Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα

3.1 Εισαγωγή

- **Βασικές ιδιότητες συστημάτων**:
  - γραμμικότητα
  - χρονοαμετάβλητο.
- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Αντικειμενικοί σκοποί της ενότητας:
  α) Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
  β) Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Βασικό πλεονέκτημα: η αρχή της υπέρθεσης: Εάν

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots, \tag{3.1}$$

και $y_i(t) = \mathsf{T}\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε

$$y(t) = \mathsf{T}\{x(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots \tag{3.2}$$

- Ερώτημα: Ποιά είναι τα βασικά σήματα $x_i(t)$ στα οποία πρέπει να αναλύσουμε ένα δοσμένο σήμα $x(t)$ στην (3.1);

- Στην ενότητα αυτή θα στηριχθούμε στη **συνάρτηση μοναδιαίας ώσης**. Θα δούμε ότι αποτελεί δομικό στοιχείο για την αποσύνθεση γενικών σημάτων τόσο στο συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο. Η διαπίστωση αυτή μαζί με τις αρχές της υπέρθεσης και του χρονοαμετάβλητου μας επιτρέπει να αναπτύξουμε έναν πλήρη χαρακτηρισμό οποιουδήποτε Γ.Χ.Α. συστήματος με όρους της απόκρισής του σε σήμα μοναδιαίας ώσης (αλλιώς γνωστής και ως κρουστικού παλμού). Η απόκριση αυτή είναι γνωστή ως **κρουστική απόκριση**. Αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση, τότε

$$\text{σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος} \left\langle \begin{array}{l} \text{άθροισμα συνέλιξης στο διακριτό χρόνο} \\ \\ \text{ολοκλήρωμα συνέλιξης στο συνεχή χρόνο.} \end{array} \right.$$

- Επομένως διαπιστώνεται αναλυτική ευκολία στο χειρισμό Γ.Χ.Α. συστημάτων.

- Θα επιστρέψουμε στις ιδιότητες των Γ.Χ.Α. συστημάτων, που ορίσαμε ποιοτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, για να τις περιγράψουμε με μαθηματικούς όρους. Θα διαπιστώσουμε ότι οι ιδιότητες αυτές με χρήση της συνέλιξης εξειδικεύονται σε ιδιότητες που πρέπει να πληροί η κρουστική απόκριση.

- Θα μας απασχολήσει το ερώτημα: Ποιά είναι η τάξη (δηλαδή η οικογένεια) των δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου που είναι Γ.Χ.Α. συστήματα; Θα δούμε ότι πρόκειται για υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές στο συνεχή χρόνο. Ομοίως στο διακριτό χρόνο θα αντιστοιχούν σε υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.

- Από την ανάλυση της ενότητας αυτής θα φανεί ότι ο υπολογισμός της εξόδου ενός Γ.Χ.Α. δια της συνέλιξης είναι σχετικώς πολύπλοκος. Από την εμπειρία μας, η επίλυση Γ.Δ.Ε. στο πεδίο του χρόνου είναι επίσης πολύπλοκη. Άρα γεννιέται το ερώτημα: Υπάρχουν τεχνικές που μπορούν να μας διευκολύνουν; Τέτοιες τεχνικές εδράζονται σε πεδία μετασχηματισμών, όπως οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace στο συνεχή χρόνο και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier διακριτού χρόνου και $\mathcal{Z}$.

3.2 Αναπαράσταση σημάτων με κρουστικούς παλμούς

- Κρουστικός παλμός: Βασική δομική μονάδα στην κατασκευή μιας ευρείας τάξης σημάτων.

- **Περίπτωση διακριτού χρόνου**: Είναι γνωστό ότι:

$$\begin{aligned} x[-1]\delta[n+1] &= \begin{cases} x[-1] & \text{αν } n=-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \\ x[0]\delta[n] &= \begin{cases} x[0] & \text{αν } n=0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Γενικότερα:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{3.4}$$

δηλαδή, κάθε ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων και ανεστραμμένων συναρτήσεων μοναδιαίας ώσης $\delta[n-k]$, όπου οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού είναι οι τιμές της ακολουθίας $x[k]$.

Παράδειγμα 3.1. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε το κύρος της (3.4) αν ανακαλέσουμε από τη μνήμη μας τον ορισμό της συνάρτησης βήματος $u[n]$. Έχουμε:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{αν } n<0 \\ 1 & \text{αν } n \geq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

ή ισοδύναμα

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]. \tag{3.6}$$

Προφανώς η (3.6) επαληθεύει την αποσύνθεση (3.4).

Η (3.4) λέγεται **ιδιότητα της ολίσθησης της συνάρτησης μοναδιαίας ώσης** στο διακριτό χρόνο.

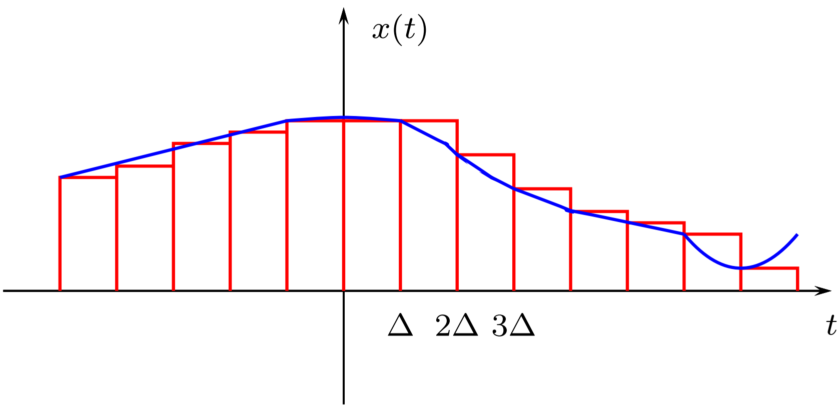
- **Περίπτωση συνεχούς χρόνου**: Η περίπτωση του διακριτού χρόνου, που αναλύσαμε, μπορεί να μας βοηθήσει να καταλάβουμε την πιό δύσκολη περίπτωση του συνεχούς χρόνου. Ας ξαναθυμηθούμε τη συνάρτηση $\delta_\Delta(t)$ που γνωρίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, ελαφρώς παραλλαγμένη:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{αν } 0<t<\Delta \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Τότε οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ μπορεί να προσεγγιστεί με "σκαλοπάτια" (staircases) δια της $\widehat{x}(t)$ ως εξής:

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t-k\Delta)\, \Delta. \tag{3.8}$$

Το Σχήμα 3.1 δίνει μια εποπτική παράσταση της αποσύνθεσης (3.8). Στο όριο για $\Delta \to 0$

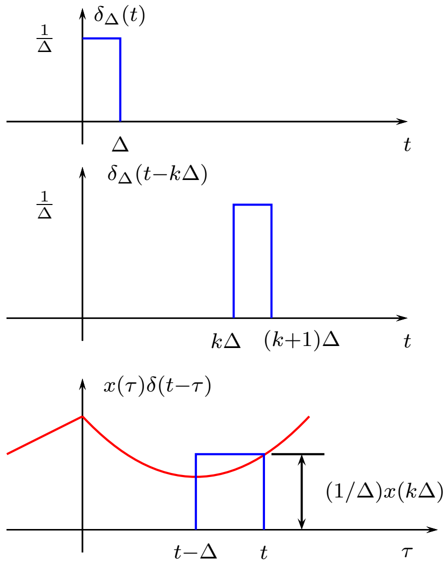


Σχήμα 3.1: Αποσύνθεση σήματος συνεχούς χρόνου.

