Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα
Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου -Άλυτα προβλήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου

5.6 Άλυτα προβλήματα

Στην Ενότητα αυτή προτείνονται προβλήματα προς επίλυση που αφορούν την ύλη των Κεφαλαίων 4-5.

1. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.
2. Όταν το σήμα $x(t)$ διέρχεται από σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \exp(-2t)u(t)$ παράγεται απόκριση, η οποία έχει μετασχηματισμό Fourier
$$Y(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \quad \text{όπου } K \text{ πραγματικός αριθμός.}$$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

Να βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2002)

2. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.
2. $\mathcal{F}^{-1}\{(1+j\omega)\, X(j\omega)\} = A\, \exp(-2t)\, u(t)$, όπου το A δεν εξαρτάται από το t.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

Να βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2002)

3. (α) Έστω σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα.
2. $x(t) = 0$ για $t \leq 0$.
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} \exp(j\,\omega\,t)\, d\omega = |t|\, \exp(-|t|)$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2002)

4. (α) Υποθέστε ότι σας δίνεται η εξής πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας.
2. $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 2$.
3. Για τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$ ισχύει $a_k = 0$ για $k > 1$.
4. Ισχύει:
$$\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2\, dt = 1.$$

Να βρείτε τα σήματα που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες.

(β) Θεωρήστε το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο συνεχούς χρόνου S του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι:
$$H(j\,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |\omega| \leq 100 \\ 0 & \text{αν } |\omega| > 100. \end{cases}$$
Ποιά είναι η (εκθετική) σειρά Fourier της εξόδου του φίλτρου, όταν αυτό διεγείρεται μ' ένα σήμα $x(t)$ που έχει θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{\pi}{6}$ και συντελεστές (εκθετικής) σειράς Fourier a_k; Για ποιές τιμές του k είναι εγγυημένο ότι οι συντελεστές Fourier της εξόδου είναι μηδενικοί, δηλαδή, $b_k = 0$; (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 1998)

5. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

(i) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.

(ii) Το σήμα $x(t)$ διέρχεται από σύστημα με κρουστική απόκριση $4\delta(t)+\frac{d}{dt}\delta(t)$ και η απόκριση του συστήματος είναι $\frac{1}{B}e^{-2t}\ u(t)$, όπου το B δεν εξαρτάται από το t.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{16}$.

Να βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2007)

6. (α) Υποθέστε ότι σας δίνεται η εξής πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας.
2. $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 4$.
3. Για τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$ ισχύει $a_k = 0$ για $k > 1$.
4. Ισχύει:
$$\frac{1}{4}\int_0^4 |x(t)|^2\, dt = 1.$$

Να βρείτε τα σήματα που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες.

(β) Θεωρήστε το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο συνεχούς χρόνου S του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(j\,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |\omega| \le 75 \\ 0 & \text{αν } |\omega| > 75. \end{cases}$$

Ποιά είναι η (εκθετική) σειρά Fourier της εξόδου του φίλτρου, όταν αυτό διεγείρεται μ' ένα σήμα $x(t)$ που έχει θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{\pi}{4}$ και συντελεστές (εκθετικής) σειράς Fourier a_k; Για ποιές τιμές του k είναι εγγυημένο ότι οι συντελεστές Fourier της εξόδου είναι μηδενικοί, δηλαδή, $b_k = 0$; (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2005)

7. (α) Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.
2. Όταν το σήμα $x(t)$ διέρχεται από σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \exp{(-3t)}u(t)$ παράγεται απόκριση, η οποία έχει μετασχηματισμό Fourier
$$Y(j\omega) = \frac{K}{(2+j\omega)(3+j\omega)} \quad \text{όπου } K \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

Να βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

(β) Υποθέστε ότι σας παρέχεται η εξής πληροφορία για ένα περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο 3 και συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier:

1. $a_k = a_{k+2}$.
2. $a_k = a_{-k}$.
3. $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$.
4. $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$.

Να προσδιορίσετε το σήμα $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2003)

8. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(j\omega)$. Υποθέστε ότι σας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και μη-αρνητικό.
2. Όταν το σήμα $x(t)$ διέρχεται από σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \exp(-t)u(t)$ παράγεται απόκριση, η οποία έχει μετασχηματισμό Fourier

$$Y(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} \quad \text{όπου } K \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

Να βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 2003)

9. (α) Υποθέστε ότι το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με εκθετική σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} \exp(j\, k\, \frac{\pi}{4}\, t)$$

όπου α πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $0 < \alpha < 1$ διεγείρει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα. Η απόκριση συχνότητας του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W. \end{cases}$$

