Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου - Λυμένες ασκήσεις

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου

5.5 Λυμένες ασκήσεις

Στην Ενότητα αυτή παρατίθενται λυμένες ασκήσεις που αφορούν την ύλη των Κεφαλαίων 4-5.

5.5.1. Να προσδιορίσετε την επέκταση των ακόλουθων σημάτων σε σειρά Fourier:

(α) Πριονωτή παλμοσειρά Σχήμα 5.5.1(α)

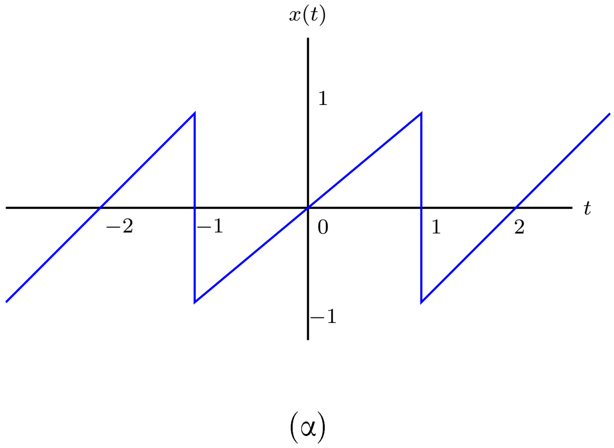
(β) $x(t) = [1 + \cos 2\pi t][\cos(10\pi t + \frac{\pi}{4})]$

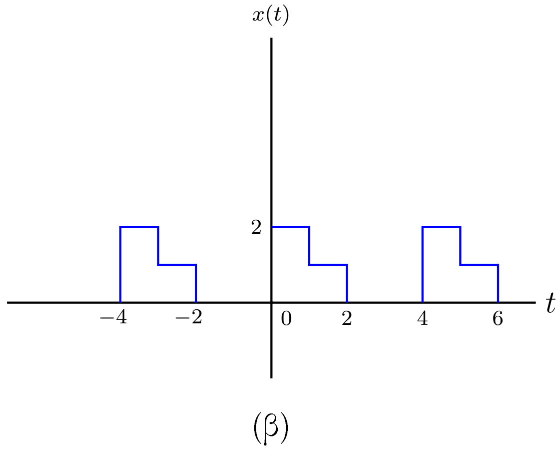
(γ) $x(t)$, το εικονιζόμενο στο Σχήμα 5.5.1(β).

Λύση:

(α) Το πριονωτό σχήμα έχει περιττή συμμετρία. Ως εκ τούτου $a_0 = 0$ και $a_n = 0 \;\; n = 1, 2, ..$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin n\omega_0 t \; dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} t \sin n(\frac{2\pi}{2})t \; dt = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t \; dt = \\
&= \Big[\frac{\sin n\pi t}{n^2\pi^2} - \frac{t\cos n\pi t}{n\pi}\Big]_{-1}^{1} = -\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} = -2\frac{(-1)^n}{n\pi} \\
&= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & n = 2\rho, \quad \rho = 1, 2, \ldots \\ \frac{2}{n\pi} & n = 2\rho + 1, \quad \rho = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (5.5.1)
\end{aligned}$$





Σχήμα 5.5.1: (α) Πριονωτή παλμοσειρά. (β) Σήμα $x(t)$.

(β)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \Big[1+\cos 2\pi t\Big]\Big[\cos(10\pi t+\frac{\pi}{4})\Big] = \cos(10\pi t+\frac{\pi}{4}) + \cos 2\pi t\ \cos(10\pi t+\frac{\pi}{4}) \\
&= \cos 10\pi t\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 10\pi t\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\Big[\cos(2\pi t+10\pi t+\frac{\pi}{4}) + \cos(10\pi t+\frac{\pi}{4}-2\pi t)\Big] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10\pi t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10\pi t + \frac{1}{2}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 12\pi t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 12\pi t + \\
&\quad +\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 8\pi t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 8\pi t\Big] \\
&= \Big[\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 8\pi t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10\pi t + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos 12\pi t\Big] - \\
&\quad -\Big[\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 8\pi t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 10\pi t + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 12\pi t\Big]. \qquad (5.5.2)
\end{aligned}
$$

(γ) Αναγνωρίζουμε ότι $T=4$ οπότε

$$
a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\Big[\int_0^4 x(t)\,dt\Big] = \frac{3}{4} \qquad (5.5.3)
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{4}\int_0^2 x(t)\cos n\frac{2\pi}{4}t\,dt = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 2\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt + \int_1^2 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt\Big] \\
&= \int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt \\
&= \Big[\frac{\sin\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big]_1^2 \\
&= \frac{1}{\pi n}\sin(\frac{n\pi}{2}). \qquad (5.5.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^2 x(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = \frac{2}{4}\Big[2\int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt + \int_1^2 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[-2\Big[\frac{\cos\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big]_0^1 - \Big[\frac{\cos\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big]_1^2\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[-2\Big[\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} - \frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\Big] - \Big[\frac{\cos n\pi}{\frac{n\pi}{2}} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big]\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\frac{2}{n\pi} - \frac{\cos n\pi}{\frac{n\pi}{2}}\Big] = \frac{1}{2}\Big[2\frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n\Big] = \frac{2}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & n = 2\rho, \quad \rho = 1, 2, \ldots \\ \frac{3}{n\pi} & n = 2\rho + 1, \quad \rho = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.5.5}
$$

5.5.2. Είδαμε πως η έννοια της ιδιοσυνάρτησης είναι εξαιρετικά χρήσιμη στην ανάλυση Γ.Χ.Α συστημάτων. Το ίδιο μπορεί να ειπωθεί και για τα γραμμικά χρονομεταβαλλόμενα συστήματα. Έστω ένα τέτοιο σύστημα που διεγείρεται με είσοδο $x(t)$ και παράγει έξοδο $y(t)$. Λέμε ότι ένα σήμα $\phi(t)$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του συστήματος αν

$$\phi(t) \longrightarrow \lambda\phi(t) \tag{5.5.6}$$

όπου λ είναι γενικά μια μιγαδική σταθερά που λέγεται ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην $\phi(t)$.

