



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σήματα-Συστήματα

**Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα
συνεχούς χρόνου – Μετασχηματισμός Fourier**

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Τμήμα Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

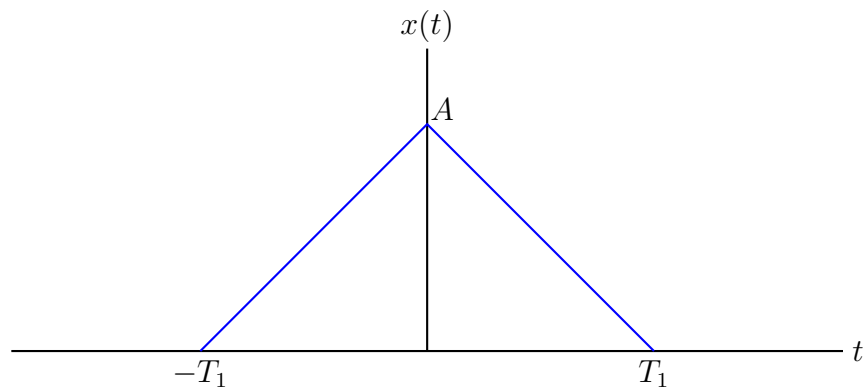


Κεφάλαιο 5

Μετασχηματισμός Fourier

5.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Έστω το μη-περιοδικό σήμα $x(t)$ που εκτείνεται από $-T_1$ ως T_1 και σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.1. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου T , ώστε από το



Σχήμα 5.1: Μη-περιοδικό σήμα $x(t)$.

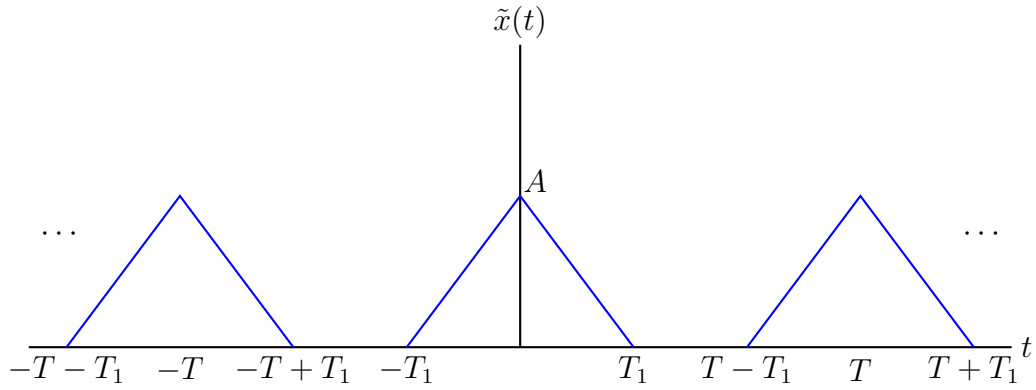
περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ να μπορεί να αποκαλυφθεί το μη-περιοδικό $x(t)$. Κατάλληλες τιμές του T ικανοποιούν τη σχέση $T \geq 2T_1$, όπως διαπιστώνεται από την επισκόπηση του Σχήματος 5.2.

Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad (5.1)$$

όπου οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier δίνονται από τη

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (5.2)$$

Σχήμα 5.2: Περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$.

Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T}{2}$, οπότε

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (5.3)$$

Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| \geq \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T} X(n\omega_0) \quad (5.4)$$

όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (5.5)$$

Αντικαθιστώντας την (5.4) στην (5.1) παίρνουμε

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}. \quad (5.6)$$

Επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, η (5.6) ξαναγράφεται

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0 X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}. \quad (5.7)$$

Αν $T \rightarrow \infty$, τότε

$$\omega_0 \rightarrow d\omega, \quad n\omega_0 \rightarrow \omega, \quad \tilde{x}(t) \rightarrow x(t) \quad (5.8)$$

και το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα. Έτσι προκύπτει ο ορισμός του **αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier** ή αλλιώς η **εξίσωση σύνθεσης**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.9)$$

ενώ η (5.5) μεταγράφεται ως

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.10)$$

ορίζοντας τον **ευθύ μετασχηματισμό Fourier** ή αλλιώς την **εξίσωση ανάλυσης**. Λέμε ότι $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad \text{ή} \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega). \quad (5.11)$$

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι **διακριτό** συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη-περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:

1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
2. Αντικατάσταση του μη-περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη-περιοδικό σήμα.

