Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων

2.1 Σήμα

- Σήματα απαντώνται στα
  - Τηλεπικοινωνίες
  - Διαστημική επιστήμη
  - Σχεδίαση κυκλωμάτων
  - Ακουστική, σεισμολογία, βιοϊατρική μηχανική, επεξεργασία φωνής
  - Παραγωγή και διανομή ηλεκτρικής ενέργειας
  - Έλεγχο χημικών διεργασιών.
- Κοινές χαρακτηριστικές ιδιότητες:
  - Σήματα: **Συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών** (π.χ. χρόνος, χώρος).
  - Παρέχουν **πληροφορία** σχετική με την εξέλιξη ή φύση ενός φαινομένου.
- Τα συστήματα αποκρίνονται, δηλαδή παράγουν άλλα σήματα, όταν διεγείρονται από συγκεκριμένα σήματα.

Πίνακας 2.1: Παραδείγματα σημάτων και συστημάτων.

Σύστημα	Σήματα
Ηλεκτρικό κύκλωμα	Τάση, ρεύμα
Πρόγραμμα αυτόματης διάγνωσης ηλεκτροκαρδιογραφήματος	Σήμα εισόδου: ψηφιοποιημένο καρδιογράφημα. Σήμα εξόδου: παράμετροι λ.χ. παλμός καρδιάς
Φωτογραφική μηχανή	Σήμα εισόδου: φώς. Σήμα εξόδου: φωτογραφία

- Καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε δύο τάξεις **προβλημάτων**:

  1. **Ανάλυση.** Πώς ένα σύστημα αποκρίνεται σε μία είσοδο; π.χ. Πώς αντιδρά η οικονομία μιας περιοχής σε αποτυχημένη σοδειά ή σε νέες ανακαλύψεις πετρελαίου;
  2. **Σχεδίαση.** Κατασκευή ενός συστήματος, ώστε να επεξεργάζεται ένα σήμα με επιθυμητό τρόπο.
     - Οικονομική πρόβλεψη: Αν οι μέσοι όροι χρηματιστηρίου (stock market averages) είναι διαθέσιμοι, πρόβλεψε το μέλλον, όταν γνωρίζεις το παρελθόν;
     - Αποκατάσταση σήματος που έχει αλλοιωθεί π.χ. από θόρυβο.
     - Βελτίωση ποιότητας της εικόνας.

- Συνδυασμός συστημάτων.

- Ιστορικό: Ενώ πολλές από τις μεθόδους τοποθετούνται στο 18ο και 19ο αιώνα π.χ. ανάλυση Fourier, η εφαρμογή τους στην επίλυση τεχνικών προβλημάτων είναι νέα.

- **Είδη σημάτων**:
  - Συνεχούς χρόνου: Έχουν βαθιές ρίζες π.χ. ηλεκτρικά κυκλώματα, τηλεπικοινωνίες.
  - Διακριτού χρόνου: Απαντούνται στην αριθμητική ανάλυση, χρονοσειρές, στατιστική.

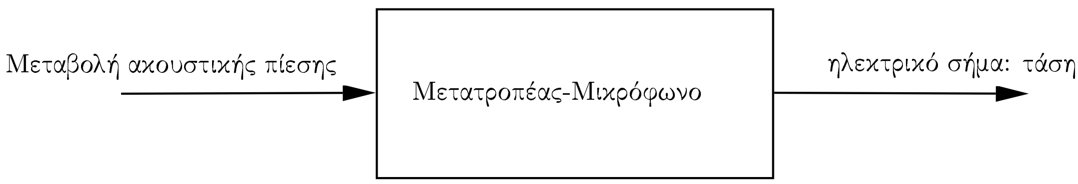
Η μετάβαση από τα σήματα συνεχούς χρόνου στα αντίστοιχα διακριτού χρόνου γίνεται με τη διαδικασία της ψηφιοποίησης.

- Το ενδιαφέρον μας θα επικεντρωθεί στα **Γραμμικά Χρονοαμετάβλητα** (Γ.Χ.Α.) συστήματα, μια οικογένεια συστημάτων για την οποία έχουμε ισχυρά αναλυτικά εργαλεία.

- Αν και η οικογένεια των Γ.Χ.Α. συστημάτων, μπορεί να εκληφθεί ως προϊόν επιστημονικής αφαίρεσης, επειδή πολλά συστήματα δεν εμπίπτουν σ' αυτήν π.χ. τα νευρωνικά δίκτυα (κατά βάση μη-γραμμικά συστήματα), η μελέτη της είναι επιβεβλημένη λόγω της ισχυρής θεωρητικής της βάσης, ας πούμε ως πρώτο στάδιο προσέγγισης πρακτικών συστημάτων.

2.2 Μαθηματική περιγραφή σημάτων

- Παράδειγμα σήματος συνεχούς χρόνου: Το σήμα στην έξοδο ενός μικροφώνου (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Εγγραφή φωνής.

- Παραδείγματα σημάτων διακριτού χρόνου: ο δείκτης Dow Jones του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης, το μέσο εισόδημα, ο ρυθμός εγκληματικότητας, ο ρυθμός γεννήσεων.