(α) Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε την είσοδο στο σύστημα μας ως γραμμικό συνδυασμό ιδιοσυναρτήσεων $\varphi_k(t)$, οι οποίες έχουν αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_k:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\varphi_k(t). \tag{5.5.7}$$

Να εκφράσετε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος με όρους των c_k, φ_k και λ_k.

(β) Θεωρήστε το σύστημα που χαρακτηρίζεται από την διαφορική εξίσωση

$$y(t) = t^2\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\,\frac{dx(t)}{dt}. \tag{5.5.8}$$

Είναι αυτό το σύστημα γραμμικό; Είναι χρονικά αμετάβλητο;

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων

$$\varphi_k(t) = t^k \tag{5.5.9}$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος. Ποιές είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές;

(δ) Προσδιορίστε την έξοδο του συστήματος αν:

$$x(t) = 10\,t^{-10} + 3\,t + \frac{1}{2}\,t^4 + \pi. \tag{5.5.10}$$

Λύση:

(α)

$$\begin{aligned} \phi_k(t) &\longrightarrow \lambda_k \phi_k(t) \\ c_k\phi_k(t) &\longrightarrow \lambda_k c_k\;\phi_k(t) \quad \text{ομοιογένεια} \qquad (5.5.11) \\ \sum_k c_k\;\phi_k(t) &\longrightarrow \sum_k \lambda_k\;c_k\;\phi_k(t) \quad \text{επαλληλία.} \qquad (5.5.12) \end{aligned}$$

(β) Το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, διότι οι συντελεστές των παραγώγων δεν είναι σταθερές, άλλα χρονικές συναρτήσεις. Η αρχή της επαλληλίας ισχύει γιατί αν

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{5.5.13}$$

τότε η έξοδος δίνεται από την

$$\begin{aligned} y(t) &= t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt} = t^2\left[\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}\right] + t\left[\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt}\right] \\ &= \left[\underbrace{t^2\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + t\frac{dx_1(t)}{dt}}_{\mathsf{T}\{x_1(t)\}}\right] + \left[\underbrace{t^2\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + t\frac{dx_2(t)}{dt}}_{\mathsf{T}\{x_2(t)\}}\right]. \qquad (5.5.14) \end{aligned}$$

Εύκολα μπορεί να επαληθευτεί και η αρχή της ομοιογένειας.

(γ)

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\{t^k\} &= t^2\frac{d^2}{dt^2}t^k + t\,\frac{d}{dt}t^k = t^2k(k-1)\;t^{k-2} + tk\;t^{k-1} \\ &= k(k-1)\;t^k + k\;t^k = \{k^2 - k + k\}t^k = \underbrace{k^2}_{\text{ιδιοτιμή}}\;t^k. \qquad (5.5.15) \end{aligned}$$

Άρα

$$\phi_k(t) \to k^2\;t^k. \tag{5.5.16}$$

(δ)

$$\begin{aligned} 10\,t^{-10} &\to 10(-10)^2\;t^{-10} = 1000\;t^{-10} \qquad (5.5.17) \\ 3\,t &\to 31^2\;t = 3\;t \qquad (5.5.18) \\ \frac{1}{2}\,t^4 &\to \frac{1}{2}16\;t^4 = 8\;t^4 \qquad (5.5.19) \\ \pi\;t^0 &\to \pi 0^2 = 0. \qquad (5.5.20) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$x(t) \rightarrow 3\,t + 8\,t^4 + 1000\,t^{-10}. \tag{5.5.21}$$

5.5.3. Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier των ακόλουθων σημάτων με τη χρήση του ορισμού και με τη χρήση των ιδιοτήτων:

(α) $[e^{-at}\cos\omega_0 t]\,u(t),\ a>0$

(β) $x(t) = \begin{cases} 1+\cos\pi t & \text{αν } |t|<1 \\ 0 & \text{αν } |t|>1 \end{cases}$

(γ) $e^{2+t}\,u(-t+1)$.

Λύση:

(α) Με τη χρήση του ορισμού

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos\omega_0 t\,e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos\omega_0 t\,[\cos\omega t - j\sin\omega t]\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos\omega_0 t\,\cos\omega t\,dt - j\int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos\omega_0 t\,\sin\omega t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos(\omega-\omega_0)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-at}\,\cos(\omega+\omega_0)t\,dt \\
&\quad -\frac{j}{2}\int_0^{\infty} e^{-at}\,\sin(\omega-\omega_0)t\,dt - \frac{j}{2}\int_0^{\infty} e^{-at}\,\sin(\omega+\omega_0)t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\Big] - \frac{1}{2}\Big[\frac{j(\omega-\omega_0)}{a^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{j(\omega+\omega_0)}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\Big].
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

Με τη χρήση των ιδιοτήτων

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega} \tag{5.5.23}$$

$$\cos\omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\Big[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\Big] \tag{5.5.24}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big\{e^{-at}\,u(t)\,\cos\omega_0 t\Big\} &= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{a+j\omega} * \pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{a+j\omega} * \pi\delta(\omega+\omega_0)\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\pi}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{a+j(\omega+\omega_0)}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\Big].
\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

(β)

$$x(t) = \begin{cases} 1+\cos \pi t & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases} \tag{5.5.26}$$