Τί είδους είναι το φάσμα του μη-περιοδικού σήματος $x(t)$;

1. Μήπως είναι διακριτό, όπου το διάστημα μεταξύ δυο φασματικών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T ;
2. Ή μήπως είναι συνεχές, όπως υπονοούν οι εξισώσεις ορισμού του μετασχηματισμού Fourier;

Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη-περιοδικού σήματος είναι **συνεχές**. Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη-περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη-περιοδικό σήμα $x(t)$.

- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα **σήματα ενέργειας**. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

- τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
- η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

5.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

5.2.1 Ιδιότητες συζυγούς συμμετρίας

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση. Επομένως αναλύεται ως εξής

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (5.12)$$

$$= |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} \quad (5.13)$$

όπου $R(\omega) = \text{Re}\{X(\omega)\}$, $I(\omega) = \text{Im}\{X(\omega)\}$ και

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \quad (5.14)$$

$$\angle X(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}. \quad (5.15)$$

Μας απασχολεί η περίπτωση των **πραγματικών σημάτων**, δηλαδή $x(t) \in \mathbb{R}$. Τότε

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt}_{R(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt}_{-I(\omega)}. \quad (5.16)$$

Αν αναλύσουμε το σήμα $x(t)$ σε συνιστώσες άρτιας και περιττής συμμετρίας στο πεδίο του χρόνου και χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις για το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων άρτιας και περιττής συμμετρίας προκύπτει

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_e(t) + x_o(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) \cos \omega t dt}_{R_e(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) \sin \omega t dt}_{-I_o(\omega)} = R_e(\omega) + I_o(\omega) \end{aligned} \quad (5.17)$$

όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω , ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω . Διαπιστώνουμε ότι:

1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t , τότε

$$\begin{cases} I(\omega) \equiv 0 \\ X(\omega) \text{ πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς } \omega: X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega). \end{cases} \quad (5.18)$$

2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t , τότε

$$\begin{cases} R(\omega) \equiv 0 \\ X(\omega) \text{ φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς } \omega: X(\omega) = j I(\omega) = I_o(\omega). \end{cases} \quad (5.19)$$

3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t , τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω .
4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω , ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω .

Παράδειγμα 5.1. Έστω

$$x(t) = e^{-3t} u(t). \quad (5.20)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (5.10) προκύπτει

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt. \quad (5.21)$$

Από τη Μαθηματική Ανάλυση γνωρίζουμε την εξής σημαντική ταυτότητα για $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} e^{-at} \sin \omega t dt \\ &= \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a + j\omega} \end{aligned} \quad (5.22)$$

οπότε

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \Big|_{a=3} = \frac{1}{3 + j\omega} = \frac{3 - j\omega}{9 + \omega^2} = \underbrace{\frac{3}{9 + \omega^2}}_{R(\omega)} - j \underbrace{\frac{\omega}{9 + \omega^2}}_{-I(\omega)}. \quad (5.23)$$

Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{3^2}{(9 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(9 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{9 + \omega^2}{(9 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}} \quad (5.24)$$

$$\angle X(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3}\right). \quad (5.25)$$

5.2.2 Γραμμικότητα

Έστω

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega), \quad (5.26)$$

τότε για $a, b \in \mathbb{C}$

$$a x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X(\omega) + b Y(\omega). \quad (5.27)$$

Η (5.27) αποδεικνύεται με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (5.10).