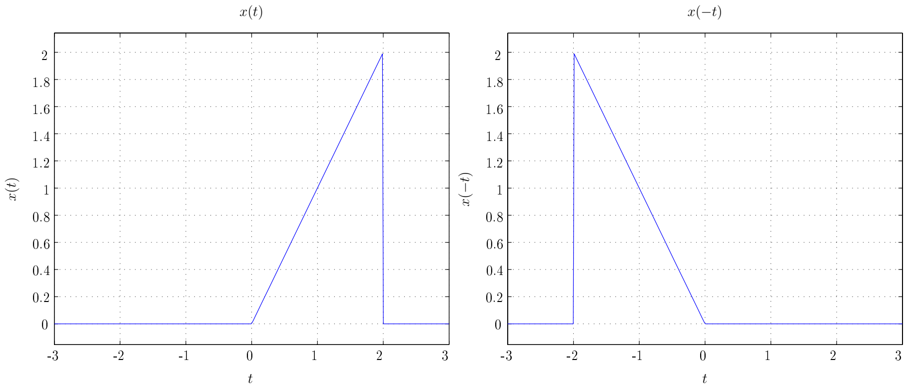
- Παράσταση σημάτων
  - συνεχούς χρόνου: $x(t)$, όπου $t \in \mathbb{R}$ ο συνεχής χρόνος.
  - διακριτού χρόνου: $x[n]$, όπου $n \in \mathbb{N}$ ένας ακέραιος δείκτης. Δηλαδή, τα σήματα διακριτού χρόνου είναι ακολουθίες.

2.3 Μετασχηματισμός ανεξάρτητης μεταβλητής

1. Ανάκλαση περί την αρχή (Σχήμα 2.2):

$$x(t) \;\Rightarrow\; x(-t)$$

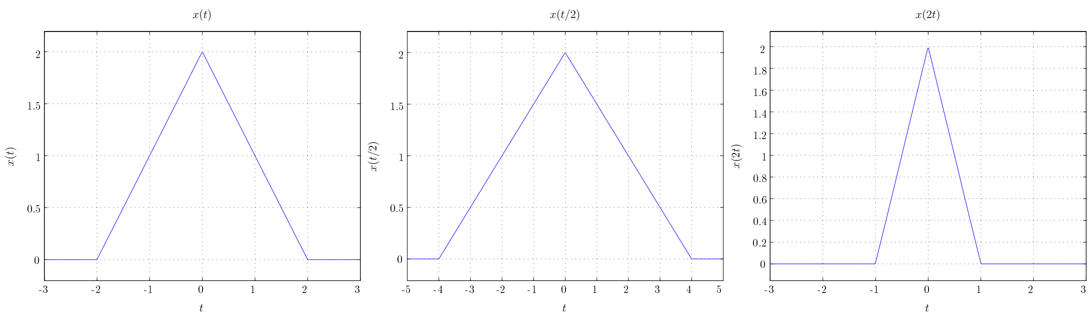
$$x[n] \;\Rightarrow\; x[-n].$$



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα ανάκλασης περί την αρχή.

2. Γραμμική αλλαγή κλίμακας (Σχήμα 2.3):

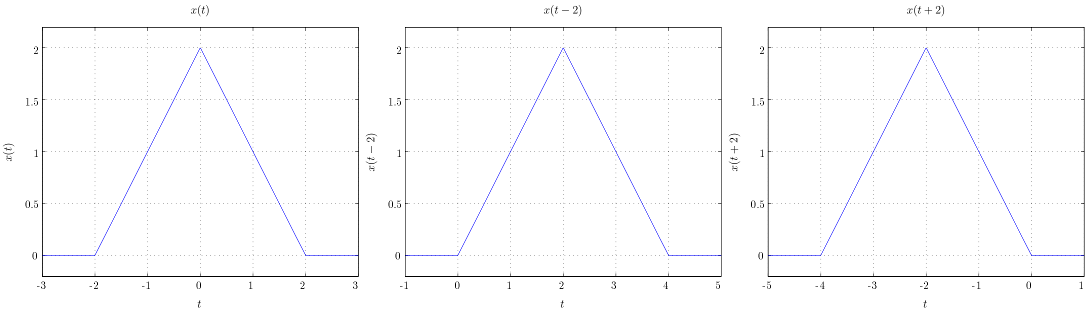
$$\begin{aligned} x(t) &\;\Rightarrow\; x(t/2) \;\text{ ή } x(2t). \\ \text{Αν } x(t) \neq 0 \text{ για } |t| < t_0 &\;\Rightarrow\; x(\frac{t}{2}) \neq 0 \quad \text{εάν } |\tfrac{t}{2}| < t_0 \\ &\;\Leftrightarrow\; x(\frac{t}{2}) \neq 0 \quad \text{εάν } |t| < 2\,t_0. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα γραμμικής αλλαγής κλίμακας.

3. Μετατόπιση (Σχήμα 2.4):

$$\begin{aligned} x(t) &\;\rightarrow\; x(t - t_0) \\ x[n] &\;\rightarrow\; x[n - n_0]. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα μετατόπισης.

2.4 Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

1. Σήμα άρτιας συμμετρίας

$$x(-t) = x(t) \qquad \forall t. \tag{2.1}$$

2. Σήμα περιττής συμμετρίας

$$x(-t) = -x(t) \qquad \forall t. \tag{2.2}$$

3. Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος

$$x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]. \tag{2.3}$$

4. Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος

$$x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]. \tag{2.4}$$

5. Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t). \tag{2.5}$$

2.5 Περιοδικά σήματα

1. Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν

$$\exists T \neq 0 : \quad x(t) = x(t+T) \quad \forall t. \tag{2.6}$$

2. Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x(t) = x(t+mT) \quad \forall t. \tag{2.7}$$

3. Θεμελιώδης περίοδος T_0 είναι η μικρότερη τιμή της παραμέτρου T για την οποία ισχύει η (2.6).