Με τη χρήση του ορισμού

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{1} (1+\cos\pi t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-1}^{1} \cos\pi t\, e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \cos\omega t\, dt - j\int_{-1}^{1} \sin\omega t\, dt + \int_{-1}^{1} \cos\pi t\, \cos\omega t\, dt - j\int_{-1}^{1} \cos\pi t\, \sin\omega t\, dt \\
&= \Big[\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big]_{-1}^{1} + j\Big[\frac{\cos\omega t}{\omega}\Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{1} \cos(\pi+\omega)t\, dt + \int_{-1}^{1}\cos(\pi-\omega)t\, dt\Big] \\
&\quad -j\frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{1} \sin(\omega-\pi)t\, dt + \int_{-1}^{1} \sin(\omega+\pi)t\, dt\Big] \\
&= \frac{\sin\omega}{\omega} - \frac{\sin(-\omega)}{\omega} + j\Big[\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\cos(-\omega)}{\omega}\Big] + \frac{1}{2}\Big\{\Big[\frac{\sin(\pi+\omega)t}{(\pi+\omega)}\Big]_{-1}^{1} + \\
&\quad + \Big[\frac{\sin(\pi-\omega)t}{(\pi-\omega)}\Big]_{-1}^{1}\Big\} - \frac{j}{2}\Big\{\Big[-\frac{\cos(\omega-\pi)t}{(\omega-\pi)}\Big]_{-1}^{1} + \Big[\frac{-\cos(\omega+\pi)t}{(\omega+\pi)}\Big]_{-1}^{1}\Big\} \\
&= \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{1}{2}\Big\{\frac{\sin(\pi+\omega) - \sin[-(\pi+\omega)]}{\pi+\omega} + \frac{\sin(\pi-\omega) - \sin[-(\pi-\omega)]}{(\pi-\omega)}\Big\} + \\
&\quad + \frac{j}{2}\Big\{-\frac{1}{\omega-\pi}\Big[\cos(\omega-\pi) - \cos[-(\omega-\pi)]\Big] \\
&\quad - \frac{1}{\omega+\pi}\Big[\cos(\omega+\pi) - \cos[-(\omega+\pi)]\Big]\Big\} \\
&= \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{\sin(\pi+\omega)}{\pi+\omega} + \frac{\sin(\pi-\omega)}{\pi-\omega}.
\end{aligned} \tag{5.5.27}$$

Με τη χρήση των ιδιοτήτων:

$$x(t) = \underbrace{(1+\cos\pi t)}_{f(t)}\underbrace{[u(t+1) - u(t-1)]}_{g(t)}. \tag{5.5.28}$$

Έστω $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$. Τότε

$$G(\omega) = e^{j\omega}\mathcal{F}\Big\{u(t)\Big\} - e^{-j\omega}\mathcal{F}\Big\{u(t)\Big\} = [e^{j\omega} - e^{-j\omega}]\mathcal{F}\Big\{u(t)\Big\}. \tag{5.5.29}$$

Επειδή όμως

$$\mathcal{F}\Big\{u(t)\Big\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.5.30}$$

έχουμε

$$G(\omega) = \Big[e^{j\omega} - e^{-j\omega}\Big]\Big[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\Big] = 2j\sin\omega\Big[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\Big] = 2\frac{\sin\omega}{\omega} \tag{5.5.31}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= 2\pi\delta(\omega) + \pi\Big[\delta(\omega-\pi) + \delta(\omega+\pi)\Big] \qquad (5.5.32)\\
X(\omega) &= \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[G(\omega) * 2\pi\delta(\omega) + \\
&\quad + G(\omega) * \pi\delta(\omega-\pi) + G(\omega) * \pi\delta(\omega+\pi)\Big] = \\
&= G(\omega) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega-\lambda)\delta(\lambda-\pi)\, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega-\lambda)\delta(\lambda+\pi)\, d\lambda \\
&= 2\frac{\sin\omega}{\omega} + \Big[\frac{1}{2}G(\omega-\lambda)\Big]_{\lambda=\pi} + \Big[\frac{1}{2}G(\omega-\lambda)\Big]_{\lambda=-\pi} \\
&= 2\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\sin(\omega+\pi)}{\omega+\pi}. \qquad (5.5.33)
\end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-t}\, u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y_1(\omega) = \frac{1}{1+j\,\omega} \qquad (5.5.34)\\
y(-t) &= e^{t}\, u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y_2(\omega) = Y_1(-\omega) = \frac{1}{1-j\omega} \qquad (5.5.35)\\
y(-(t-1)) &= e^{t-1}\, u(1-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y_3(\omega) = e^{-j\omega}Y_2(\omega) = e^{-j\omega}\frac{1}{1-j\omega} \qquad (5.5.36)\\
x(t) &= e^{3}\, e^{t-1}\, u(1-t) = e^{3}\, y(-t+1) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = e^{(3-j\omega)}\frac{1}{1-j\omega}. \qquad (5.5.37)
\end{aligned}$$

Με τη χρήση του ορισμού

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{1} e^{2+t}\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{2}\int_{-\infty}^{1} e^{(1-j\omega)t}\, dt \\
&= e^{2}\left[\frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega}\right]_{-\infty}^{1} = e^{2}\,\frac{e^{(1-j\omega)}}{1-j\omega} = \frac{e^{3-j\omega}}{1-j\omega}. \qquad (5.5.38)
\end{aligned}$$

5.5.4. Έστω $X(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ που σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.5.2.

