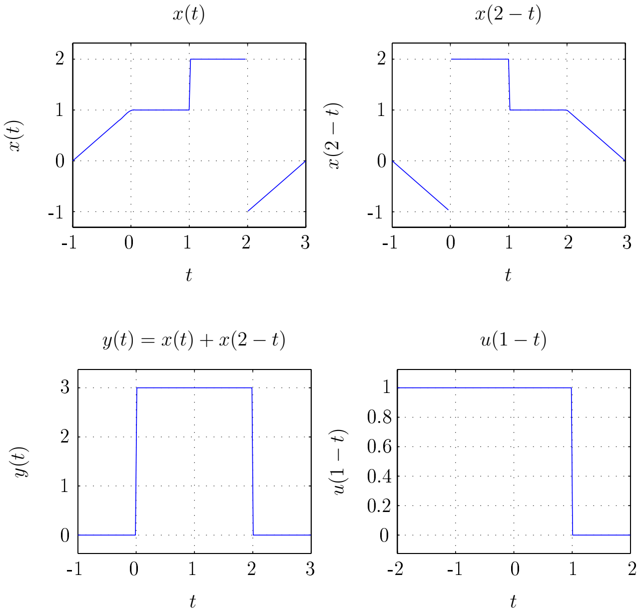
(δ) Να δείξετε ότι ανάλογες προτάσεις ισχύουν και για τα σήματα συνεχούς χρόνου, π.χ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\, dt. \tag{2.9.13}$$

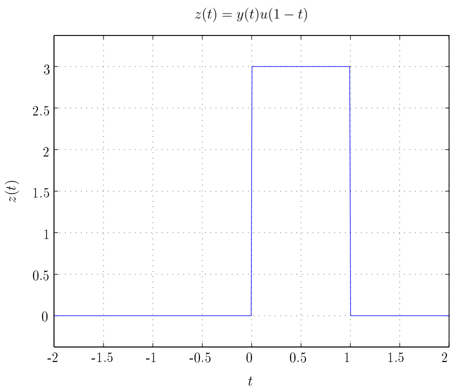
Λύση:

(α) Έχουμε:

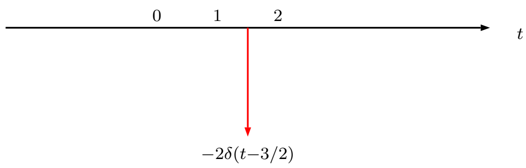
$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} x[-n] + x[0] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} x[n] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] + x[0] = x[0]. \qquad (2.9.14)\end{aligned}$$



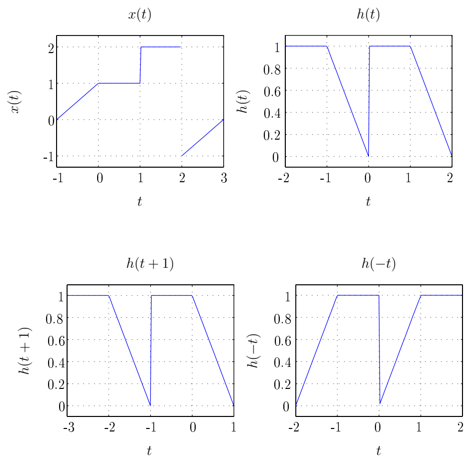
Σχήμα 2.9.4: Τα σήματα $x(t) + x(2-t)$ και $u(1-t)$.



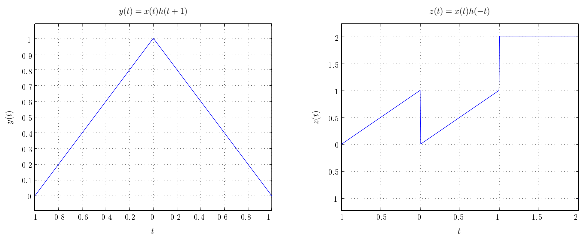
Σχήμα 2.9.5: Το σήμα $[x(t) + x(2-t)]u(1-t)$.



Σχήμα 2.9.6: Το σήμα $x(t)[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})]$.



Σχήμα 2.9.7: Τα σήματα $x(t)$, $h(t)$, $h(t+1)$ και $h(-t)$.



Σχήμα 2.9.8: Σήματα $x(t)h(t+1)$ και $x(t)h(-t)$.

Αλλά $x[0] = -x[0]$, οπότε $x[0] \equiv 0$.

(β) Από τον ορισμό:

$$y[-n] = x_1[-n]x_2[-n] = -x_1[n]x_2[n] = -y[n] \tag{2.9.15}$$

επομένως το γινόμενο των δύο σημάτων είναι σήμα περιττής συμμετρίας.

(γ) Αναλύοντας το $x^2[n]$ παίρνουμε:

$$x^2[n] = (x_e[n] + x_o[n])^2 = x_e^2[n] + x_o^2[n] + 2x_e[n]x_o[n]. \tag{2.9.16}$$

Αλλά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]x_o[n] \equiv 0$ λόγω των (α) και (β), οπότε εύκολα συνάγεται η αποδεικτέα.

(δ) Ανάλογες προτάσεις μπορούν να δειχθούν και για τα σήματα συνεχούς χρόνου, αν τα αθροίσματα αντικατασταθούν με ολοκληρώματα, π.χ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt. \tag{2.9.17}$$