Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα - Λυμένες ασκήσεις

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα

3.8 Λυμένες ασκήσεις

3.8.1. (α) Θεωρήστε την είσοδο $x[n]$ και την κρουστική απόκριση (ή απόκριση μοναδιαίου δείγματος) που δίνονται από τις

$$x[n] = a^n u[n] \quad (3.8.1)$$

$$h[n] = u[n]. \quad (3.8.2)$$

Να υπολογίσετε την $y[n] = (h * x)[n]$, αν $0 < a < 1$.

(β) Έστω

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (3.8.3)$$

και

$$h[n] = \begin{cases} a^n & \text{αν } 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (3.8.4)$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την $y[n] = (h * x)[n]$.

Λύση:

(α) Αναλυτικός υπολογισμός:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n}}_{n-k\geq 0 \Leftrightarrow k\leq n} a^k u[k] = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k u[k]}_{k\geq 0} = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0 \tag{3.8.5}$$

Γραφικός υπολογισμός: Τα σήματα $x[n]$ και $h[n]$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 3.8.1(α′). Στο Σχήμα 3.8.1(β′) σχεδιάζεται η $h[n-k]$ για $n=-2$ και $n=2$, αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για $n<0$ $h[n-k]$ και $x[k]$ δεν επικαλύπτονται, άρα η έξοδος είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Για $n>0$ υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των $x[k]$ και $h[n-k]$ στο διάστημα $0\leq k\leq n$:

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} a^k & \text{αν } 0\leq k\leq n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3.8.6}$$

Άρα

$$y[n] = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) u[n]. \tag{3.8.7}$$

Για $n\to\infty$ έχουμε $y[n]\to\frac{1}{1-a}$. Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.8.1(γ′).

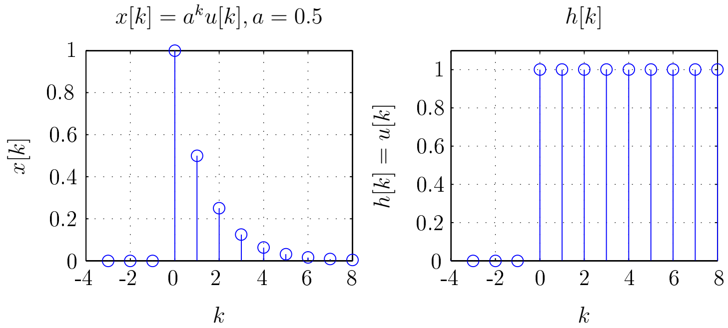
(β) Η διέγερση και η κρουστική απόκριση σχεδιάζονται στο Σχήμα 3.8.2(α′). Ας διερευνήσουμε τον υπολογισμό της τιμής της εξόδου για τις διάφορες δυνατές περιπτώσεις:

1) $n<0$: π.χ. η γραφική παράσταση της μετατοπισμένης και αντεστραμμένης κρουστικής απόκρισης για $n=-2$, δηλαδή $h[-2-k]$, σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(β′). Επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των $x[n]$ και $h[n-k]$, $y[n]=0$.

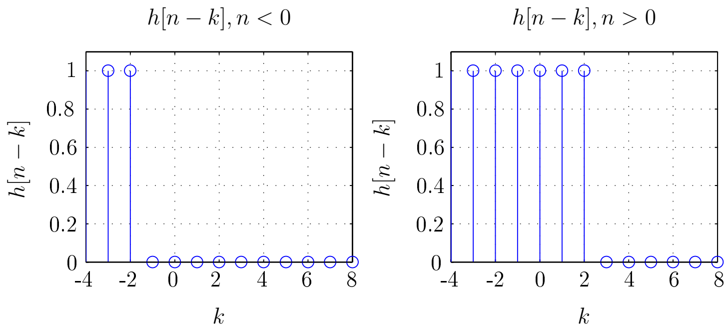
2) $\left.\begin{array}{l} n\geq 0 \\ n\leq 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0\leq n\leq 4$: οπότε εισέρχεται το προπορευόμενο μέτωπο της μετατοπισμένης και αντεστραμμένης κρουστικής απόκρισης στο πεδίο ορισμού της διέγερσης και δεν εξέρχεται απ' αυτό, π.χ. για $n=2$, δηλαδή $h[2-k]$, που σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(β′). Γι′ αυτές τις τιμές του n η έξοδος είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \overset{\lambda=n-k}{=} \sum_{\lambda=n}^{0} a^{\lambda} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \tag{3.8.8}$$