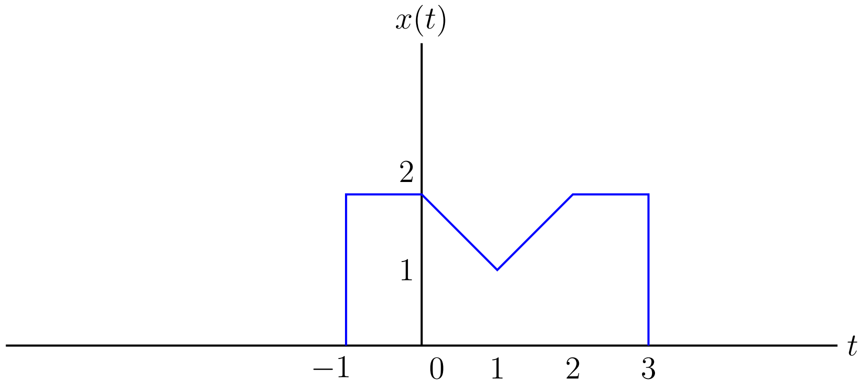
(α) Βρείτε τη φάση του μετασχηματισμού $\angle X(\omega)$

(β) Βρείτε το $X(0)$

(γ) Βρείτε το $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, d\omega$

(δ) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, \frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}\, d\omega$

(ε) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$



Σχήμα 5.5.2: Σήμα $x(t)$ της Άσκησης 5.5.4.

(στ) Σχεδιάστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $\text{Re}\{X(\omega)\}$.

Να εκτελέσετε όλους τους υπολογισμούς χωρίς αναλυτικό υπολογισμό της $X(\omega)$, δηλαδή αποφεύγοντας την εξίσωση ορισμού και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων και των πινάκων των ζευγών μετασχηματισμών.

Λύση:

Από τα Σχήματα 5.5.3(β) και 5.5.3(δ) προκύπτει ότι το σήμα $x(t)$ αναλύεται ως:

$$x(t) = x_1(t-1) - x_2(t-1). \tag{5.5.39}$$

Για το σήμα $x_1(t)$ και το καθυστερημένο αντίγραφό του $x_1(t-1)$ έχουμε

$$x_1(t) = \begin{cases} A & |t| < T_1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X_1(\omega) = 2A \left.\frac{\sin \omega T_1}{\omega}\right|_{A=2, T_1=2} = 4\,\frac{\sin 2\omega}{\omega} \tag{5.5.40}$$

$$x_1(t-1) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad e^{-j\omega}\, 4\, \frac{\sin 2\omega}{\omega} \tag{5.5.41}$$

ενώ για τα σήματα $x_2(t)$ και $x_2(t-1)$ παίρνουμε

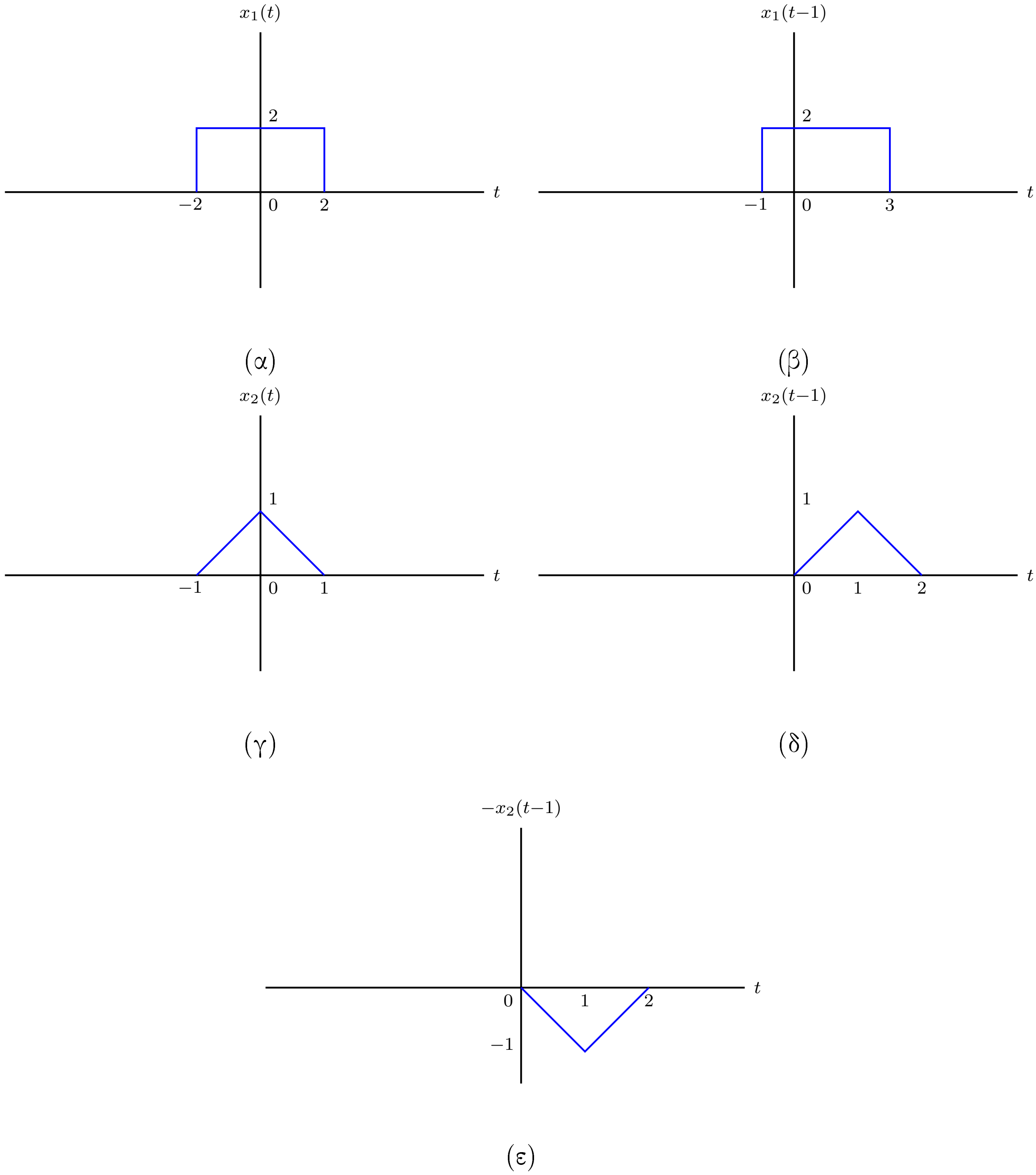
$$x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left[\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^2 \tag{5.5.42}$$

$$x_2(t-1) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega}\, \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega^2}{4}}. \tag{5.5.43}$$