Πόσο μεγάλη πρέπει να εκλεγεί η W ώστε το σήμα στην έξοδο να έχει τουλάχιστον το 80% της ισχύος του σήματος $x(t)$; (1.5 μονάδα) (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2004)

10. Ποιές είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος μετάδοσης, ώστε να διεγείρεται με σήμα $x(t)$, να το μεταδίδει χωρίς αλλοίωση (distortion) ;

11. Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που έχει απόκριση συχνότητας

$$H(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)\ \cos\omega}{\omega^2}.$$

(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2001)

12. Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{4})}{k\frac{\pi}{4}} \delta(t - k\,\frac{\pi}{4}).$$

(α) Να προσδιορίσετε ένα σήμα $g(t)$ τέτοιο ώστε

$$x(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi\, t}\right)\, g(t).$$

(β) Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για να δικαιολογήσετε ότι το $X(j\omega)$ είναι περιοδικό. Να προσδιορίσετε το $X(j\omega)$ σε διάστημα μιας περιόδου. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2000)

13. Θεωρήστε αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

Για μια συγκεκριμένη διέγερση $x(t)$ παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = e^{-3t}\, u(t) - e^{-4t}\, u(t).$$

Να προσδιοριστεί το σήμα $x(t)$. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 1999)

14. Έστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο πραγματικά σήματα. Η συνάρτηση *συσχέτισης* (correlation) ορίζεται ως:

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

Η συνάρτηση $\phi_{xx}(t)$ συνήθως αναφέρεται ως συνάρτηση *αυτοσυσχέτισης* του σήματος $x(t)$, ενώ η συνάρτηση $\phi_{xy}(t)$ συχνά αναφέρεται ως συνάρτηση *ετεροσυσχέτισης*.

(α) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των $\phi_{xy}(t)$ και $\phi_{yx}(t)$;

(β) Να υπολογίστε το περιττό μέρος της $\phi_{xx}(t)$.

(γ) Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier της αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(t)$.

(δ) Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier της ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(t)$ συναρτήσει των $X(\omega)$ και $Y(\omega)$.

(ε) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των $\Phi_{xy}(\omega)$ και $\Phi_{yx}(\omega)$; Δείξτε ότι $\Phi_{xx}(\omega)$ είναι πραγματική και μη-αρνητική συνάρτηση για κάθε ω. (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 1999)

15. Με τη χρήση ιδιοτήτων και σχετικών πινάκων να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 16 - 4|t-4| & \text{αν } |t-4| < 4, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1998)

16. Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier να βρείτε την έξοδο $y(t)$ για σήμα εισόδου $x(t) = e^{-t}\,u(t)$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009)

17. Έστω $x(t)$ περιοδικό σήμα του οποίου οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι

$$a_k = \begin{cases} 2 & \text{αν } k = 0 \\ j\,(\frac{1}{2})^{|k|} & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της σειράς Fourier για να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

1. Είναι το $x(t)$ πραγματικό;

2. Είναι το $x(t)$ άρτιας συμμετρίας ως προς t;

3. Είναι η παράγωγος του σήματος $x(t)$ άρτιας συμμετρίας ως προς t;

18. Η έξοδος $y(t)$ ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σχετίζεται με την είσοδο $x(t)$ δια της εξίσωσης

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10\,y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,z(t-\tau)\,d\tau - x(t)$$

όπου $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$. (α) Να βρείτε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. (β) Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

19. Έστω $x_1(t) = 2\cos(200\pi t)$ και $x_2(t) = 5\cos(1000\pi t)$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο σήματα παίρνουμε το $x(t) = x_1(t)\,x_2(t)$. Ποιό είναι το συχνοτικό περιεχόμενο του $x(t)$; Πώς μπορεί να απομονωθεί ο όρος $g(t) = 3\cos(1200\pi t)$ από το $x(t)$;

20. Έστω $v(t) = B\cos\omega_1(t)$. Αν $\hat{x}(t)$ οριστεί ως το σήμα της πρώτης περιόδου ενός περιοδικού συμμετρικού τρένου ορθογωνίων παλμών $x(t)$ με περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{αν } |t| \le \frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{αν } \frac{T_1}{4} < |t| \le \frac{T_1}{2} \end{cases} \\ x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(t - n\,T_1) \end{aligned}$$

να δικαιολογήσετε σχηματικά ότι $y(t) = x(t)\,v(t)$ είναι η έξοδος ενός συστήματος ημι-ανόρθωσης (half-wave rectifier) που διεγείρεται από το $x(t)$. Πώς υλοποιείται ένα τέτοιο σύστημα; Να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό Fourier του $y(t)$. Έχει ένα σύστημα ημι-ανόρθωσης απόκριση συχνότητας;