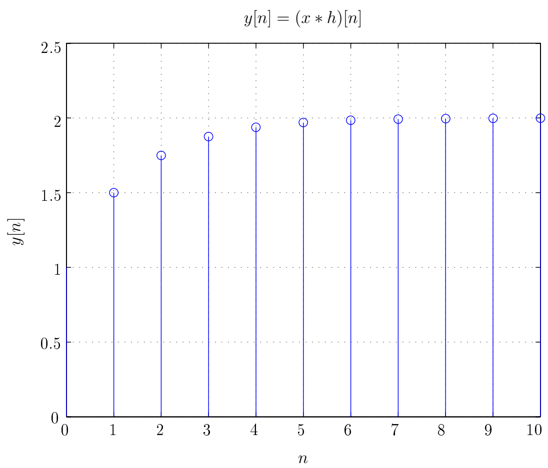
3) $\left.\begin{array}{l} n>4 \\ n-6\leq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 4<n\leq 6$: οπότε εξέρχεται το προπορευόμενο μέτωπο της μετατοπισμένης και αντεστραμμένης κρουστικής απόκρισης από το πεδίο ορισμού



(α΄) Διέγερση και κρουστική απόκριση

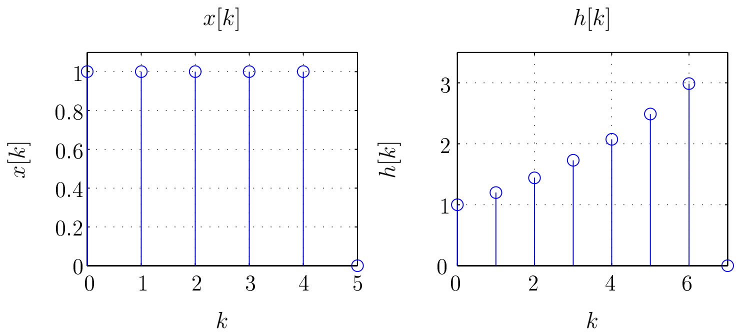


(β΄) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση

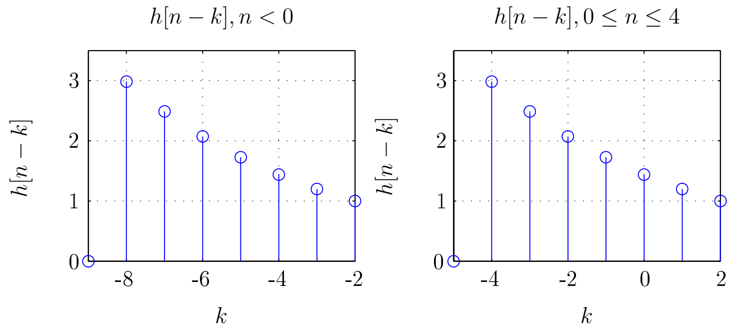


(γ΄) Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

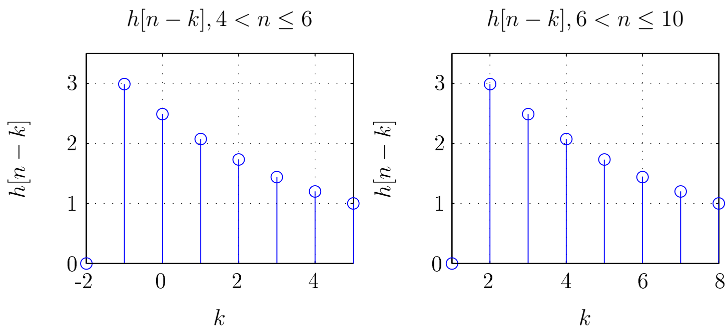
Σχήμα 3.8.1: Υπολογισμός συνέλιξης των $x[n] = a^n u[n]$ και $h[n] = u[n]$.