4. Ένα σταθερό σήμα είναι περιοδικό με απροσδιόριστη περίοδο.

2.6 Βασικά σήματα συνεχούς χρόνου

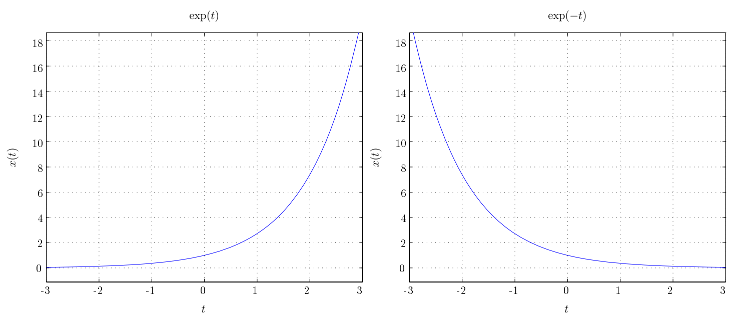
2.6.1 Πραγματικό εκθετικό

$$x(t) = C\, e^{a\,t} \quad a, C \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

- Η παράμετρος a έχει τη φυσική ερμηνεία ρυθμού αύξησης πληθυσμού, ρυθμού εξασθένισης της ραδιενέργειας. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RC η παράμετρος a ισούται με $\frac{1}{RC}$. Η ποσότητα RC είναι γνωστή και ως σταθερά χρόνου.

- Για $a > 0$ το εκθετικό σήμα αυξάνει.

- Για $a < 0$ το εκθετικό σήμα αποσβέννυται.



Σχήμα 2.5: Παραδείγματα πραγματικών εκθετικών σημάτων.

2.6.2 Φανταστικό εκθετικό

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$x(t) = e^{j\omega_0\,t} = \cos\omega_0 t + j\,\sin\omega_0 t. \tag{2.9}$$

- Άρα το φανταστικό εκθετικό αποτελείται από δύο συνημιτονοειδή σήματα που έχουν διαφορά φάσης 90°.

- Το φανταστικό εκθετικό είναι περιοδικό σήμα, διότι

$$\exists T: \quad e^{j\,\omega_0\,t} = e^{j\,\omega_0\,(t+T)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists T: \quad e^{j\,\omega_0\,T} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T = \rho\,\frac{2\,\pi}{|\omega_0|}, \quad \rho \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

Για $\rho = 1$ παίρνουμε τη θεμελιώδη περίοδο:

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{|\omega_0|}. \quad (2.11)$$

2.6.3 Μιγαδικό εκθετικό

Το μιγαδικό εκθετικό είναι χρήσιμο για την περιγραφή ημιτονοειδών σημάτων με διαφορά φάσης. Πράγματι

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j\,(\omega_0\,t+\varphi)}\}. \quad (2.12)$$

Το μιγαδικό εκθετικό ορίζεται ως

$$x(t) = C\,e^{a\,t} \quad a, C \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

Αν ο μιγαδικός αριθμός C οριστεί σε πολικές συντεταγμένες (παράσταση μέτρου - φάσης), $C = |C|e^{j\,\varphi}$, και ο μιγαδικός εκθέτης a οριστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως $a = r + j\,\omega_0$, τότε η (2.13) παίρνει τη μορφή

$$C\,e^{a\,t} = |C|e^{rt}\,e^{j\,(\omega_0\,t+\varphi)} = |C|e^{rt}\,\cos(\omega_0 t + \varphi) + j|C|e^{rt}\,\cos(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (2.14)$$

Καθένας όρος στο δεξί μέρος της (2.14) είναι ένα αποσβεννύμενο ημιτονειδές σήμα για $r < 0$. Το σήμα $\pm|C|\,e^{rt}$ καλείται περιβάλλουσα (envelope) του αποσβεννύμενου ημιτονοειδούς σήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.

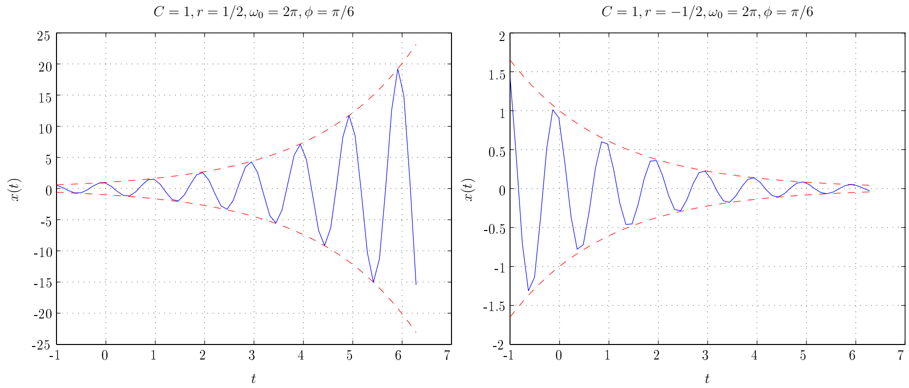
2.6.4 Βηματική Συνάρτηση-Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης

Η βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside ορίζεται ως εξής:

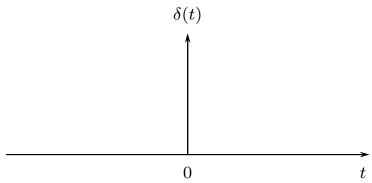
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Παρατηρούμε ότι η $u(t)$ είναι ασυνεχής για $t = 0$. Ισχύει:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\,d\lambda \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.16)$$



Σχήμα 2.6: Παραδείγματα αποσβεννύμενων για $r < 0$ και αυξανόμενων για $r > 0$ ημιτονοειδών σημάτων.