5.2.3 Δυαδικότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega). \quad (5.28)$$

Απόδειξη: Από την εξίσωση σύνθεσης (5.9) παίρνουμε

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.29)$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t \rightarrow -t$, οπότε

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (5.30)$$

Αν γίνουν επιπλέον οι αλλαγές μεταβλητών $\omega \rightarrow t$ και $t \rightarrow \omega$, τότε

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{X(t)\}. \quad (5.31)$$

5.2.4 Χρονική αναστροφή

Με εφαρμογή της (5.10) προκύπτει ότι

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega). \quad (5.32)$$

5.2.5 Κλιμάκωση στο χρόνο

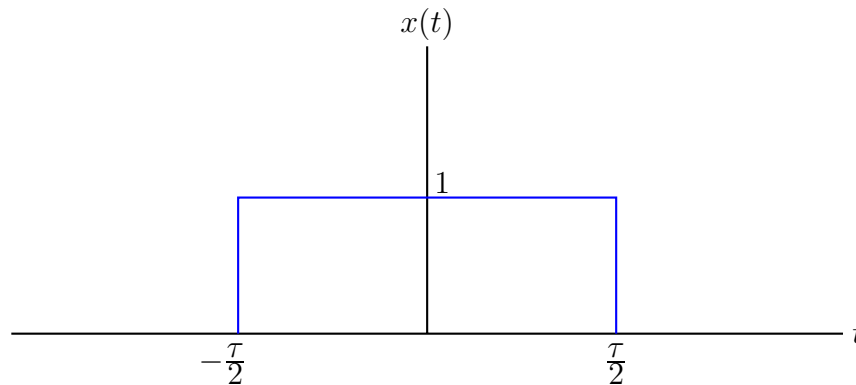
Μπορεί ναδειχθεί με απευθείας εφαρμογή της (5.10) ότι

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (5.33)$$

Παράδειγμα 5.2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού τετραγωνικού παλμού

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (5.34)$$

που σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.3.



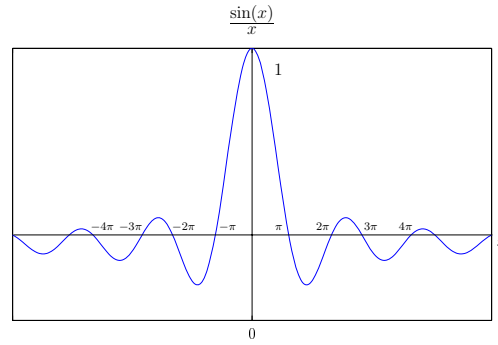
Σχήμα 5.3: Συμμετρικός τετραγωνικός παλμός.

Με εφαρμογή της (5.10) παίρνουμε

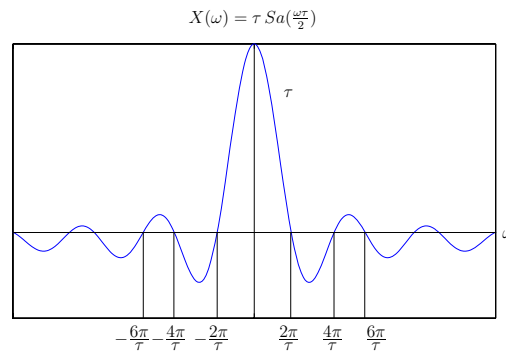
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \int_{-j\frac{\omega\tau}{2}}^{+j\frac{\omega\tau}{2}} e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left[e^{-t} \right]_{-j\frac{\omega\tau}{2}}^{+j\frac{\omega\tau}{2}} = -\frac{1}{j\omega} \left[e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega\tau}{2}} \right] = \frac{1}{j\omega} \left[e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} \left[\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Η συνάρτηση $\operatorname{sinc}(x)$ καλείται και συνάρτηση δειγματοληψίας και συμβολίζεται με $Sa(x)$ και σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.4. Ο μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού τετραγωνικού παλμού σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.5.

Συνήθως όμως έχουμε το ανάποδο πρόβλημα. Μας δίνεται ένας τετραγωνικός παλμός στη συχνότητα, όπως αυτός που σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.6, που αντιστοιχεί στην απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου και ζητείται να υπολογιστεί ο αντίστροφος



Σχήμα 5.4: Συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(x) = \text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.