παίρνουμε $k\Delta \to \tau$, $x(k\Delta) \to x(\tau)$, $\delta_\Delta(t-k\Delta) \to \delta(t-\tau)$, $\Delta \to d\tau$ και το άθροισμα (3.8) αντικαθίσταται με ολοκλήρωμα, ενώ $\widehat{x}(t) \to x(t)$. Οπότε:

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t-k\Delta)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \tag{3.9}$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης, ανακαλώντας από τη μνήμη του στοιχειώδεις γνώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης, μπορεί να ερμηνεύσει την (3.8) ως αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος (3.9) με τη μέθοδο του τραπεζίου, όπου αντικειμενικός σκοπός είναι ο υπολογισμός του εμβαδού κάτω από την καμπύλη που ορίζει η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Το Σχήμα 3.2 επεξηγεί παραστατικά τον υπολογισμό των εμβαδών. Ένα άλλο στοιχείο που αξίζει να προσεχθεί είναι η μετάβαση από τη συνάρτηση $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ στη συνάρτηση $\delta(t-\tau)$. Ενώ η πρώτη συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ως συνάρτηση του t, η δεύτερη συνάρτηση είναι συνάρτηση του τ. Η συνάρτηση $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ λαμβάνει την τιμή 1 για $k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta$. Η συνάρτηση $\delta(t-\tau)$ λαμβάνει την τιμή 1 για $t-\Delta \leq \tau \leq t$.



Σχήμα 3.2: Συναρτήσεις $\delta_\Delta(t)$ και $\delta_\Delta(t-k\Delta)$. Υπολογισμός στοιχειώδους εμβαδού $x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$.

Παράδειγμα 3.2. Θα επαληθεύσουμε και πάλι την ισχύ της (3.9) στην περίπτωση της συνάρτησης βήματος $u(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\delta(t-\tau)d\tau = u(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u(t) \quad (3.10)$$

όπου κάναμε χρήση των δύο ταυτοτήτων που ισχύουν για τις συναρτήσεις δέλτα, δηλαδή:

$$u(\tau)\delta(t-\tau) = u(t)\delta(t-\tau) \quad (3.11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau \equiv 1. \quad (3.12)$$

Εξάλλου

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{αν } t<0 \\ 1 & \text{αν } t>0 \end{cases} = u(t). \quad (3.13)$$

- Συμπερασματικά δείξαμε ότι οποιοδήποτε σήμα μπορεί να αποσυντεθεί ως τρένο κρουστικών παλμών που έχουν πλάτος τις τιμές του σήματος στις χρονικές στιγμές που συμβαίνουν οι συναρτήσεις δέλτα, δηλαδή

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{3.14}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

3.3 Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος διακριτού χρόνου

3.3.1 Άθροισμα συνέλιξης

Δείξαμε ότι οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να αναλυθεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{3.16}$$

Έστω $h_k[n]$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta[n-k]$, τότε λόγω υπέρθεσης

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h_k[n]. \tag{3.17}$$

Επομένως εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σ′ ένα σύνολο μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων, μπορούμε να την έκατασκευάσουμεξοδο σε οποιαδήποτε είσοδο. Ένα παράδειγμα δείχνεται στο Σχήμα 3.3.

Ας συμβολίσουμε την απόκριση του συστήματος σε διέγερση $\delta[n]$ με $h[n]$, την οποία εφεξής θα ονομάζουμε **κρουστική απόκριση**. Δηλαδή

$$h[n] = \mathsf{T}\{\delta[n]\}. \tag{3.18}$$

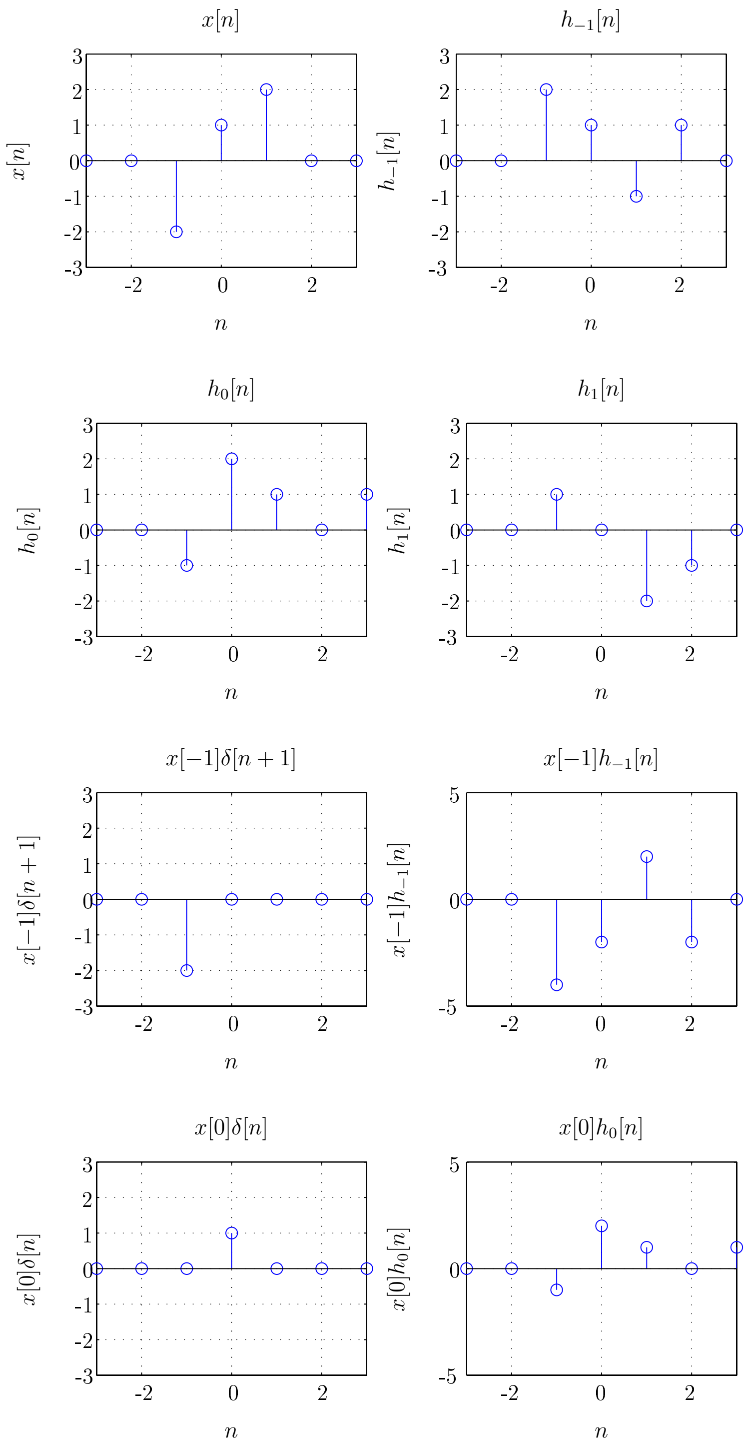
Προφανώς $h[n] = h_0[n]$. Αν το σύστημα είναι επιπλέον χρονοαμετάβλητο, τότε η κατάσταση απλοποιείται περισσότερο, γιατί

$$h_k[n] = h[n-k] \tag{3.19}$$

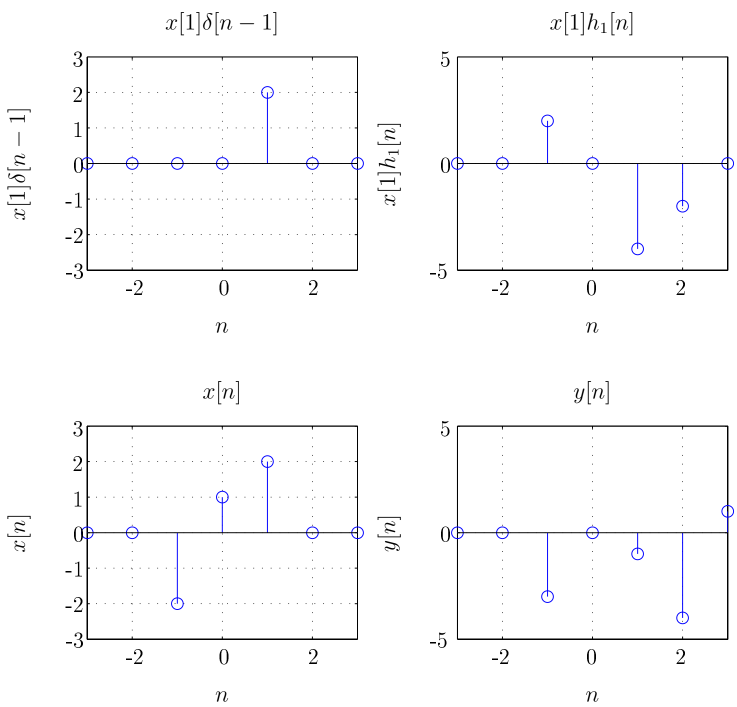
οπότε η (3.17) παίρνει τη μορφή του **αθροίσματος της συνέλιξης**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \stackrel{\triangle}{=} (x*h)[n]. \tag{3.20}$$

Η (3.20) προσδιορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος διακριτού χρόνου είναι γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων και ανεστραμμένων κρουστικών αποκρίσεων (όπως στο Σχήμα 3.4) με συντελεστές τις τιμές της διεγέρσεως στις διάφορες χρονικές στιγμές. Ας ξαναγρά-



Σχήμα 3.3: Υπολογισμός της εξόδου γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου: Έστω διέγερση $x[n$. Αν γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος $h_k[n]$ σε $\delta[n-k]$ για $m=-1,0,1$, τότε αποσυνθέτοντας τη διέγερση σε τρένο παλμών $\delta[n-k$ μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση σε κάθε συνιστώσα του αθροίσματος και να υπολογίσουμε την έξοδο του του γραμμικού συστήματος Δ.Χ. στη διέγερση $x[n]$ (συνεχίζεται)



Σχήμα 3.3 (συνέχεια): προσθέτοντας τις επιμέρους αποκρίσεις.