Σχήμα 2.7: Η συνάρτηση δέλτα-Dirac.

όπου $\delta(t)$, η συνάρτηση **μοναδιαίας ώσης** ή συνάρτηση δέλτα-Dirac. Η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι μια γενικευμένη συνάρτηση. Παρατηρήστε ότι υπάρχει τυπική δυσκολία στον υπολογισμό της παραγώγου. Αυστηρότερα ορίζεται ως *συνάρτηση κατανομής* (distribution function). Σχηματικά παριστάνεται όπως στο Σχήμα 2.7.

Ένας άλλος ορισμός της συνάρτησης $\delta(t)$ είναι ο εξής:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) \tag{2.17}$$

όπου

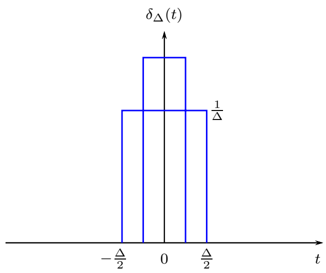
$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & |t| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{2.18}$$

Δύο μέλη από τη σειρά συναρτήσεων $\delta_{\Delta}(t)$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 2.8.

Προς το παρόν αρκεί να γνωρίζουμε πώς ολοκληρώνουμε όταν παρίσταται η συνάρτηση $\delta(t)$ στην υπό-ολοκλήρωση συνάρτηση και πώς πολλαπλασιάζουμε συναρτήσεις, όταν στο γινόμενο ένας παράγοντας είναι η συνάρτηση $\delta(t)$.

- Υπολογισμός ολοκληρώματος: Ας ξεκινήσουμε από τον ορισμό της συνάρτησης $u(t)$:

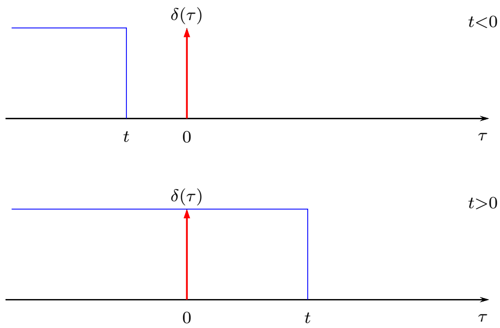
$$u(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \tag{2.19}$$



Σχήμα 2.8: Σειρά συναρτήσεων $\delta_\Delta(t)$.

$$\overset{\sigma=t-\tau}{=} \quad -\int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)\, d\sigma \;=\; \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)\, d\sigma. \tag{2.20}$$

Ας αναλύσουμε τον υπολογισμό στην (2.19). Παρατηρούμε ότι αν $t<0$, τότε το διάστημα ολοκλήρωσης δεν περιέχει τη συνάρτηση $\delta(\tau)$, οπότε το αποτέλεσμα είναι μηδέν. Αν $t>0$, το διάστημα ολοκλήρωσης περιέχει τη συνάρτηση $\delta(\tau)$, οπότε το αποτέλεσμα είναι 1. Η ανάλυση αυτή παρουσιάζεται εποπτικά στο Σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$.

Ανάλογος είναι ο χειρισμός του ολοκληρώματος (2.20) που αναλύεται στο Σχήμα 2.10.

Γενικότερα ισχύει:

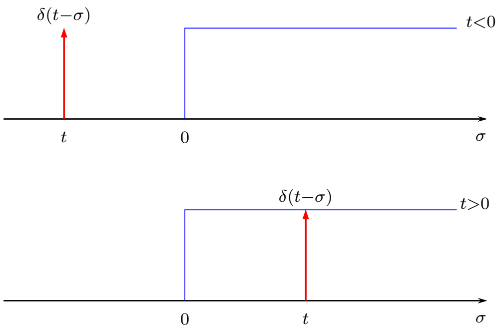
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \tag{2.21}$$

όπου t είναι η τιμή του τ για την οποία μηδενίζεται το όρισμα της συνάρτησης $\delta(t-\tau)$.

- Γινόμενο συναρτήσεων όπου ένας παράγοντας είναι η συνάρτηση δέλτα:

$$x(t)\,\delta(t) \;=\; x(0)\,\delta(t) \tag{2.22}$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) \;=\; x(t_0)\,\delta(t-t_0). \tag{2.23}$$



Σχήμα 2.10: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^\infty \delta(t-\sigma)\, d\sigma$.