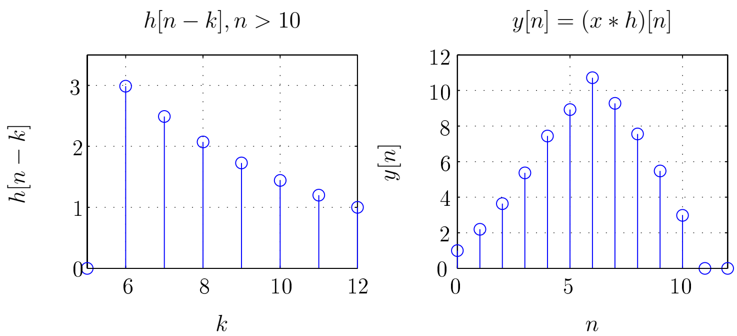
(α΄) Διέγερση και κρουστική απόκριση



(β΄) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για τις περιπτώσεις 1 και 2



(γ΄) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για τις περιπτώσεις 3 και 4



(δ΄) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για την περίπτωση 5 και απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

Σχήμα 3.8.2: Συνέλιξη των $x[n]$ και $h[n]$ που δίνονται από τις (3.8.3) και (3.8.4) αντιστοίχως.

της διέγερσης αλλά η ουρά της κρουστικής απόκρισης δεν εισέρχεται στο πεδίο ορισμού της διέγερσης, π.χ. για $n = 5$, δηλαδή $h[5-k]$, που σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(γ′). Γι′ αυτές τις τιμές του n η έξοδος είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} a^{n-k} = \frac{a^{n-4} - a^{n+1}}{1-a} \tag{3.8.9}$$

4) $\left.\begin{array}{l} n > 6 \\ n-6 \leq 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 6 < n \leq 10$: οπότε το προπορευόμενο μέτωπο της μετατοπισμένης και αντεστραμμένης κρουστικής απόκρισης εξακολουθεί να είναι εκτός του πεδίου ορισμού της διέγερσης, αλλά η ουρά της κρουστικής απόκρισης τώρα εισέρχεται στο πεδίο ορισμού της διέγερσης, π.χ. για $n = 8$, δηλαδή $h[8-k]$, που σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(γ′). Γι′ αυτές τις τιμές του n η έξοδος είναι

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} a^{n-k} \overset{r=k-n+6}{=} \sum_{r=0}^{10-n} a^{6-r} = \frac{a^{n-4} - a^{7}}{1-a} \tag{3.8.10}$$

5) $n-6 > 4 \Rightarrow n > 10$: οπότε και η ουρά της κρουστικής απόκρισης εξέρχεται από το πεδίο ορισμού της διέγερσης, π.χ. για $n = 12$, δηλαδή $h[12-k]$, που σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(δ′). Επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των $x[n]$ και $h[n-k]$, $y[n] = 0$.

Η απόκριση του συστήματος σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.2(δ′).

3.8.2. (α) Έστω Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου με

$$x(t) = \exp(-at)\, u(t), \quad a > 0 \tag{3.8.11}$$

$$h(t) = u(t). \tag{3.8.12}$$

Ποιά είναι η έξοδος του συστήματος $y(t)$;

(β) Να υπολογιστεί η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{αν } 0 \leq t \leq 2\,T \\ 0 & \text{αλλού,} \end{cases} \tag{3.8.13}$$

όταν διεγείρεται με σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.8.14}$$

Λύση:

(α) Αναλυτικός υπολογισμός:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau. \tag{3.8.15}$$

Για να εξειδικεύσουμε την (3.8.15) προβαίνουμε στην εξής διερεύνηση

$$\begin{array}{ll} \text{Για } t \le 0: & y(t) = 0. \\ \text{Για } t > 0: & y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = -\frac{1}{a}\left[e^{-a\tau}\right]_0^t = -\frac{1}{a}\left(e^{-at}-1\right) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right). \end{array} \tag{3.8.16}$$

Ο γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης επεξηγείται στο Σχήμα 3.8.3. Η διέγερση και η κρουστική απόκριση σχεδιάζονται στο Σχήμα 3.8.3(α′). Η μετατοπισμένη και αντεστραμμένη κρουστικη απόκριση $h(t-\tau)$ για $t < 0$ και $t > 0$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 3.8.3(β′). Η απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.8.3(γ′).