ψουμε με τη χρήση της συνέλιξης την (3.14):

$$x[n] = (x * \delta)[n]. \tag{3.21}$$

Άρα μπορούμε να αντιμετωπίζουμε τη συνάρτηση $\delta[n]$ σαν **το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης**.

3.3.2 Βασικές ιδιότητες της συνέλιξης

1. Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$(x * h)[n] = (h * x)[n]. \tag{3.22}$$

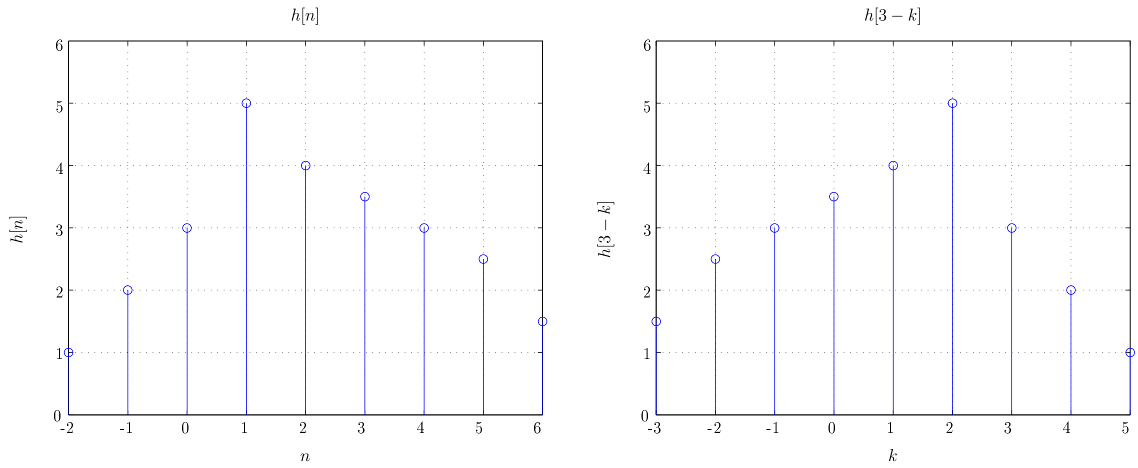
Πράγματι

$$(x * h)[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \overset{n-k=l}{=} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n-l]\, h[l] \triangleq (h * x)[n]. \tag{3.23}$$

2. Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$[x * (h_1 * h_2)][n] = [(x * h_1) * h_2][n]. \tag{3.24}$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα αξιοποιείται στον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του Γ.Χ.Α. συστήματος που ισοδυναμεί με τη σειριακή διασύνδεση ή συνδεσμολογία αλυ-



(α) (β)

Σχήμα 3.4: (α) Κρουστική απόκριση $h[n]$. (β) Μετατοπισμένο και αντεστραμμένο αντίγραφο της κρουστικής απόκρισης $h[3-k]$.

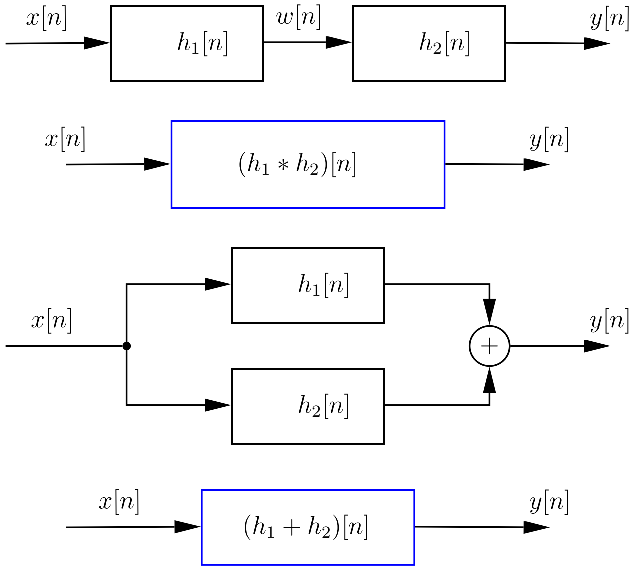
σίδας δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων. Η συνδεσμολογία αλυσίδας Γ.Χ.Α. συστημάτων είναι ανεξάρτητη της σειράς με την οποία συνδέονται τα συστήματα.

3. Επιμεριστική ιδιότητα:

$$[x * (h_1 + h_2)]\,[n] = (x * h_1)[n] + (x * h_2)[n]. \tag{3.25}$$

Η επιμεριστική ιδιότητα αξιοποιείται στον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του Γ.Χ.Α. συστήματος που ισοδυναμεί με την παράλληλη συνδεσμολογία δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων. Η παράλληλη συνδεσμολογία δύο συστημάτων μπορεί να αντικατασταθεί από ένα σύστημα που έχει ως κρουστική απόκριση το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των επιμέρους συστημάτων. Το Σχήμα 3.5 δείχνει τις συνδεσμολογίες αλυσίδας και την παράλληλη συνδεσμολογία δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων καθώς και τα ισοδύναμα Γ.Χ.Α. συστήματα σε κάθε περίπτωση.

Προσοχή: Τα συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν **μόνο** για Γ.Χ.Α. συστήματα. Η απόκριση μοναδιαίου δείγματος **δεν** χαρακτηρίζει πλήρως τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος. Τούτο γίνεται φανερό στο Παράδειγμα 3.3.



Σχήμα 3.5: Σειριακή και παράλληλη συνδεσμολογίες Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Παράδειγμα 3.3. Έστω η απόκριση μοναδιαίου δείγματος

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.26}$$

Το **μοναδικό** Γ.Χ.Α. σύστημα που έχει τέτοια κρουστική απόκριση είναι μόνο το:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]. \tag{3.27}$$

Υπάρχουν **πολλά** μη γραμμικά συστήματα που έχουν αυτή την απόκριση σε είσοδο $\delta[n]$ π.χ.

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2 \tag{3.28}$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1]) \tag{3.29}$$

όπου $\max(a, b)$ ο μέγιστος των a και b.

Απόδειξη: Για το Γ.Χ.Α. σύστημα (3.27) έχουμε

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.30}$$

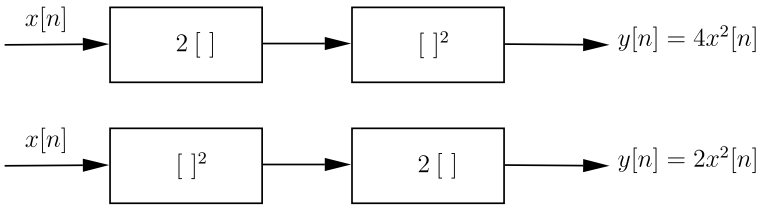
Για το μη γραμμικό σύστημα (3.28) προκύπτει ότι η απόκριση σε είσοδο $\delta[n]$ είναι

$$h_1[n] = (\delta[n] + \delta[n-1])^2 = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.31}$$

Παρομοίως για το σύστημα (3.29) ισχύει

$$h_2[n] = \max(\delta[n], \delta[n-1]) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0,1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.32}$$

Εξάλλου στα μη γραμμικά συστήματα οι τελεστές δεν αντιμετατίθενται, όπως εύγλωττα υποδεικνύει το Σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6: Η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει για μη γραμμικά συστήματα.