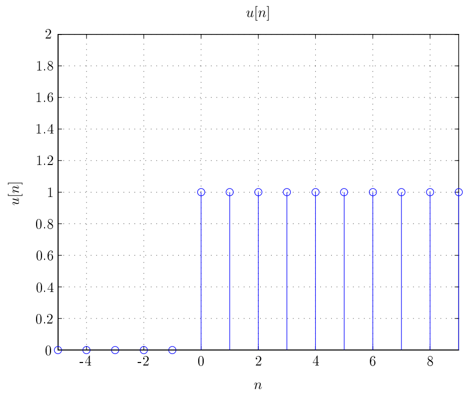
2.7 Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

2.7.1 Συνάρτηση βήματος

Ορίζεται ως εξής:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $u[n]$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11.



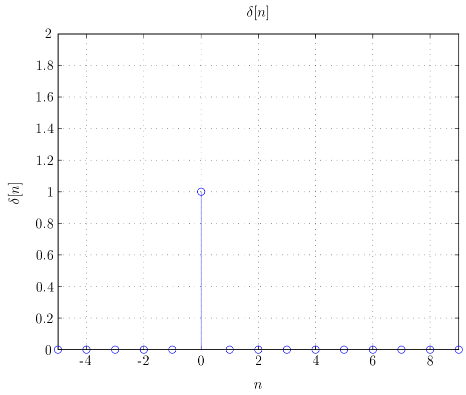
Σχήμα 2.11: Συνάρτηση βήματος διακριτού χρόνου.

2.7.2 Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή συνάρτηση μοναδιαίου δείγματος

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Η συνάρτηση μοναδιαίας ώσης $\delta[n]$ σχεδιάζεται Σχήμα 2.12. Μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι



Σχήμα 2.12: Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης.

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]. \tag{2.26}$$

Η συνάρτηση $\delta[n]$ υπολογίζεται ως διαφορά πρώτης τάξης από τη συνάρτηση $u[n]$:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \tag{2.27}$$

Ισοδύναμα:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \overset{k=n-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \tag{2.28}$$

2.7.3 Εκθετικό σήμα

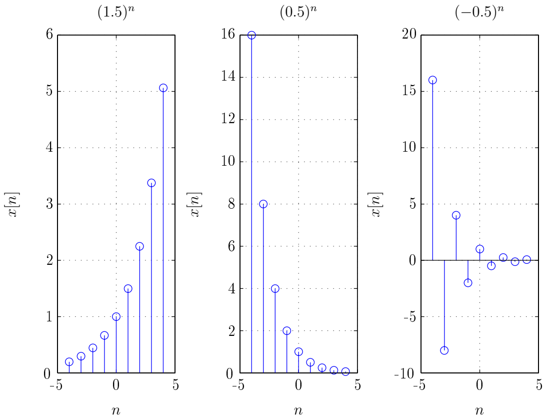
Ορισμοί

Το πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου (Δ.Χ.) ορίζεται ως

$$x[n] = C\,a^n\,|_{a=e^{\beta}} = C\,e^{\beta\,n} \quad C, a \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Η παράσταση Ca^n είναι πιό εύχρηστη, γι' αυτό και θα βασιστούμε σ' αυτήν. Ως προς τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a παρατηρούμε ότι:

$$\begin{array}{ll}
|a| < 1 & \text{αποσβεννύμενο εκθετικό} \\
|a| > 1 & \text{αυξανόμενο εκθετικό} \\
a > 0 & \text{ομόσημα δείγματα} \\
a < 0 & \text{ετερόσημα δείγματα} \\
a = 1 & \text{σταθερό σήμα } x[n] = C \\
a = -1 & x[n] = \pm C.
\end{array}$$



Σχήμα 2.13: Παραδείγματα πραγματικών εκθετικών διακριτού χρόνου.

Παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.13.

Το φανταστικό εκθετικό ορίζεται ως

$$x[n] \;=\; e^{j\Omega_0 n} \;=\; \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n. \tag{2.30}$$

Ιδιότητες περιοδικότητας των φανταστικών εκθετικών διακριτού χρόνου

- Φανταστικό εκθετικό Δ.Χ. συχνότητας $(\Omega_0 + 2\pi)$:

$$e^{j\,(\Omega_0+2\pi)n} \;=\; e^{j2\pi\, n}\, e^{j\,\Omega_0 n} \;=\; e^{j\,\Omega_0 n} \tag{2.31}$$

  είναι το ίδιο με εκείνο που έχει συχνότητα Ω_0. Άρα διαπιστώνεται **διαφορά** με τα σήματα συνεχούς χρόνου, όπου τα σήματα $e^{j\,\omega_0 t}$ είναι διαφορετικά για διαφορετικές τιμές του ω_0. Θεωρώντας φανταστικά εκθετικά χρειάζεται να καθορίσουμε ένα διάστημα μήκους 2π στο οποίο να εκλέξουμε την Ω_0: π.χ. $0 \le \Omega_0 < 2\pi$, $-\pi \le \Omega_0 < \pi$. Για

$$\begin{array}{ll} 0 < \Omega_0 < \pi & \text{ο ρυθμός ταλάντωσης αυξάνει} \\ \pi < \Omega_0 < 2\pi & \text{ο ρυθμός ταλάντωσης ελαττώνεται.} \end{array}$$

- Έλεγχος περιοδικότητας:

$$e^{j\,\Omega_0(n+N)} = e^{j\,\Omega_0 n} \Leftrightarrow e^{j\,\Omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \Omega_0\, N = 2\pi\, m\ ,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{2.32}$$

  Άρα

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} \;=\; \frac{m}{N}. \tag{2.33}$$

  Το σήμα $e^{j\,\Omega_0 n}$ **δεν** είναι περιοδικό για αυθαίρετες τιμές του Ω_0, αλλά μόνο αν $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός. Εάν $x[n]$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N, η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\frac{2\pi}{N}$. Εάν $x[n] = e^{j\,\Omega_0 n}$, $\Omega_0 \neq 0$, τότε

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right). \tag{2.34}$$

Ο Πίνακας 2.2 συνοψίζει τις διαφορές ανάμεσα στα φανταστικά εκθετικά συνεχούς και διακριτού χρόνου.