Σχήμα 5.5: Μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού τετραγωνικού παλμού στο χρόνο.

μετασχηματισμός Fourier. Η αναλυτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier του Σχήματος 5.6 είναι

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \quad (5.36)$$

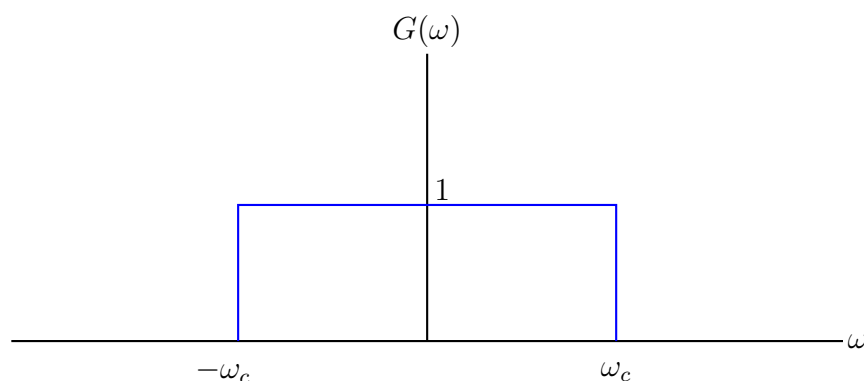
Ζητούμε το σήμα $g(t)$ που έχει τέτοιο μετασχηματισμό Fourier. Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει τα εξής. Αν

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (5.37)$$

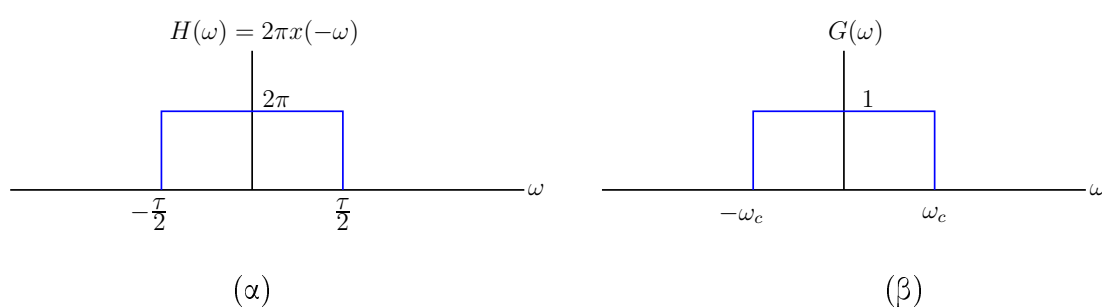
τότε

$$X(t) = \tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega) = \begin{cases} 2\pi & |\omega| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = H(\omega). \quad (5.38)$$

Οπότε πρέπει να μετασχηματίσουμε κατάλληλα το δεξί μέλος, ώστε να παράξουμε το $G(\omega)$ από το $H(\omega)$. Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\omega)$ και το επιθυμητό φάσμα $G(\omega)$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 5.7. Καταρχήν παρατηρώ ότι αν κλιμακώσω την $H(\omega)$ ως προς ω , δηλαδή $H\left(\frac{\omega}{a}\right)$ με $a > 0$, τότε εκλέγοντας $a = \frac{2\omega_c}{\tau}$ διαπιστώνω ότι το πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού $H\left(\frac{\omega}{a}\right)$



Σχήμα 5.6: Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου.



Σχήμα 5.7: Μετασχηματισμοί Fourier (α) $H(\omega)$, (β) $G(\omega)$.

αντιστοιχεί σε $|\omega| \leq \omega_c$, όπως επιθυμώ. Αν μάλιστα κλιμακώσω το πλάτος του $H(\frac{\omega}{a})$ κατά $\frac{1}{2\pi}$ επέρχεται ταύτιση με το μετασχηματισμό $G(\omega)$, δηλαδή

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H\left(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\right). \quad (5.39)$$

Πράγματι, όπως δείχνει το Σχήμα 5.8, μια τέτοια κλιμάκωση θα έλυνε το πρόβλημα της απεικόνισης του πεδίου ορισμού των μετασχηματισμών.