3.4 Απόκριση Γ.Χ.Α. συνεχούς χρόνου. Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να θεμελιώσει τον πλήρη χαρακτηρισμό ενός Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου με όρους της κρουστικής απόκρισης. Έστω ένα Γ.Χ.Α. σύστημα που διεγείρεται από σήμα $x(t)$ και παράγει απόκριση $y(t)$. Είδαμε ότι η διέγερση μπορεί να αποσυντεθεί ως

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta. \tag{3.33}$$

Έστω $h_{k\Delta}(t)$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ τότε:

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, h_{k\Delta}(t)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau \tag{3.34}$$

όπου $h_\tau(t)$ είναι η απόκριση του συστήματος σε είσοδο $\delta(t - \tau)$. Το ίδιο θα μπορούσε να επιτευχθεί και με εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης στην

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau. \tag{3.35}$$

Για την (3.34) μοναδική απαίτηση είναι το σύστημα να είναι γραμμικό. Αν επιπλέον είναι και χρονοαμετάβλητο τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \triangleq (x * h)(t). \tag{3.36}$$

Η (3.36) ορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου δίνεται από το **ολοκλήρωμα της συνέλιξης της διέγερσης με την κρουστική απόκριση**. Για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ισχύουν οι ιδιότητες που είδαμε και στην περίπτωση διακριτού χρόνου:

- Αντιμεταθετικότητα
- Προσεταιριστικότητα
- Επιμεριστικότητα.

Αναγνωρίζουμε πάλι ότι η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης.

3.5 Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων

3.5.1 Γ.Χ.Α. συστήματα με ή χωρίς μνήμη

Ένα σύστημα είναι **αμνήμον**, εάν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό συμβαίνει μόνο αν:

$$h[n] = 0 \quad \forall n \neq 0 \Leftrightarrow \exists K : \quad h[n] = K\,\delta[n] \tag{3.37}$$

όπου $K = h[0]$. Το σύστημα προσδιορίζεται από την

$$y[n] = K\,x[n]. \tag{3.38}$$

Πράγματι,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]h[0] + \sum_{n \neq k} x[k]h[n-k] = Kx[n] \tag{3.39}$$

όπου κάναμε χρήση των

$$\begin{aligned} h[0] &= K \qquad \text{αν } k = n \\ h[n-k] &= 0 \quad \text{αν } k \neq n. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Κατ᾽ αναλογία τα ίδια ισχύουν και για συστήματα συνεχούς χρόνου.

3.5.2 Αντιστρεψιμότητα Γ.Χ.Α. συστημάτων

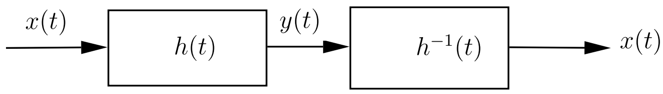
Έστω Γ.Χ.Α. συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(t)$. Εάν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι **αντιστρέψιμο**, τότε έχει Γ.Χ.Α. αντίστροφο σύστημα $h^{-1}(t)$ τέτοιο ώστε

$$(h * h^{-1})(t) = \delta(t). \tag{3.41}$$

Για συστήματα διακριτού χρόνου έχουμε

$$(h * h^{-1})[n] = \delta[n]. \quad (3.42)$$

Το Σχήμα 3.7 επεξηγεί την εξίσωση (3.41).

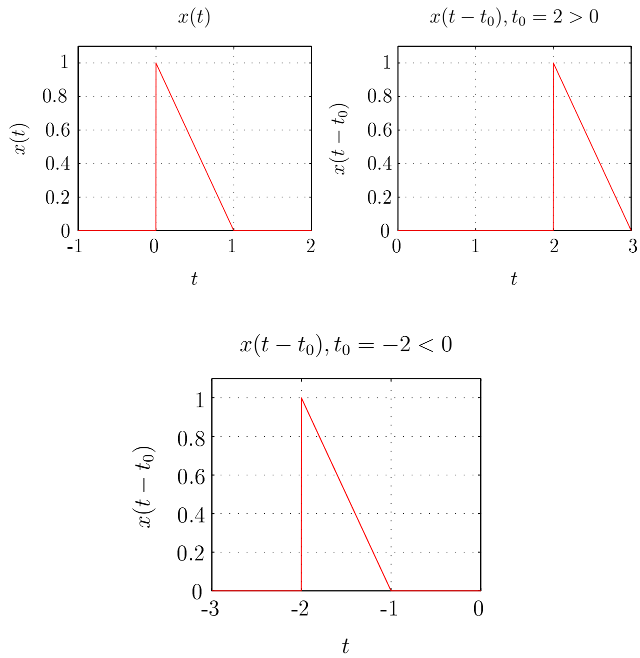


Σχήμα 3.7: Ευθύ και αντίστροφο σύστημα.

Παράδειγμα 3.4. Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα

$$y(t) = x(t - t_0). \quad (3.43)$$

Αν $t_0 > 0$ το σύστημα λέγεται **βαθμίδα καθυστέρησης** (delay), ενώ αν $t_0 < 0$ το σύστημα λέγεται **βαθμίδα προώθησης** (advance). Προφανώς, η κρουστική απόκριση του συστήματος



Σχήμα 3.8: Βαθμίδες καθυστέρησης και προώθησης.

(3.43) είναι

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (3.44)$$

γιατί

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0). \quad (3.45)$$

Το αντίστροφο σύστημα της βαθμίδας καθυστέρησης είναι η βαθμίδα προώθησης, δηλαδή

$$h^{-1}(t) = \delta(t + t_0). \quad (3.46)$$

Πράγματι:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0)\delta(t - \tau + t_0)d\tau = x(\tau - t_0)\,|_{\tau=t+t_0} = x(t). \quad (3.47)$$

Παράδειγμα 3.5. Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n]. \quad (3.48)$$

Η έξοδος του συστήματος αυτού σε αυθαίρετη είσοδο είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \stackrel{n-k>0}{=} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}_{\text{συσσωρευτής ή αθροιστής}}. \quad (3.49)$$

Το σύστημα αυτό είναι αντιστρέψιμο και το αντίστροφό του δίνεται από την

$$z[n] = \underbrace{x[n] - x[n-1]}_{\text{διαφορά πρώτης τάξης}}. \quad (3.50)$$

Αν τροφοδοτήσουμε το σύστημα (3.50) με την έξοδο του συσσωρευτή, δηλαδή αντικαταστήσουμε στη (3.50) όπου $x[n]$ το $y[n]$ από τη (3.49), τότε $z[n] = x[n]$. Η κρουστική απόκριση του συστήματος (3.50) είναι

$$h^{-1}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]. \quad (3.51)$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$(h*h^{-1})[n] = u[n]*(\delta[n]-\delta[n-1]) = (u*\delta)[n]-(u*\delta)[n-1] = u[n]-u[n-1] = \delta[n] \quad (3.52)$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου της συνέλιξης.

3.5.3 Αιτιατότητα Γ.Χ.Α. συστημάτων

Η έξοδος ενός **αιτιατού συστήματος** εξαρτάται μόνο από την παρούσα και τις περασμένες τιμές της εισόδου. Τούτο σημαίνει ότι

$$h[n] = 0 \quad \text{για } n < 0. \quad (3.53)$$

Οπότε:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] \tag{3.54}$$

επειδή αν γίνει η αλλαγή μεταβλητής $m = n - k$

$$h[n-k] = 0 \quad k > n \Leftrightarrow h[m] = 0 \quad m < 0. \tag{3.55}$$

Από τις κρουστικές αποκρίσεις του συσσωρευτή και της διαφοράς πρώτης τάξης του Παραδείγματος 3.5 συνάγεται ότι είναι αιτιατά συστήματα.