Άρα

$$X(\omega) = e^{-j\omega}\left[4\frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2/4}\right] = 4\, e^{-j\omega}\left[\frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}\right]. \tag{5.5.44}$$

Επομένως



Σχήμα 5.5.3: Σήματα (α) $x_1(t)$, (β) $x_1(t-1)$, (γ) $x_2(t)$, (δ) $x_2(t-1)$ και (ε) $-x_2(t-1)$.

(α) $\angle X(\omega) = -\omega$.

(β)

$$\begin{aligned} X(0) &= \lim_{\omega\to 0} 4\, e^{-j\omega}\left[\frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}\right] = \lim_{\omega\to 0} 4\, e^{-j\omega}\left[2\frac{\sin 2\omega}{2\omega} - \frac{1-\cos\omega}{2\omega^2}\right] \\ &= \lim_{\omega\to 0} 4e^{-j\omega}\left[2\frac{\sin 2\omega}{2\omega} - \frac{1-\cos\omega}{2\omega^2}\right] = 4\left[2 - \lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{4\omega}\right] = 8-1 = 7 \end{aligned} \quad (5.5.45)$$

(γ) Αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό $X(\omega)$ στο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[4\frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}\right] e^{-j\omega}\, d\omega. \quad (5.5.46)$$

Κάνουμε τη σκέψη να αναγάγουμε τα ολοκληρώματα στην (5.5.46) σ' αυτά των αντιστρόφων μετασχηματισμών Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 4\frac{\sin 2\omega}{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad (5.5.47)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad (5.5.48)$$

τα οποία να υπολογίσουμε και ακολούθως να πάρουμε τις τιμές τους για $t=-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} 4\frac{\sin 2\omega}{\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega\Big] &= 2[u(t+2)-u(t-2)] \xrightarrow{t=-1} 2\times 2\pi \quad (5.5.49) \\ \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}\, e^{j\omega t}\, d\omega\Big] &= (1-|t|) \xrightarrow{t=-1} 0\times 2\pi. \quad (5.5.50) \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega = 4\pi. \quad (5.5.51)$$

(δ) Ξεκινώντας από την

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(\omega)\,\frac{2\sin\omega}{\omega}}_{H(\omega)}\, e^{j2\omega}\, d\omega \quad (5.5.52)$$

παίρνουμε

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}. \quad (5.5.53)$$

Αναγνωρίζουμε ότι $h(2)$ είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα, όπου

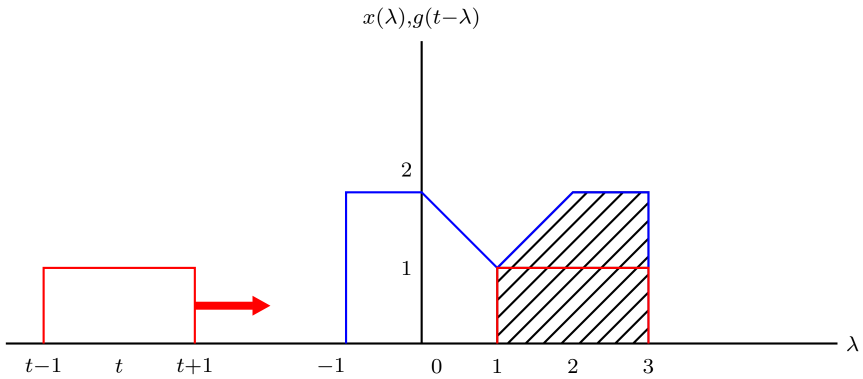
$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{H(\omega)\Big\} = \mathcal{F}^{-1}\Big\{X(\omega)\,\frac{2\sin\omega}{\omega}\Big\} = x(t) * \underbrace{[u(t+1)-u(t-1)]}_{g(t)}. \quad (5.5.54)$$

Η τιμή της συνέλιξης στην (5.5.54) για $t = 2$ ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου, όταν ο ορθογώνιος παλμός έχει κέντρο για $t = 2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5.4.

$$x(t) * [u(t+1) - u(t-1)] = 2 + (\frac{1+2}{2} \times 1) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \tag{5.5.55}$$

οπότε

$$h(2) = 2\pi\,(\frac{7}{2}) = 7\pi. \tag{5.5.56}$$



Σχήμα 5.5.4: Υπολογισμός συνέλιξης στο ερώτημα 5.5.4(δ).