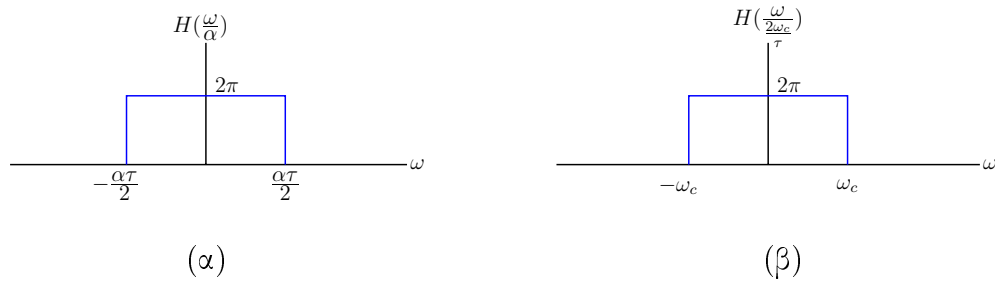
Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί αναδιατυπώνεται ως εξής. Αν

$$H(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = \tau \text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right) \quad (5.40)$$

να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H\left(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\right). \quad (5.41)$$

Αναγνωρίζουμε ότι πρέπει να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της κλιμάκωσης για $a = \frac{2\omega_c}{\tau}$. Σε



Σχήμα 5.8: (α) Μετασχηματισμός Fourier $H(\frac{\omega}{a})$. (β) Μετασχηματισμός Fourier $H(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}})$.

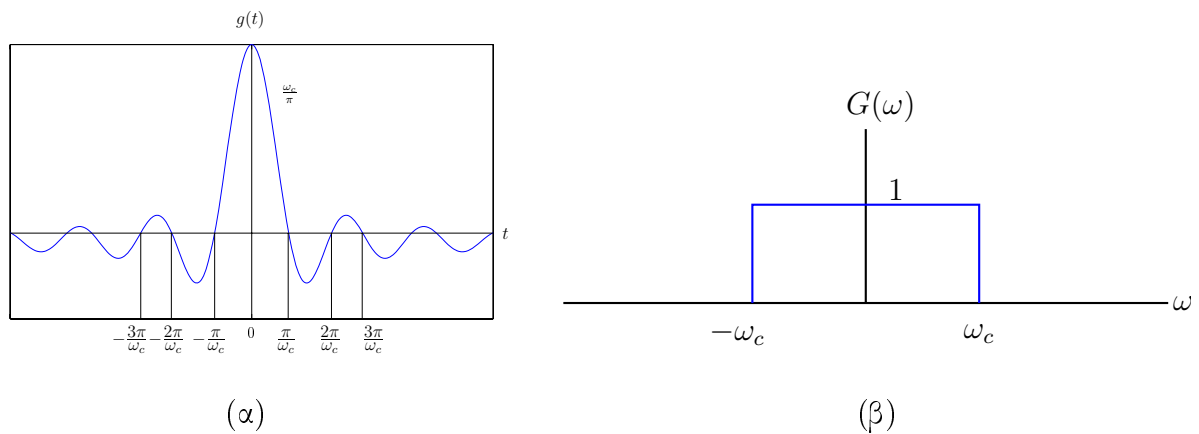
συνδυασμό με την ιδιότητα της γραμμικότητας, για να κανονικοποιήσουμε τα πλάτη, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\right) &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \left|\frac{2\omega_c}{\tau}\right| h\left(\frac{2\omega_c}{\tau}t\right) = \left|\frac{2\omega_c}{\tau}\right| \tau \text{Sa}\left(\frac{2\omega_c}{\tau}t\tau\right) \\ H\left(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\right) &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} 2\omega_c \text{Sa}(\omega_c t) \\ \frac{1}{2\pi} H\left(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\right) &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{2\omega_c}{2\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

δηλαδή

$$G(\omega) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t). \quad (5.43)$$

Το Σχήμα 5.9 δείχνει παραστατικά το ζεύγος $g(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(\omega)$.