Πίνακας 2.2: Διαφορές μεταξύ των σημάτων $e^{j\,\omega_0\,t}$ και $e^{j\,\Omega_0\,n}$.

$e^{j\,\omega_0 t}$	$e^{j\,\Omega_0 n}$
Διαφορετικά σήματα για διαφορετικά ω_0	Ταυτόσημα σήματα για εκθετικά σε συχνότητες που απέχουν 2π
Περιοδικά για οποιαδήποτε εκλογή ω_0	Περιοδικά μόνο εάν $\Omega_0 = \frac{2\pi\, m}{N}$, $N > 0$, $m \in \mathbb{Z}^\dagger$
Θεμελιώδης συχνότητα ω_0	Θεμελιώδης συχνότητα†: $\frac{\Omega_0}{m}$
Θεμελιώδης περίοδος: $\omega_0 = 0$ απροσδιόριστη $\omega_0 \neq 0$ $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Θεμελιώδης περίοδος†: $\Omega_0 = 0$ απροσδιόριστη $\Omega_0 \neq 0$ $m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)$

† N και m δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

- Αρμονικές: Αρμονικές συνεχούς χρόνου ονομάζονται τα φανταστικά εκθετικά που έχουν συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους, δηλαδή

$$\phi_k(t) = e^{j\,k\,(\frac{2\pi}{T})\,t} \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.35}$$

Είναι σήματα διαφορετικά μεταξύ τους για διαφορετικές τιμές του k. Οι αρμονικές Δ.Χ., κατά αναλογία, είναι

$$\phi_k[n] = e^{j\,k\,(\frac{2\pi}{N})\,n}. \tag{2.36}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j\,(k+N)\,(\frac{2\pi}{N})\,n} = e^{j\,k\,(\frac{2\pi}{N})\,n} = \phi_k[n]. \tag{2.37}$$

Άρα μόνο N συνολικά αρμονικές Δ.Χ. είναι διαφορετικές: $\phi_0[n], \phi_1[n], \ldots, \phi_{N-1}[n]$.

- Δειγματοληψία σε ισαπέχοντα σημεία: Είναι ο μηχανισμός που παράγει τα σήματα Δ.Χ. από εκείνα του συνεχούς χρόνου. Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της δειγματοληψίας στα μιγαδικά εκθετικά:

$$x[n] = e^{j\,\omega_0\,t}\,|_{t=n\,T_s} = e^{j\,(\omega_0\,T_s)\,n} = e^{j\,\Omega_0\,n}, \qquad \Omega_0 = \omega_0\,T_s \tag{2.38}$$

  Το σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό μόνο αν $\frac{\omega_0\,T_s}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός.

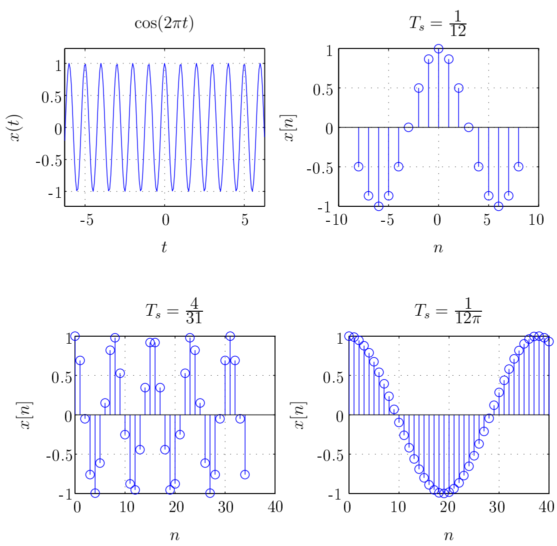
Παράδειγμα 2.1. Έστω $x(t) = \cos(2\pi\,t)$. Αν T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας, τότε προκύπτει το σήμα Δ.Χ. $x[n] = x(n\,T_s) = \cos(2\pi\,T_s\,n)$. Για τρείς επιλογές της παραμέτρου T_s διερευνούμε αν το σήμα Δ.Χ. που προκύπτει είναι περιοδικό.

α. $T_s = \frac{1}{12}$: $\quad x[n] = \cos(2\pi\,\frac{1}{12}\,n)$ περιοδικό, επειδή $\frac{1}{12}$ είναι ρητός αριθμός.

β. $T_s = \frac{4}{31}$: $\quad x[n] = \cos(2\pi\,\frac{4}{31}\,n) = \cos(\frac{8\pi\,n}{31})$ περιοδικό, επειδή $\frac{4}{31}$ είναι ρητός αριθμός.