(ε)

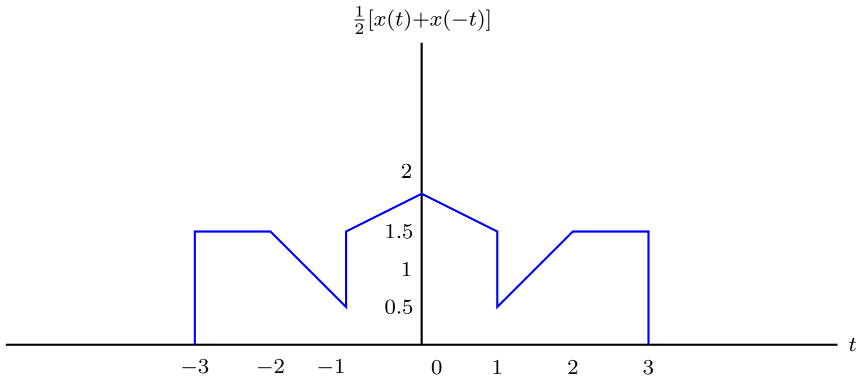
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt \\
&= 2\pi\Big[\int_{-1}^{0} x^2(t)\, dt + \int_{0}^{1} x^2(t)\, dt + \int_{1}^{2} x^2(t)\, dt + \int_{2}^{3} x^2(t)\, dt\Big] \\
&= 2\pi\Big[4\int_{-1}^{0} dt + \int_{0}^{1} (2-t)^2\, dt + \int_{1}^{2} t^2\, dt + \int_{2}^{3} 4\, dt\Big] = \\
&= 2\pi\Big[8 + \Big[\frac{t^3}{3}\Big]_1^2 + \int_{0}^{1} 4\, dt - 4\int_{0}^{1} t\, dt + \int_{0}^{1} t^2\, dt\Big] = \\
&= 2\pi\Big[8 + \Big[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\Big] + 4 - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big] \\
&= 2\pi\Big[10 + \frac{8}{3}\Big] = 20\pi + \frac{16\pi}{3} = \frac{76\pi}{3}.
\end{aligned} \tag{5.5.57}$$

(στ)

$$Re\{X(\omega)\} = \frac{X(\omega) + X^*(\omega)}{2} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \tag{5.5.58}$$

επειδή για το πραγματικό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$X^*(-\omega) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x^*(t) \Leftrightarrow X^*(\omega) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x^*(-t) = x(-t). \tag{5.5.59}$$



Σχήμα 5.5.5: Σήμα $\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

Το αποτέλεσμα σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.5.5.

5.5.5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων:

(α) $f(t) = 2\cos\omega_1 t\ \cos\omega_2 t$

(β) $f(t) = g(t)\cos^2\omega_1 t$, όπου $G(\omega)$ είναι γνωστός

(γ) $g(t) = f(at-1)$, όπου $F(\omega)$ είναι γνωστός.

Λύση:

(α)

$$\cos\omega_1 t \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad F_1(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)] \tag{5.5.60}$$

$$\cos\omega_2 t \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad F_2(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_2)] \tag{5.5.61}$$

$$2\cos\omega_1 t\ \cos\omega_2 t \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2}{2\pi}[(F_1*F_2)(\omega)] = \frac{1}{\pi}[(F_1*F_2)(\omega)]. \tag{5.5.62}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
(F_1*F_2)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\Big[\delta(\lambda-\omega_1)+\delta(\lambda+\omega_1)\Big]\pi\Big[\delta(\omega-\lambda-\omega_2)+ \\
&\quad +\delta(\omega-\lambda+\omega_2)\Big]\, d\lambda \\
&= \pi^2\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\delta(\lambda-\omega_1)\delta\Big[\omega-\lambda-\omega_2\Big]+ \\
&\quad +\delta(\lambda-\omega_1)\delta(\omega-\lambda+\omega_2)+\delta(\lambda+\omega_1)\delta(\omega-\lambda-\omega_2)+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\delta(\lambda+\omega_1)\delta(\omega-\lambda+\omega_2)\Big]\, d\lambda\Big\} \\
= \;& \pi^2\Big[\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+\delta(\omega-\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1-\omega_2)+ \\
& +\delta(\omega+\omega_1+\omega_2)\Big] \\
= \;& \pi^2\Big\{\delta\Big[\omega-(\omega_1+\omega_2)\Big]+\delta\Big[\omega-(\omega_1-\omega_2)\Big]+ \\
& +\delta\Big[\omega+(\omega_1-\omega_2)\Big]+\delta\Big[\omega+(\omega_1+\omega_2)\Big]\Big\}. \qquad (5.5.63)
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τις (5.5.62) και (5.5.63) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
2\cos\omega_1 t\ \cos\omega_2 t \ \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ & \pi\Big[\delta\Big[\omega-(\omega_1+\omega_2)\Big]+\delta\Big[\omega-(\omega_1-\omega_2)\Big]+ \\
& +\delta\Big[\omega+(\omega_1-\omega_2)\Big]+\delta\Big[\omega+(\omega_1+\omega_2)\Big]\Big]. \qquad (5.5.64)
\end{aligned}
$$

(β) Επειδή

$$g(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(\omega) \qquad (5.5.65)$$

και

$$
\begin{aligned}
2\cos^2\omega_1 t \ \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ & F(\omega) \stackrel{(5.5.64)}{=} \pi\Big[\delta(\omega-2\omega_1)+\delta(\omega)+\delta(\omega)+\delta(\omega+2\omega_1)\Big] \\
= \;& \pi\Big[2\delta(\omega)+\delta(\omega-2\omega_1)+\delta(\omega+2\omega_1)\Big] \qquad (5.5.66)
\end{aligned}
$$

τότε:

$$
\begin{aligned}
g(t)\cos^2\omega_1 t \ \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ & \frac{1}{2\pi}\Big[(G*F)(\omega)\Big] \\
= \;& \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2}\Big[G(\omega)*\Big[2\delta(\omega)+\delta(\omega-2\omega_1)+\delta(\omega+2\omega_1)\Big]\Big] \\
= \;& \frac{1}{4}\Big[2G(\omega)+G(\omega-2\omega_1)+G(\omega+2\omega_1)\Big] \\
= \;& \frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{4}\Big[G(\omega-2\omega_1)+G(\omega+2\omega_1)\Big]. \qquad (5.5.67)
\end{aligned}
$$