Σχήμα 5.9: (α) Σήμα $g(t)$. (β) Μετασχηματισμός Fourier του σήματος $g(t)$: $G(\omega)$.

Επαλήθευση:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi jt} [e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi jt} [\cos(\omega_c t) + j \sin(\omega_c t) - \cos(\omega_c t) + j \sin(\omega_c t)] = \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_c t) \\
&= \frac{\omega_c t}{\pi t} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Επομένως καταλήξαμε στα εξής ζεύγη μετασχηματισμών:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{5.45}$$

$$g(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{5.46}$$

5.2.6 Χρονική μετατόπιση

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega). \tag{5.47}$$

5.2.7 Μετατόπιση στη συχνότητα

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \iff X(\omega - \omega_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{j\omega_0 t} x(t) \tag{5.48}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \iff X(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Παράδειγμα 5.3. Διαμόρφωση πλάτους (AM) [amplitude modulation]. Έστω $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ ένα σήμα βασικής ζώνης. Ένα διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα ορίζεται ως

$$x(t) = f(t) \cos(\omega_0 t). \tag{5.50}$$

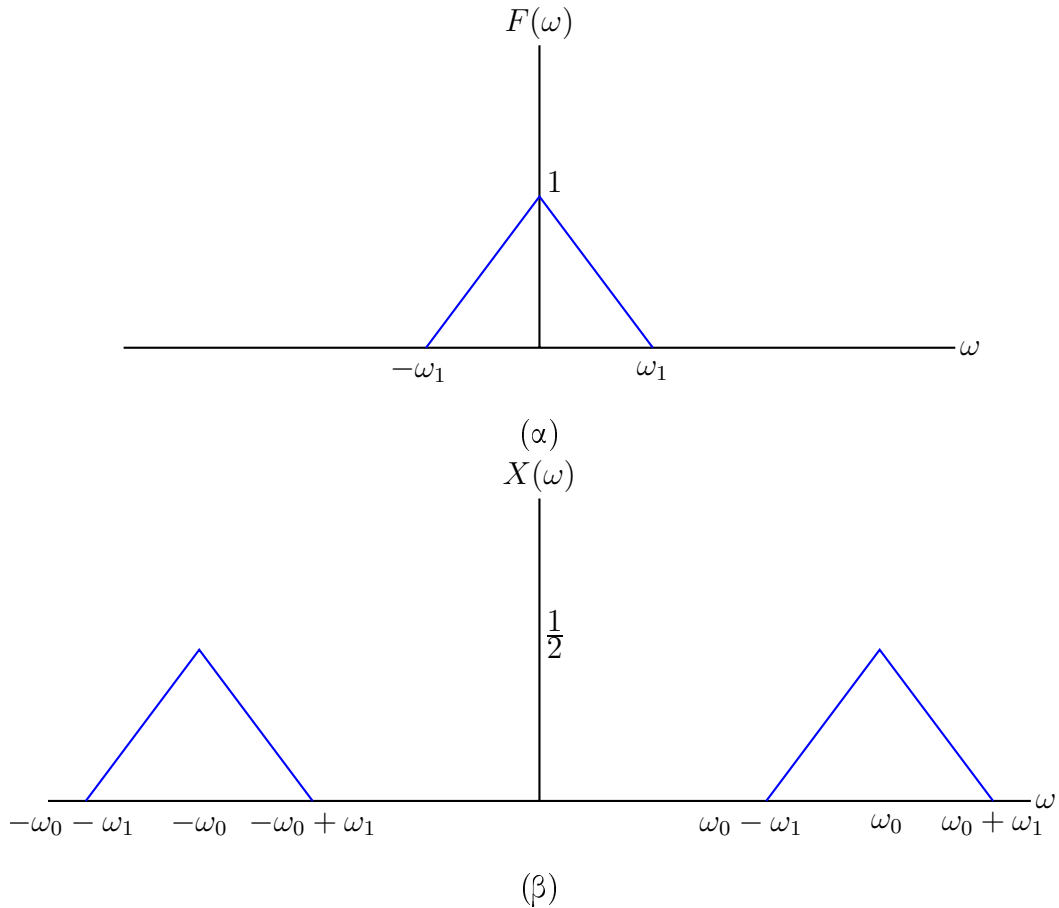
Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$ προκύπτει αναγνωρίζοντας ότι