γ. $T_s = \frac{1}{12\pi}$: $\quad x[n] = \cos(2\pi(\frac{1}{12\pi})\,n) = \cos(\frac{n}{6})$ δεν είναι περιοδικό, γιατί $\frac{1}{12\pi}$ είναι άρρητος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή περιοδική είναι μόνο η περιβάλλουσα, δηλαδή το σήμα συνεχούς χρόνου που υποβάλλεται σε δειγματοληψία.

Τα προκύπτοντα σήματα Δ.Χ. στο Παράδειγμα 2.1 επιδεικνύονται στο Σχήμα 2.14.



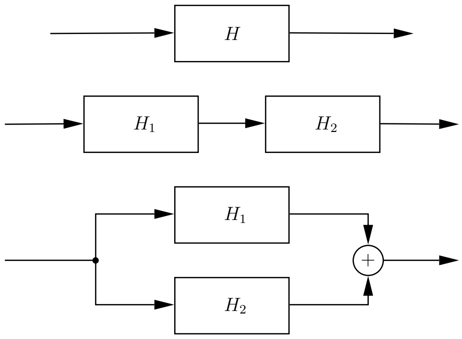
Σχήμα 2.14: Δειγματοληψία συνημιτονοειδούς σήματος για διάφορες τιμές της περιόδου δειγματοληψίας.

2.8 Σύστημα

Είναι διαδικασία που επιφέρει το μετασχηματισμό ενός σήματος. Συμβολικά λέμε:

$$x(t) \longrightarrow y(t) \qquad x[n] \longrightarrow y[n]$$
$$y(t) = \mathsf{T}\{x(t)\} \qquad y[n] = \mathsf{T}\{x[n]\}.$$

Συστήματα μπορούν να συνδεθούν σε σειρά ή παράλληλα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.15.

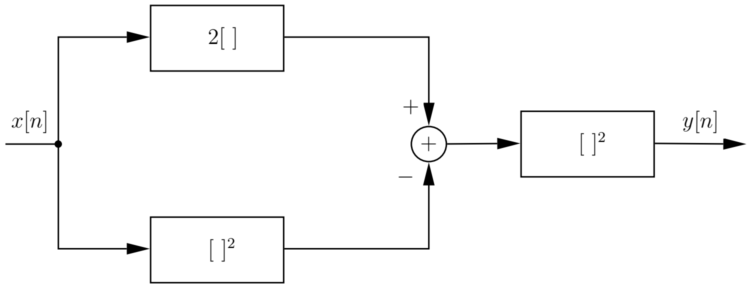


Σχήμα 2.15: Διασυνδέσεις συστημάτων.

Παράδειγμα 2.2. Να αναπαραστήσετε σχηματικά το σύστημα που ορίζεται από την σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = (2\,x[n] - x^2[n])^2. \tag{2.39}$$

Η σχηματική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Σύστημα του Παραδείγματος 2.2.

Τα συστήματα μπορούν επίσης να διασυνδεθούν σε συνδεσμολογία ανάδρασης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνδεσμολογίας ανάδρασης μελετάται στο Παράδειγμα 2.3.

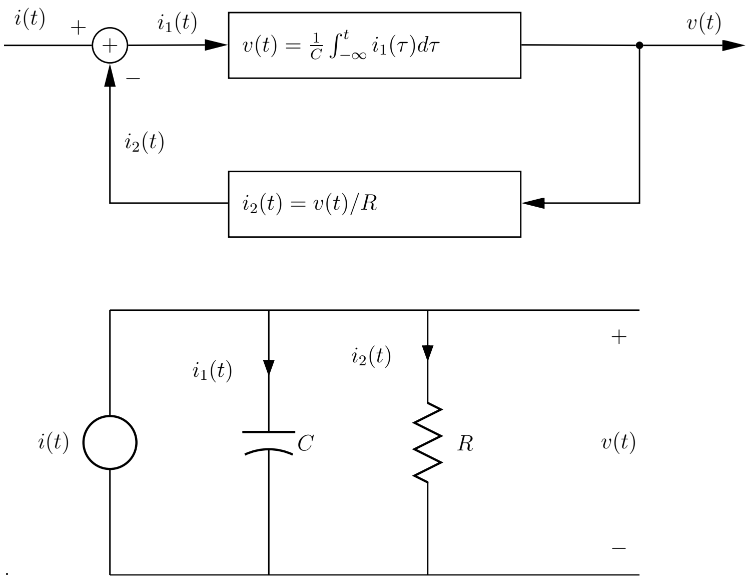
Παράδειγμα 2.3. Το παράλληλο RC κύκλωμα του Σχήματος 2.17 διεγείρεται από μιά πηγή ρεύματος $i(t)$. Προφανώς η αντίσταση R διαρρέεται από ρεύμα $i_2(t)$ που δίνεται από τη σχέση

$$i_2(t) = \frac{v(t)}{R} \tag{2.40}$$

ενώ η τάση $v(t)$ που αναπτύσσεται στα άκρα του πυκνωτή σχετίζεται με το ρεύμα που τον διαρρέει δια της

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)d\tau. \tag{2.41}$$

Αλλά $i_1(t) = i(t) - i_2(t)$, οπότε ενόσω αυξάνει η τάση στα άκρα του πυκνωτή, ολοένα και ισχυρότερο ρεύμα διαρρέει την αντίσταση και αναγκάζει τον πυκνωτή να εκφορτιστεί.