3.5.4 Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

Θα μας απασχολήσει εφεξής η **ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου** (Bounded Input-Bounded Output [BIBO] stability). Ένα σύστημα είναι ευσταθές, εάν για κάθε μια φραγμένη είσοδο παράγει φραγμένη έξοδο. Δηλαδή, εάν

$$|x[n]| < B \ \ \forall n \ \ \text{τότε } \exists C\text{:} \quad |y[n]| < C. \tag{3.56}$$

Ας δούμε ποιά είναι η ικανή συνθήκη για να είναι ένα σύστημα ευσταθές.

$$\left.\begin{array}{rl} & |y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \\ \text{αλλά} & |x[n-k]| < B \ \ \forall n,k \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow |y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \ \forall n \quad \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty. \tag{3.57}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (3.57) είναι και αναγκαία συνθήκη. Στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα Γ.Χ.Α. ευσταθές δίνεται από την

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty. \tag{3.58}$$

Παράδειγμα 3.6. Η βαθμίδα χρονικής ολίσθησης είναι ευσταθής, γιατί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 \tag{3.59}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)|d\tau = 1. \tag{3.60}$$

Ένας αθροιστής είναι κλασική περίπτωση ασταθούς συστήματος, γιατί

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| = \infty. \tag{3.61}$$

3.5.5 Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α.συστήματος

Ένα άλλο σήμα το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι η βηματική απόκριση, δηλαδή, η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος σε διέγερση μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Συμβολίζεται με $s(t)$ και $s[n]$ στο συνεχή και διακριτό χρόνο αντιστοίχως. Προφανώς

$$s[n] = (h * u)[n]. \tag{3.62}$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (3.62) ως έξοδο ενός αθροιστή που δέχεται ως είσοδο την $h[n]$. Αλλά τούτο σημαίνει πως

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{3.63}$$

αλλά και ότι ισχύει επίσης

$$h[n] = s[n] - s[n-1]. \tag{3.64}$$

Για συστήματα συνεχούς χρόνου έχουμε:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \tag{3.65}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t). \tag{3.66}$$

Η ενότητα αυτή υποδεικνύει **πώς** μπορούμε να προσδιορίσουμε **πειραματικώς** την κρουστική απόκριση. Η βηματική απόκριση μπορεί να αποκτηθεί πολύ εύκολα εφαρμόζοντας μια διέγερση που υφίσταται για θετικούς χρόνους π.χ. κλείνοντας ένα διακόπτη για να ρεύσει ρεύμα σ᾽ ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Μετρούμε τη βηματική απόκριση και διαφορίζουμε. Ως προς την ανάλυση συστημάτων, η βηματική απόκριση θα θεωρείται παράγωγη έννοια της κρουστικής απόκρισης, γι᾽ αυτό και η μελέτη μας θα επικεντρωθεί στην κρουστική απόκριση και μόνο.

3.6 Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Θα μελετήσουμε την τάξη των συστημάτων συνεχούς χρόνου των οποίων η είσοδος και η έξοδος συσχετίζονται διαμέσου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές, με σκοπό να δούμε πώς σχετίζεται με τα Γ.Χ.Α. συστήματα που μας απασχολούν. Συστήματα που περιγράφονται με όρους Γ.Δ.Ε. περιγράφουν π.χ. κυκλώματα RLC. Κατ΄ αναλογία θα μελετήσουμε και συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Οι Γ.Δ.Ε. αποτελούν αντικείμενο σπουδής στα πλαίσια ενός μαθήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Θα δανειστούμε από τη σπουδή των Γ.Δ.Ε. τα εργαλεία εκείνα που χρειάζονται για την επίλυση των γραμμικών εξισώσεων διαφορών. Οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών μπορούν να περιγράψουν:

- τα κέρδη από μια επένδυση συναρτήσει του χρόνου
- το τρέχον δείγμα φωνής σαν συνάρτηση προηγουμένων δειγμάτων φωνής και της διέγερσης της φωνητικής κοιλότητας
- μέσο όρο δειγμάτων εισόδου.

Η συζήτηση θα περιστραφεί γύρω από το Παράδειγμα 3.7.

Παράδειγμα 3.7. Έστω η Γ.Δ.Ε. σταθερών συντελεστών

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{3.67}$$

Έστω $x(t) = K\cos\omega_0 t\, u(t)$ η διέγερση του συστήματος που περιγράφεται από την (3.67). Η **πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι το άθροισμα της μερικής λύσης** $y_p(t)$ **και της γενικής λύσης της ομογενούς Γ.Δ.Ε.** $y_h(t)$, δηλαδή

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t). \tag{3.68}$$

Ας δούμε ποιά είναι η γενική λύση της ομογενούς Γ.Δ.Ε.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0. \tag{3.69}$$

Έστω λύση της μορφής $y_h(t) = Ae^{st}$. Τότε αντικαθιστώντας στη (3.69) προκύπτει

$$A\, s\, e^{st} + 2A\, e^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2. \tag{3.70}$$

Άρα

$$y_h(t) = A\, e^{-2t}, \tag{3.71}$$

όπου A σταθερά που μένει να προσδιοριστεί.

Εφόσον για $t > 0$ έχουμε $x(t) = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}$, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής $y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\,\omega_0\,t}\}$. Αντικαθιστώντας στη (3.67) παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\{Y\,(j\,\omega_0)e^{j\,\omega_0\,t} + 2Ye^{j\,\omega_0\,t}\} = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}. \tag{3.72}$$

Άρα

$$K = Y\,(2 + j\omega_0) \Leftrightarrow Y = \frac{K}{2 + j\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} e^{-j\theta} \tag{3.73}$$

όπου $\theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2})$. Αντικαθιστώντας την τιμή του Y από την (3.73) στη μερική λύση έχουμε

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\{Y e^{j\,\omega_0\,t}\} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t > 0, \tag{3.74}$$

οπότε η πλήρης λύση δίνεται από την

$$y(t) = A\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t > 0. \tag{3.75}$$

Για να προσδιορίσουμε πλήρως την έξοδο, χρειαζόμαστε τις **αρχικές συνθήκες της Δ.Ε.**, (ορθότερα, βοηθητικές συνθήκες). Αν π.χ. $y(0) = y_0$, τότε

$$A = y_0 - \frac{K\,\cos\theta}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \tag{3.76}$$

και

$$y(t) = y_0\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \left[\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\,\cos\theta\right] \quad t > 0. \tag{3.77}$$

Για $t < 0$, δεν υπάρχει διέγερση, δηλαδή $x(t) = 0$, οπότε το $y(t)$ ικανοποιεί την ομογενή Γ.Δ.Ε. Άρα

$$y(t) = y_0\, e^{-2t}, \quad t < 0. \tag{3.78}$$

Συγχωνεύοντας τις (3.77) και (3.78) παίρνουμε

$$y(t) = y_0\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\,\cos\theta]\, u(t). \tag{3.79}$$

Η λύση (3.79) αποτελείται από την

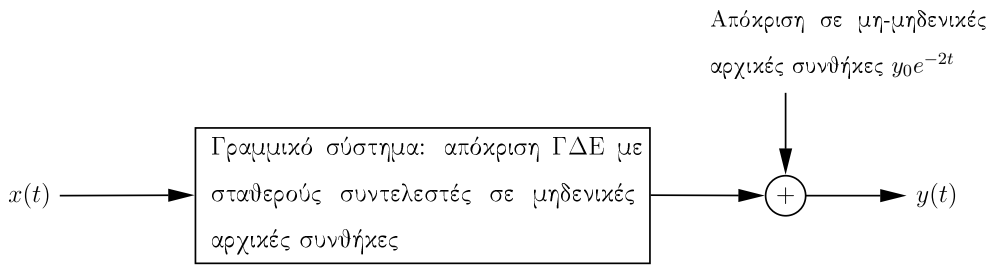
- **απόκριση σε μη μηδενική αρχική συνθήκη** $y_0 = y(0) \neq 0$

$$y_0\, e^{-2t} \tag{3.80}$$

- **απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη** $y_0 = y(0) = 0$

$$\frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\,\cos\theta] u(t). \tag{3.81}$$

Το Σχήμα 3.9 δείχνει παραστατικά τις δύο συνιστώσες της απόκρισης ενός συστήματος που περιγράφεται από Γ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.