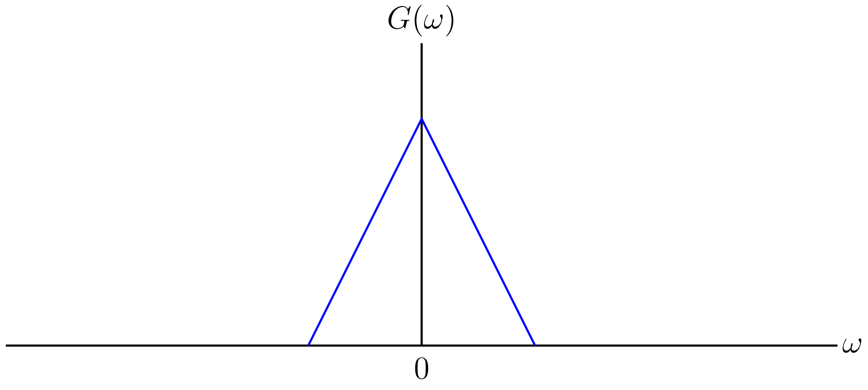
Αν $G(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του Σχήματος 5.5.6, τότε ο προκύπτων μετασχηματισμός σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.5.7.

(γ)

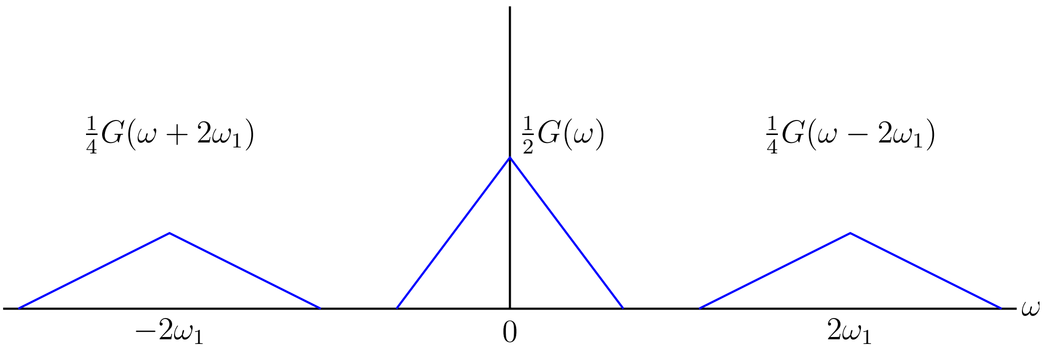
$$g(t) = f(at-1) = f[a(t-\frac{1}{a})] \qquad (5.5.68)$$

Θα κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων:

$$
\begin{aligned}
f(t) \ &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ F(\omega) \qquad (5.5.69) \\
f(at) \ &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\ \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}) \qquad (5.5.70)
\end{aligned}
$$



Σχήμα 5.5.6: Μετασχηματισμός Fourier $G(\omega)$.



Σχήμα 5.5.7: Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $g(t)\cos^2\omega_1 t$.

οπότε

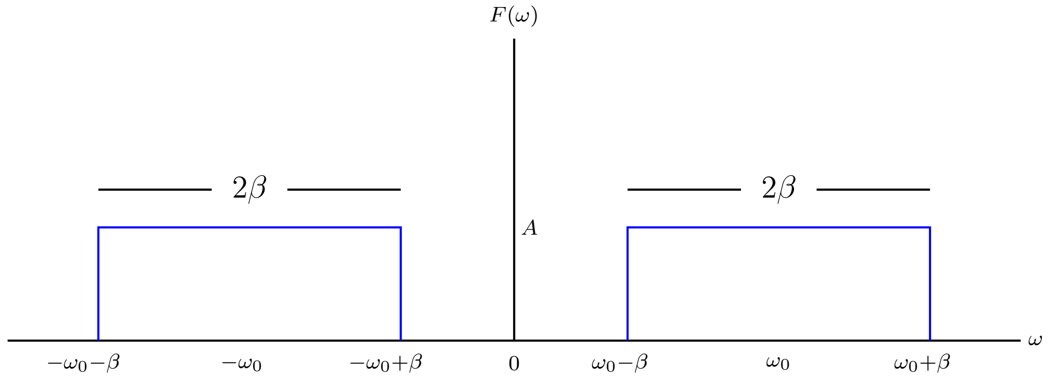
$$h(z) = f(\underbrace{t - \frac{1}{a}}_{z}) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad H(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{a}}\, F(\omega) \tag{5.5.71}$$

$$g(t) = h(az) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|} H(\frac{\omega}{a}) = \frac{1}{|a|}\, e^{-j\frac{\omega}{a^2}}\, F(\frac{\omega}{a}). \tag{5.5.72}$$

5.5.6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\sin\omega_0 t$ από το γνωστό μετασχηματισμό Fourier του $e^{j\omega_0 t}$.

Λύση:

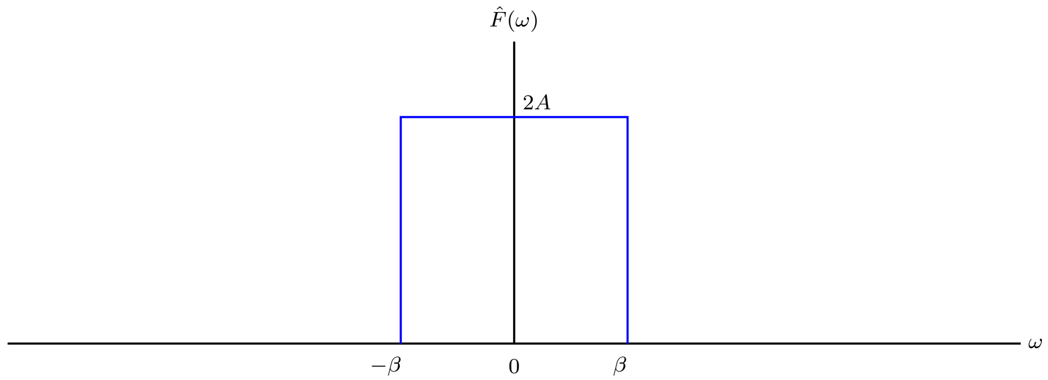
$$\begin{aligned} \sin\omega_0 t &= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j}\Big[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\Big] \\ &= j\pi\Big[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\Big]. \end{aligned} \tag{5.5.73}$$



Σχήμα 5.5.8: Φάσμα $F(\omega)$.