Σχήμα 2.17: Απλή συνδεσμολογία ανάδρασης.

2.8.1 Ιδιότητες συστημάτων

1) **Σύστημα χωρίς μνήμη**: Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την τιμή της εισόδου την ίδια στιγμή, π.χ.

$$y(t) = a\, x(t). \tag{2.42}$$

2) **Σύστημα με μνήμη**: Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τις προγενέστερες

τιμές της εισόδου, π.χ.

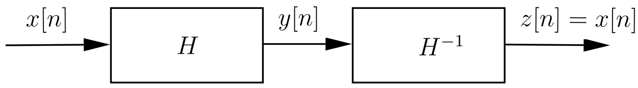
$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$y(t) = x(t-1)$

η τάση στα άκρα του πυκνωτή.

3) **Αντιστρέψιμο σύστημα**: Διακριτές είσοδοι οδηγούν σε διακριτές εξόδους (Σχήμα 2.18), π.χ.

Ευθύ: $y(t) = 2\,x(t)$.	Αντίστροφο: $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$.	Τότε $z(t) = x(t)$.
Ευθύ: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$.	Αντίστροφο: $z[n] = y[n] - y[n-1]$.	Τότε $z[n] = x[n]$.



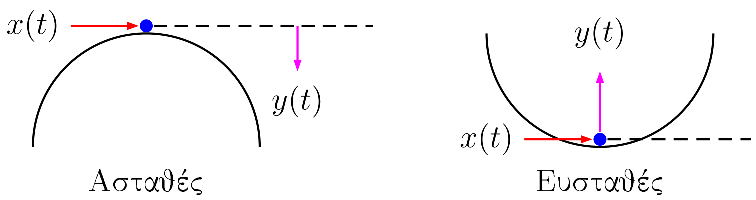
Σχήμα 2.18: Διασύνδεση ευθέος και αντίστροφου συστήματος.

4) **Αιτιατότητα**(causality): Ένα σύστημα λέγεται αιτιατό, εάν η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την είσοδο στην παρούσα στιγμή και το παρελθόν.

Πίνακας 2.3: Παραδείγματα αιτιατών και μη-αιτιατών συστημάτων.

Παραδείγματα	
αιτιατών συστημάτων	μη αιτιατών συστημάτων
$y(t) = x(t-1)$	$y[n] = x[n] - x[n+1]$
$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$y(t) = x(t+1)$
Συστήματα χωρίς μνήμη	$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$

5) **Ευστάθεια** (stability): Ευσταθές καλείται το σύστημα εκείνο για το οποίο μικρές μεταβολές της εισόδου οδηγούν σε φραγμένες μεταβολές της εξόδου, π.χ. η κατακόρυφη απομάκρυνση $y(t)$ της σφαίρας στο κοίλο του Σχήματος 2.19 μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη, ακόμη και για μικρή μεταβολή της δύναμης $x(t)$ που τη διεγείρει. Τούτο δεν συμβαίνει



Σχήμα 2.19: Ασταθή και ευσταθή συστήματα.

όταν η σφαίρα είναι μέσα στην κυρτή επιφάνεια. Εάν $|x[n]| < B$ συνεπάγεται $|y[n]| < C$, τότε το σύστημα λέγεται ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO: Bounded input-bounded output).

6) **Χρονοαμεταβλητότητα** (time-invariance): Χρονική μετατόπιση της εισόδου προκαλεί χρονική μετατόπιση της εξόδου κατά το ίδιο ποσό, δηλαδή αν $y[n] = \mathsf{T}\{x[n]\}$, τότε $y[n-n_0] = \mathsf{T}\{x[n-n_0]\}$.

7) **Γραμμικότητα**: Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

   1. Προσθετικότητα: Αν $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ και $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \tag{2.43}$$

   ή

$$\mathsf{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathsf{T}\{x_1(t)\} + \mathsf{T}\{x_2(t)\} \tag{2.44}$$

   2. Ομοιογένεια: Αν $x(t) \rightarrow y(t)$ και $a \neq 0$, τότε

$$ax(t) \rightarrow ay(t) \text{ ή } \mathsf{T}\{ax(t)\} = a\mathsf{T}\{x(t)\}. \tag{2.45}$$

   Παραδείγματα μη γραμμικών συστημάτων: $y(t) = x^2(t)$, $y(t) = \sin[x(t)]$.

Για τα γραμμικά συστήματα **μόνο** ισχύει η αρχή της **υπέρθεσης** (superposition), δηλαδή αν

$$x[n] = \sum_k a_k\, x_k[n] \tag{2.46}$$

τότε

$$y[n] = \mathsf{T}\{x[n]\} = \mathsf{T}\{\sum_k a_k\, x_k[n]\} = \sum_k a_k\, \mathsf{T}\{x_k[n]\} = \sum_k a_k\, y_k[n]. \tag{2.47}$$

Σημαντική παρατήρηση: Στα γραμμικά συστήματα ισχύει:

$$\text{μηδενική είσοδος} \rightarrow \text{μηδενική έξοδος.}$$

Το σύστημα $y[n] = 2x[n] + 3$ **δεν** είναι γραμμικό, μολονότι η εξίσωση είναι γραμμική. Λέμε ότι είναι στοιχειωδώς γραμμικό σύστημα (incrementally linear system).