Σχήμα 3.9: Απόκριση συστήματος που περιγράφεται από Γ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Βλέποντας τη σχέση (3.79) αναρρωτιόμαστε: **Είναι το σύστημα που μελετάμε γραμμικό;** Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει την ιδιότητα ότι για μηδενική είσοδο παράγει μηδενική έξοδο. Αν $K = 0$, οπότε η είσοδος είναι μηδενική για κάθε t, παρατηρούμε ότι

$$y(t) = y_0 e^{-2t}. \tag{3.82}$$

Άρα το σύστημα **ΔΕΝ** είναι γραμμικό. Το σύστημα **γίνεται** γραμμικό, αν η βοηθητική συνθήκη είναι **μηδέν**. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τις αποκρίσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ σε δύο διεγέρσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με την επιβολή των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\,y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \\ \frac{d\,y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \\ y_1(0) \ = \ y_2(0) = 0. \end{array}\right\} \tag{3.83}$$

Θεωρήστε τώρα $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε για $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ισχύει

$$\frac{d\,y_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad \text{και} \quad y_3(0) = 0 \tag{3.84}$$

οπότε το σύστημα είναι γραμμικό. Συνεπώς το γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί στην απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη, δηλαδή είναι ο δεύτερος όρος της (3.79) που αντιστοιχεί στη (3.81). Στο μάθημα μας ενδιαφέρουν τα γραμμικά συστήματα άρα οι βοηθητικές συνθήκες θα έχουν μηδενικό το δεξί μέλος.

Ας αναρωτηθούμε: **Είναι το σύστημα που μελετούμε αιτιατό;** Η αιτιατότητα συνεπάγεται ότι αν $x(t) = 0$ για $t \le t_0$, τότε $y(t) = 0$ για $t \le t_0$. Η πρόταση αυτή λέγεται **συνθήκη αρχικής ηρεμίας** (initial rest). Άρα πρέπει και πάλι να αναθεωρήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες, ώστε να εξυπηρετήσουμε τη συνθήκη της αρχικής ηρεμίας. Τούτο θα το επιτύχουμε με τη χρήση ενός παραδείγματος. Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + 2y(t) \ = \ x(t) \quad \text{με } y(0) = 0. \tag{3.85}$$

Ας εφαρμόσουμε στο σύστημα αυτό τις εξής δύο εισόδους:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \ \forall\, t && (3.86)\\ x_2(t) &= \begin{cases} 0 & \text{αν } t < -1 \\ 1 & \text{αν } t > -1. \end{cases} && (3.87) \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι γραμμικό, άρα η απόκριση $y_1(t)$ στην είσοδο $x_1(t)$ είναι:

$$y_1(t) = 0 \quad \forall\, t. \tag{3.88}$$

Έστω $y_2(t)$ η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_2(t)$. Για $t > -1$, έχουμε $x_2(t) = 1$, άρα αναζητούμε μια ειδική λύση που είναι σταθερά.

$$y_p(t) = Y \quad t > -1. \tag{3.89}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει

$$2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2} \tag{3.90}$$

οπότε η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι

$$y_2(t) = A\, e^{-2t} + \frac{1}{2} \quad t > -1. \tag{3.91}$$

Εφαρμόζοντας τη βοηθητική συνθήκη $y_2(0) = 0$ προκύπτει

$$A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} \tag{3.92}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.91) παίρνουμε

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t > -1. \tag{3.93}$$

Για να βρούμε την $y_2(t)$ για $t < -1$ παρατηρούμε ότι για $t < -1$ η διέγερση είναι μηδενική, δηλαδή $x_2(t) = 0$, άρα η ειδική λύση είναι 0 και επομένως

$$y_2(t) = B\, e^{-2t} \qquad t < -1. \tag{3.94}$$

Η λύση θα πρέπει να είναι**συνεχής για** $t = -1$, άρα από τις (3.93) και (3.94) προκύπτει

$$B\, e^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \tag{3.95}$$

οπότε

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right) e^{-2(t+1)} \ \ t < -1. \tag{3.96}$$

Καταλήξαμε στο εξής παράδοξο. Επιβάλλοντας την ίδια μηδενική διέγερση για $t < -1$ είτε μέσω της $x_1(t)$ ή της $x_2(t)$ πήραμε δύο διαφορετικές αποκρίσεις $y_1(t) = 0$ και $y_2(t)$ που δίνεται από την (3.96). Αν το σύστημα ήταν αιτιατό θα έπρεπε $y_1(t) = y_2(t)$ για $t < -1$. Πράγμα που δεν ισχύει. Συνεπώς το σύστημα μ' αυτή την επιλογή των βοηθητικών συνθηκών δεν είναι αιτιατό.

Θα δείξουμε στη συνέχεια **πώς** η συνθήκη αρχικής ηρεμίας καθιστά το ίδιο σύστημα αιτιατό.

1. Η απόκριση $y_1(t)$ στην $x_1(t)$ είναι $y_1(t) = 0$, $\forall\, t$. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη αρχικής ηρεμίας.

2. Η απόκριση $y_2(t)$ στη $x_2(t)$ είναι:

$$
\begin{array}{ll}
t < -1 & y_2(t) = 0 \\
t > -1 & \left\{ \begin{array}{l} y_2(t) = A\, e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \boxed{y_2(-1) = 0} \\ A\, e^{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} e^{-2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t+1)}) u(t+1).
\end{array}
\tag{3.97}
$$

Άρα με την επιβολή της μηδενικής αρχικής συνθήκης τη στιγμή που ασκείται η διέγερση εξασφαλίζουμε την αιτιατότητα.

<u>Συμπέρασμα</u> Η συνθήκη αρχικής ηρεμίας **δεν** προσδιορίζει τη βοηθητική συνθήκη σε μια **σταθερή** εκ των προτέρων χρονική στιγμή, αλλά **προσαρμόζει** τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση είναι μηδενική μέχρις ότου η είσοδος καταστεί **μη μηδενική**. Έτσι αν $x(t) = 0$, για $t < t_0$, τότε η αρχική συνθήκη πρέπει να επιλεχθεί ως $y(t_0) = 0$.

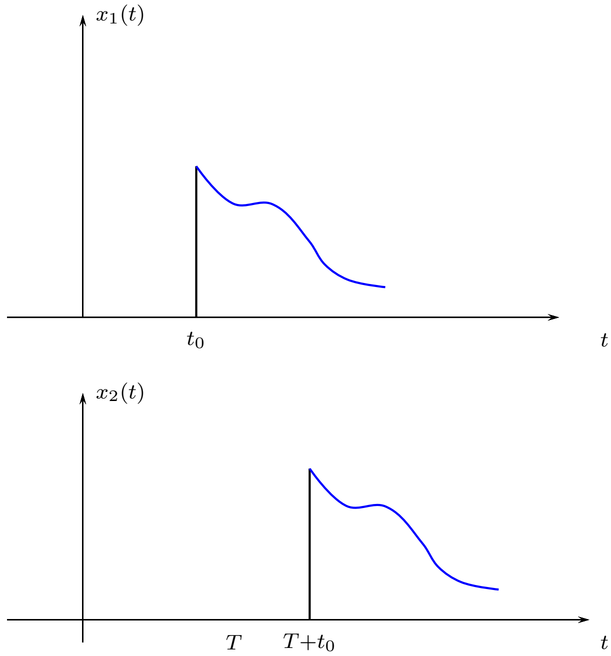
Υπολείπεται να εξετάσουμε αν το σύστημα που μελετούμε

$$
\frac{d\, y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \quad \text{με } y_1(t_0) = 0 \tag{3.98}
$$

όταν διεγείρεται από είσοδο $x_1(t) = 0$ για $t < t_0$ είναι **χρονοαμετάβλητο**. Έστω $x_2(t) = x_1(t - T)$, οπότε $x_2(t) = 0$ για $t < T + t_0$. Επομένως αρκεί η απόκριση $y_2(t)$ σε είσοδο $x_2(t)$ να ικανοποιεί την:

$$
\frac{d\, y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \quad \text{με } y_2(t_0 + T) = 0 \tag{3.99}
$$

και επιπλέον $y_2(t) = y_1(t-T)$. Το Σχήμα 3.10 δείχνει τις διεγέρσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Ξεκινώντας



Σχήμα 3.10: Αρχική και μετατοπισμένη διέγερση του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από Γ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

από τη (3.98)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \\ y_1(t_0) = 0 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1(t-T)}{dt} + 2y_1(t-T) = x_1(t-T) \\ y_1(t_0) = 0 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1(t-T)}{d(t-T)}\dfrac{d(t-T)}{dt} + 2y_1(t-T) = x_1(t-T). \\ y_1(t_0) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.100}$$

Αλλά αν $x_2(t) = x_1(t-T)$, οπότε $y_2(t) = y_1(t-T)$, παρατηρούμε ότι

$$y_2(t) = y_1(t-T)\,|_{t-T=t_0} = 0 \Leftrightarrow y_2(t_0+T) = y_1(t_0) = 0. \tag{3.101}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι ισχύει η (3.99) όπου η αρχική συνθήκη επιβλήθηκε τη χρονική στιγμή $t_0 + T$, οπότε η είσοδος γίνεται μη μηδενική. Συνάγουμε ότι η επιβολή της συνθήκης αρχικής ηρεμίας πέρα από την αιτιατότητα **εγγυάται και το χρονοαμετάβλητο του γραμμικού συστήματος**.