(β) Συνιστάται η γραφική μέθοδος για τον υπολογισμό της συνέλιξης. Το Σχήμα 3.8.4(α′) δείχνει το σήμα διέγερσης $x(t)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Βλέπουμε ότι

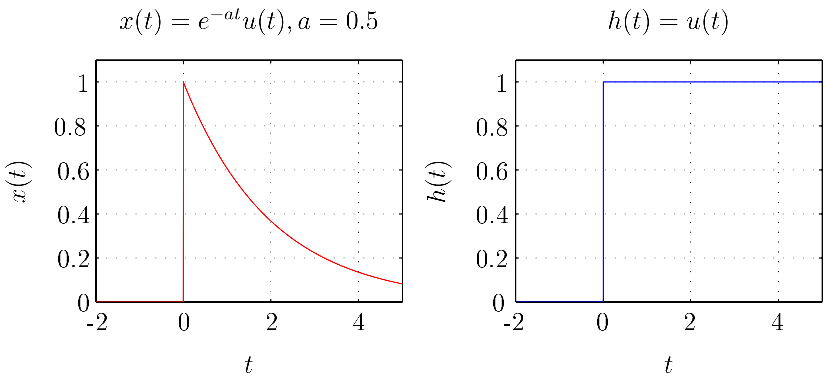
1. Για $t < 0$, όπως για $h(t-\tau)$ με $t = -1$ και $T = 2$ που σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(β′) έχουμε $y(t) = 0$.

2. Για $t > 0$ & $t < T$, δηλαδή για $0 < t < T$, όπως για $h(t-\tau)$ με $t = 1$ και $T = 2$ που σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(β′) έχουμε

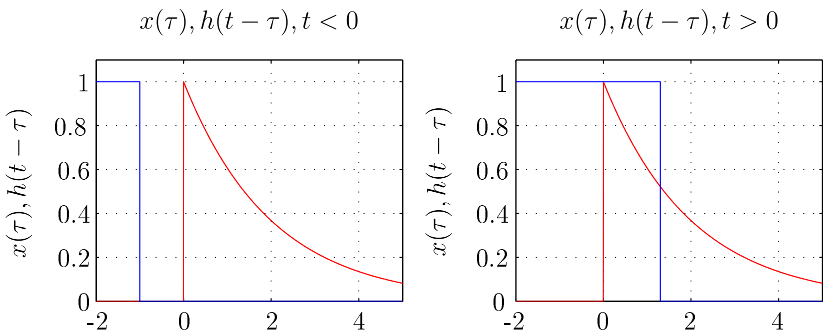
$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)d\tau = -\int_t^0 \omega\, d\omega = \int_0^t \omega\, d\omega = \frac{t^2}{2}. \tag{3.8.17}$$

3. Για $t > T$ & $t < 2T$, δηλαδή για $T < t < 2T$,όπως για $h(t-\tau)$ με $t = 3$ και $T = 2$ που σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(γ′) έχουμε

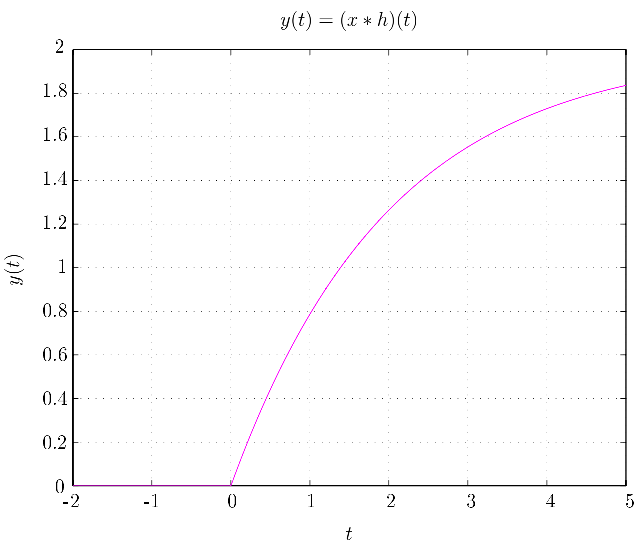
$$y(t) = \int_0^T (t-\tau)d\tau = -\int_t^{t-T} \omega\, d\omega = -\frac{(t-T)^2 - t^2}{2} = T\,t - \frac{1}{2}T^2. \tag{3.8.18}$$