5.5.7. Να βρεθεί το σήμα που έχει μετασχηματισμό Fourier αυτόν του Σχήματος 5.5.8.
Λύση:

Είναι φανερό ότι το $F(\omega)$ του Σχήματος 5.5.8 είναι το φάσμα του διαμορφωμένου κατά πλάτος σήματος βασικής ζώνης με μετασχηματισμό $\hat{F}(\omega)$, που σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.5.9. Η αναλυτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier του διαμορφωμένου σήματος είναι:



Σχήμα 5.5.9: Φάσμα $\hat{F}(\omega)$ σήματος βασικής ζώνης.

.

$$F(\omega) = A\Big\{\Big[u(\omega-\omega_0+\beta)-u(\omega-\beta-\omega_0)\Big]+\Big[u(\omega+\omega_0+\beta)-u(\omega+\omega_0-\beta)\Big]\Big\}. \quad (5.5.74)$$

Έστω το ζεύγος

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega). \quad (5.5.75)$$

Αν

$$g(t) = \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right] \quad (5.5.76)$$

τότε η **αποδιαμόρφωση πλάτους** (amplitude demodulation) συνίσταται σε

$$r(t) = f(t)\, g(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} R(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega). \tag{5.5.77}$$

Αλλά

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega) = \frac{\pi}{2\pi}\Big[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\Big] = \frac{1}{2}\Big[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\Big]. \tag{5.5.78}$$

Δηλαδή αν

$$f(t) = \hat{f}(t)\, \cos\omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) \quad \text{αυτόν του Σχήματος 5.5.8} \tag{5.5.79}$$

επειδή

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\Big[\hat{F}(\omega-\omega_0) + \hat{F}(\omega+\omega_0)\Big] \tag{5.5.80}$$

με αντικατάσταση της (5.5.80) στην (5.5.78) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)] \\ &= \frac{1}{4}[\hat{F}(\omega) + \hat{F}(\omega+2\omega_0) + \hat{F}(\omega-2\omega_0) + \hat{F}(\omega)] \\ &= \frac{1}{2}\hat{F}(\omega) + \frac{1}{4}\hat{F}(\omega+2\omega_0) + \frac{1}{4}\hat{F}(\omega-2\omega_0). \end{aligned} \tag{5.5.81}$$

Οπότε αν φιλτράρω το $R(\omega)$ με ένα κατωδιαβατό φίλτρο θα προκύψει το $\frac{1}{2}\hat{F}(\omega)$. Από το Σχήμα 5.5.8 και τη (5.5.74) αναγνωρίζω ότι:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2}\Big[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)\Big] = \\ &= A\Big[u(\omega+\beta) - u(\omega-\beta)\Big] + +\frac{A}{2}\Big[u(\omega+2\omega_0+\beta) - u(\omega+2\omega_0-\beta)\Big] \\ &\quad +\frac{A}{2}\Big[u(\omega-2\omega_0+\beta) - u(\omega-2\omega_0-\beta)\Big]. \end{aligned} \tag{5.5.82}$$

Συνεπώς από τις (5.5.81) και (5.5.82) ταυτοποιώ ότι

$$\frac{1}{2}\hat{F}(\omega) = A\Big[u(\omega+\beta) - u(\omega-\beta)\Big] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \hat{f}(t) = 2A\frac{\beta}{\pi}\mathrm{sinc}(\beta t) \tag{5.5.83}$$

και επομένως

$$f(t) = \hat{f}(t)\, \cos\omega_0 t = \frac{2A\beta}{\pi}\mathrm{sinc}(\beta t)\, \cos\omega_0 t \tag{5.5.84}$$

όπου $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

5.5.8. Να δείξετε ότι αν

$$e^{j\varphi(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) \tag{5.5.85}$$

και $\varphi(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε

$$\begin{aligned} \cos\phi(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{F(\omega)+F^*(-\omega)}{2} && (5.5.86)\\ \sin\phi(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{F(\omega)-F^*(-\omega)}{2j}. && (5.5.87) \end{aligned}$$

Λύση:

Από τη (5.5.85) παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\phi(t)}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\phi(t)-\omega t)}\, dt && (5.5.88)\\ \mathcal{F}\{e^{-j\phi(t)}\} &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\phi(t)}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j[\phi(t)+\omega t]}\, dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\phi(t)+\omega t)} dt\right]^* \stackrel{(5.5.88)}{=} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\phi(t)-\theta t)}\, dt\Big|_{\theta=-\omega}\right]^* \\ &= F^*(-\omega) && (5.5.89) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \cos\phi(t) = \frac{e^{j\varphi(t)}+e^{-j\phi(t)}}{2} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{F(\omega)+F^*(-\omega)}{2} && (5.5.90)\\ \sin\phi(t) = \frac{e^{j\phi(t)}-e^{-j\phi(t)}}{2j} &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{F(\omega)-F^*(-\omega)}{2j}. && (5.5.91) \end{aligned}$$