Στη γενικότερη περίπτωση ένα σύστημα θα περιγράφεται από τη Γ.Δ.Ε.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k\, x(t)}{d\, t^k} \tag{3.102}$$

με βοηθητικές συνθήκες που εκφράζονται με όρους των

$$\left.\begin{array}{l} y(t) \\ \frac{d\,y(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{N-1}\,y(t)}{d\,t^{N-1}}. \end{array}\right\} \tag{3.103}$$

1. Αν οι βοηθητικές συνθήκες είναι μηδενικές, το σύστημα είναι **γραμμικό**.

2. Αν ισχύει και η συνθήκη αρχικής ηρεμίας

$$y(t_0) = 0, \quad \frac{d\,y(t_0)}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^{N-1}\,y(t_0)}{d\,t^{N-1}} = 0 \tag{3.104}$$

το σύστημα είναι **αιτιατό**, αλλά και **χρονοαμετάβλητο**.

3.6.1 Συστήματα διακριτού χρόνου

Περιγράφονται από γραμμική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]. \tag{3.105}$$

Η λύση της (3.105) δίνεται από το άθροισμα της

- ειδικής λύσης

- γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = 0. \tag{3.106}$$

Πρέπει και πάλι να επιβάλλουμε **βοηθητικές συνθήκες** που να εγγυώνται

1. γραμμικότητα

2. αιτιατότητα και το χρονοαμετάβλητο.

Η (3.105) είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση. Πράγματι

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}. \tag{3.107}$$

Αν $N = 0$, τότε έχουμε μια μη αναδρομική εξίσωση ή **σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** (finite impulse response, FIR)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k]. \tag{3.108}$$

Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{3.109}$$

Αν η (3.105) αντιστοιχεί σε αναδρομική εξίσωση, τότε απαιτούνται και οριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 3.8. Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \tag{3.110}$$

Έστω

$$\begin{aligned} y[-1] &= a && (3.111)\\ x[n] &= K\,\delta[n] && (3.112) \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} y[0] &= K + \frac{1}{2}a \\ y[1] &= \frac{1}{2}(K + \frac{1}{2}a) \\ y[2] &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (K + \frac{1}{2}a) \\ &\vdots \\ y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n K + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \quad n \ge 0. && (3.113) \end{aligned}$$

Ομοίως μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αναδρομή σχετίζοντας την προηγούμενη τιμή με την παρούσα για τιμές του $n < -1$:

$$y[n-1] = 2\Big[y[n] - x[n]\Big]. \tag{3.114}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} y[-2] &= 2a \\ y[-3] &= 2^2 a = (\frac{1}{2})^{-3+1} a \\ \vdots & \quad \vdots \\ y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \quad n < 0. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Από τις (3.113) και (3.115) προκύπτει

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + K \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]. \tag{3.116}$$

Άρα και πάλι απαιτούνται οριακές συνθήκες για να προσδιοριστούν τα a και K.

Εάν $K = 0$, τότε $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a$. Άρα η έξοδος θα είναι μηδέν, μόνο αν $a = 0$, οπότε το προκύπτον σύστημα θα είναι γραμμικό.

Για να είναι το σύστημα αιτιατό, πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Στην περίπτωσή μας, ξεκινούμε με μηδενική αρχική συνθήκη τη στιγμή $n = -1$. Άρα πρέπει:

$$y[-1] = 0 \tag{3.117}$$

οπότε:

$$y[n] = K \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]}_{h[n]}. \tag{3.118}$$

Το προκύπτον σύστημα έχει **κρουστική απόκριση απεριόριστης διάρκειας** (infinite impulse response, IIR).

3.7 Block διαγράμματα

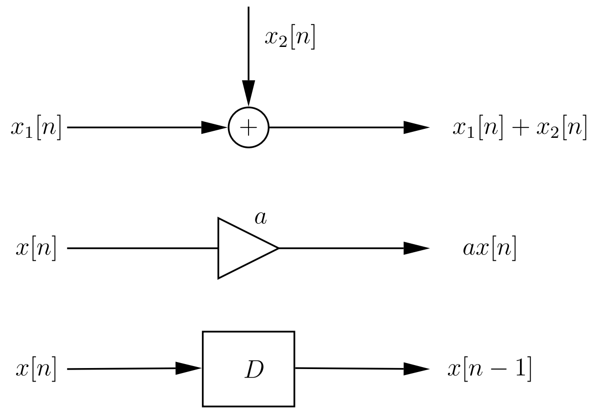
3.7.1 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Τα δομικά στοιχεία των block διαγραμμάτων για συστήματα διακριτού χρόνου εικονίζονται στο Σχήμα 3.11.

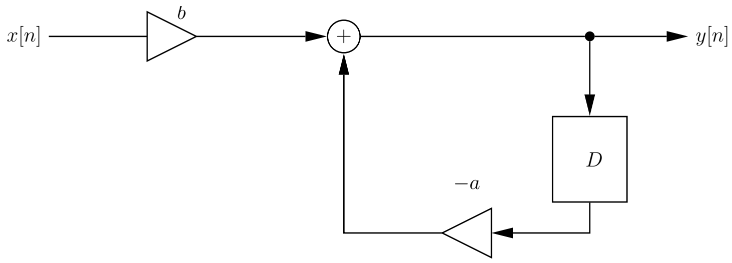
Παράδειγμα 3.9. Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + a\, y[n-1] = b\, x[n] \Rightarrow y[n] = -a\, y[n-1] + b\, x[n] \tag{3.119}$$

το block διάγραμμα σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.11: Δομικά στοιχεία συστημάτων διακριτού χρόνου.

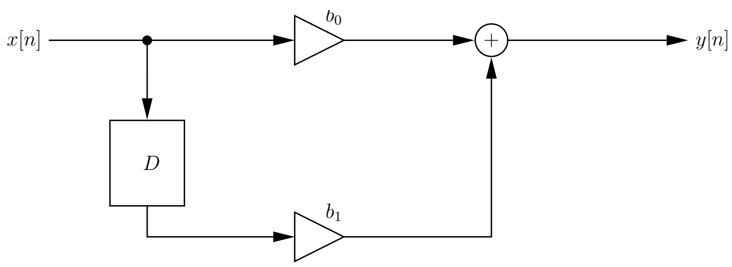


Σχήμα 3.12: Block διάγραμμα IIR συστήματος 1ης τάξης.

Παράδειγμα 3.10. Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \tag{3.120}$$

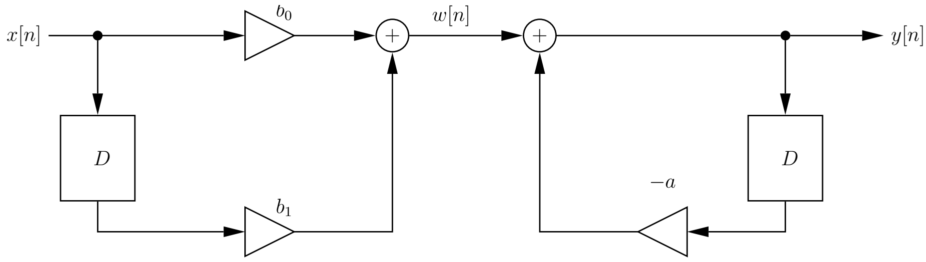
το block διάγραμμα σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13: Block διάγραμμα FIR συστήματος 1ης τάξης.