(α΄) Διέγερση και κρουστική απόκριση

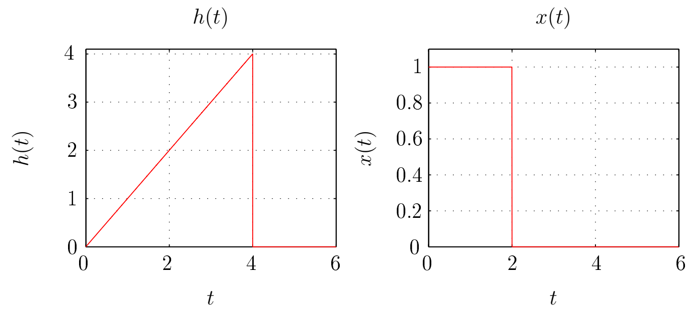


(β΄) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση

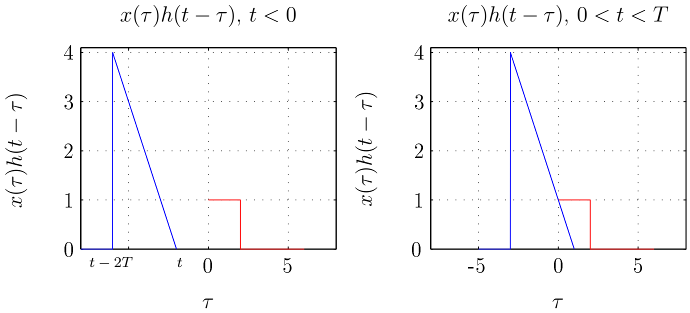


(γ΄) Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

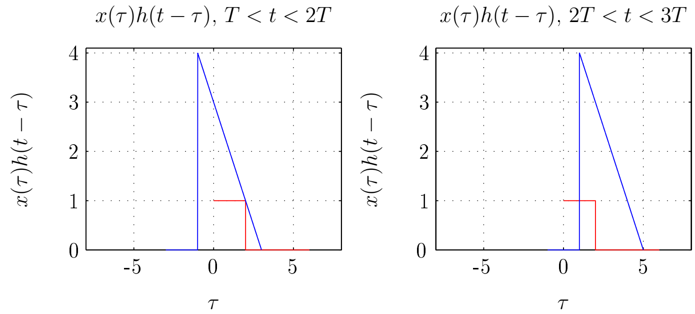
Σχήμα 3.8.3: Υπολογισμός της συνέλιξης των $x(t) = e^{-at}u(t)$ και $h(t) = u(t)$.



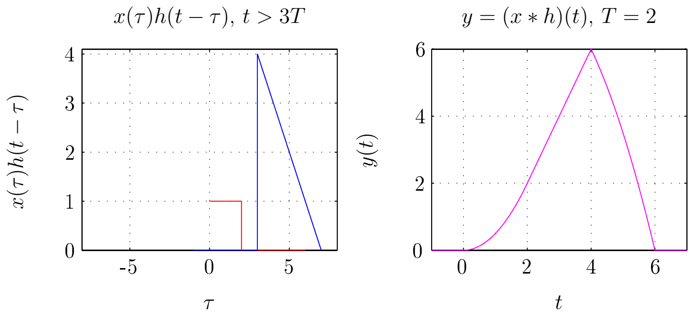
(α′) Διέγερση και κρουστική απόκριση



(β′) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για τις περιπτώσεις 1 και 2



(γ′) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για τις περιπτώσεις 3 και 4



(δ′) Αντεστραμμένη και μετατοπισμένη κρουστική απόκριση για την περίπτωση 5 και απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος

Σχήμα 3.8.4: Σήματα $x(t)$, $h(t)$ και $h(t-\tau)$. Γραφικός υπολογισμός συνέλιξης που επιλύει την Άσκηση 3.8.2 για $T=2$.

4. Για $t > 2T$ & $t - 2T < T$, δηλαδή $2T < t < 3T$,όπως για $h(t-\tau)$ με $t = 5$ και $T = 2$ που σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(γ′) έχουμε
$$y(t) = \int_{t-2T}^{T} (t-\tau) d\tau = -\int_{2T}^{t-T} \omega \, d\omega = \frac{1}{2}\left[(2T)^2 - (t-T)^2\right] = -\frac{1}{2}t^2 + T\,t + \frac{3}{2}T^2. \tag{3.8.19}$$

5. Τέλος για $t > 3T$, όπως για $h(t-\tau)$ με $t = 7$ και $T = 2$ που σχεδιάζεται στο αριστερό υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(δ′) έχουμε $y(t) = 0$.

Η έξοδος $y(t)$ του Γ.Χ.Α. συστήματος σχεδιάζεται στο δεξί υπογράφημα του Σχήματος 3.8.4(δ′).