Παράδειγμα 3.11. Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + a\, y[n-1] = \underbrace{b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1]}_{w[n]} \tag{3.121}$$



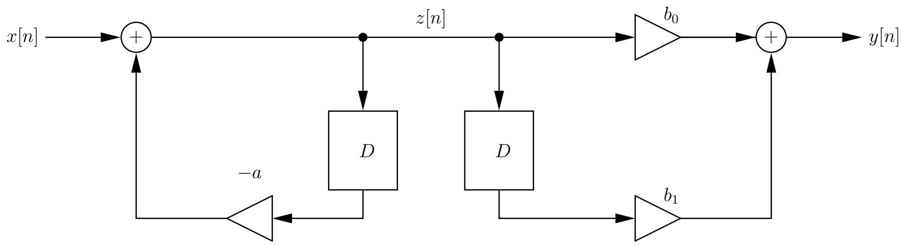
Σχήμα 3.14: Απευθείας Ι υλοποίηση συστήματος IIR.

το block διάγραμμα σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.14. Το σύστημα του Σχήματος 3.14 υλοποιεί τις εξής εξισώσεις:

$$y[n] = -a\,y[n-1] + w[n] \tag{3.122}$$

$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]. \tag{3.123}$$

Εφόσον τα συστήματα είναι γραμμικά μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά διασύνδεσης των δύο βαθμίδων, οπότε προκύπτει η υλοποίηση του Σχήματος 3.15. Το σύστημα του Σχήματος 3.15



Σχήμα 3.15: Εναλλακτική απευθείας Ι υλοποίηση συστήματος IIR.

υλοποιεί τις εξής εξισώσεις:

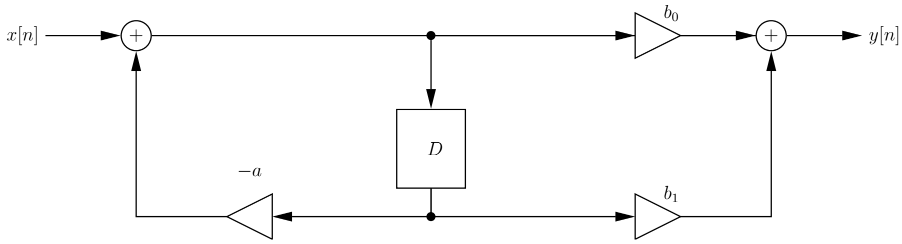
$$x[n] - a\,z[n-1] = z[n] \tag{3.124}$$

$$y[n] = b_0 z[n] + b_1 z[n-1]. \tag{3.125}$$

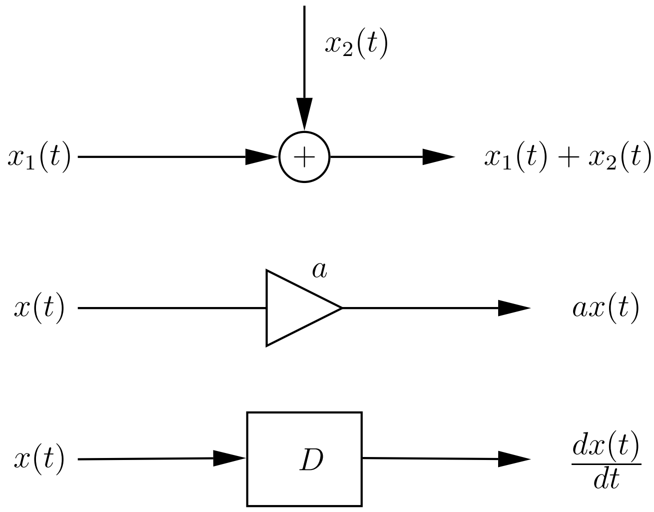
Μια ισοδύναμη υλοποίηση σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.16.

3.7.2 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Τα δομικά στοιχεία των block διαγραμμάτων για συστήματα συνεχούς χρόνου εικονίζονται στο Σχήμα 3.17.



Σχήμα 3.16: Απευθείας II υλοποίηση συστήματος IIR.



Σχήμα 3.17: Δομικά στοιχεία συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Έστω

$$
\begin{aligned}
y_{(0)}(t) &= y(t) \\
y_{(1)}(t) &= (y * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \\
y_{(2)}(t) &= (y_{(1)} * u)(t) \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

Έστω επίσης $N = M$, οπότε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k\, x(t)}{d\, t^k}. \tag{3.127}$$

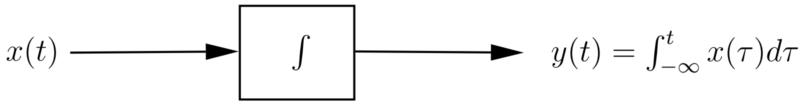
Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Αν ολοκληρώσουμε N φορές την (3.127) και συμβολίσουμε με

$$y_{(N-k)}(t) = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{N \text{ φορές}} \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k}(dt)^N \tag{3.128}$$

προκύπτει

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left\{ \sum_{k=0}^{N} b_k \; x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; y_{(N-k)}(t) \right\} \tag{3.129}$$

Γενικότερα η υλοποίηση ενός ολοκληρωτή είναι ευκολότερη από εκείνη ενός διαφοριστή. Ένας ολοκληρωτής συνήθως υλοποιείται με τη χρήση τελεστικού ενισχυτή.

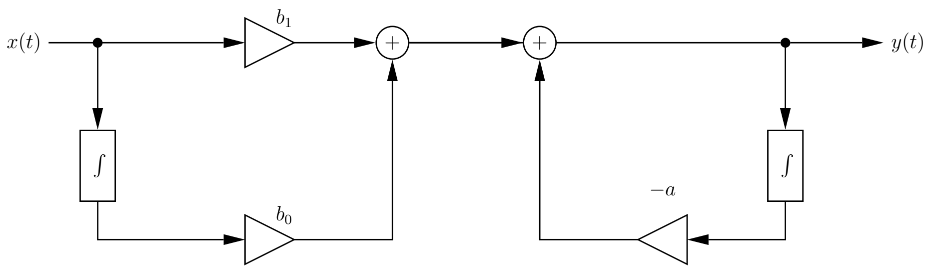


Σχήμα 3.18: Ολοκληρωτής.

Παράδειγμα 3.12. Για το σύστημα που περιγράφεται από την Γ.Δ.Ε.

$$\begin{aligned} \frac{d\, y(t)}{d\, t} + a\, y(t) &= b_0\, x(t) + b_1 \frac{d\, x(t)}{d\, t} \Leftrightarrow \\ y(t) + a \int_{-\infty}^{t} y(\tau) d\tau &= b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau + b_1 x(t) \end{aligned} \tag{3.130}$$

το block διάγραμμα σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.19. Στη γενικότερη περίπτωση ενός συστήματος

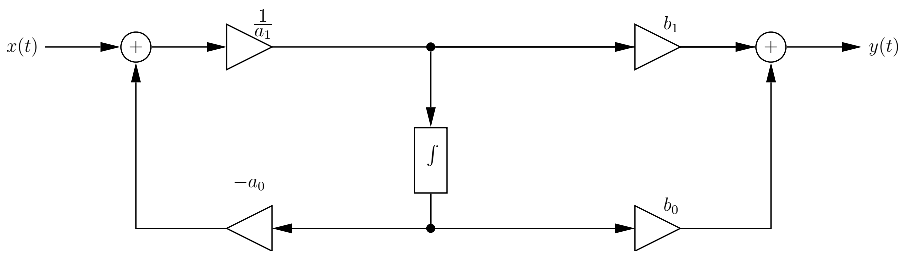


Σχήμα 3.19: Απευθείας Ι υλοποίηση συστήματος συνεχούς χρόνου.

που περιγράφεται από την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} a_1\, y_{(0)}(t) + a_0\, y_{(1)}(t) &= b_0\, x_{(1)}(t) + b_1\, x_{(0)}(t) \\ y_{(0)}(t) &= \frac{1}{a_1} \left[-a_0\, y_{(1)}(t) + b_0\, x_{(1)}(t) + b_1\, x_{(0)}(t) \right] \end{aligned} \tag{3.131}$$

το Σχήμα 3.20 εικονίζει την απευθείας ΙΙ υλοποίηση.



Σχήμα 3.20: Απευθείας ΙΙ υλοποίηση συστήματος συνεχούς χρόνου.