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \tag{5.51}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα και τη γραμμικότητα

$$x(t) = \frac{1}{2}f(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t) e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \tag{5.52}$$

Δηλαδή, αν $F(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του Σχήματος 5.10α, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ θα έχει τη μορφή του Σχήματος 5.10β.



Σχήμα 5.10: (α) Μετασχηματισμός Fourier σήματος βασικής ζώνης $F(\omega)$. (β) Μετασχηματισμός Fourier διαμορφωμένου σήματος AM $X(\omega)$.

5.2.8 Συνέλιξη στο χρόνο

Αν

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega) \end{array} \right\} \text{τότε } f(t) = (x_1 * x_2)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega). \quad (5.53)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της συνέλιξης προκύπτει

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda) x_2(t - \lambda) d\lambda \quad (5.54)$$

οπότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $f(t)$ είναι

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda) x_2(t - \lambda) d\lambda \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda x_1(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \lambda) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda x_1(\lambda) e^{-j\omega\lambda}}_{X_1(\omega)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\lambda) e^{-j\omega(t-\lambda)} d(t-\lambda) \right]}_{X_2(\omega)} \\
&= X_1(\omega) X_2(\omega).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

5.2.9 Συνέλιξη στη συχνότητα

Αν

$$\begin{aligned}
x_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \\
x_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

τότε

$$F(\omega) = (X_1 * X_2)(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi x_1(t)x_2(t). \tag{5.57}$$

5.2.10 Μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου σήματος

Αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ τότε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \\
\frac{d^n}{dt^n}x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X(\omega).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

5.2.11 Παραγωγή στη συχνότητα

Αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ τότε

$$\begin{aligned}
t x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \\
t^n x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

5.2.12 Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος

Αν $x(t)$ είναι αιτιατό σήμα, τότε $x(t) = 0$ για $t < 0$. Θα δείξουμε ότι ένα αιτιατό σήμα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του μετασχηματισμού Fourier της συνιστώσας άρτιας ή περιττής συμμετρίας του. Πράγματι: οποιοδήποτε σήμα μπορεί να αναλυθεί ως

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \forall t. \tag{5.60}$$

Αλλά λόγω της αιτιατότητας για $t < 0$ έχουμε $x_e(t) = -x_o(t)$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες συμμετρίας για $t > 0$ προκύπτει ότι

$$x_e(t) = x_e(-t) \stackrel{-t \leq 0}{=} -[x_o(-t)] = x_o(t). \tag{5.61}$$

Επομένως για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) = 2x_o(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.62)$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως μετασχηματισμός Fourier του $x_e(t)$ ή του $x_o(t)$.

Αν όμως $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, τότε επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$R_e(\omega) = \mathcal{F}[x_e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{-j\omega t} dt = \operatorname{Re}\{X(\omega)\} \quad (5.63)$$

$$I_o(\omega) = -\mathcal{F}[x_o(t)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j\omega t} dt = j \operatorname{Im}\{X(\omega)\}. \quad (5.64)$$

Οι (5.62)–(5.64) φανερώνουν ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier ενός αιτιατού πραγματικού σήματος δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις. Ισχύουν επίσης και οι αντίστροφες σχέσεις:

$$x_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_e(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_e(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (5.65)$$

$$x_o(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I_o(\omega) e^{j\omega t} d\omega = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} I_o(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (5.66)$$

οπότε η (5.62) ξαναγράφεται ως

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_e(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_o(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (5.67)$$

5.2.13 Μετασχηματισμός Fourier συζυγών σημάτων

Αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ τότε

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega). \quad (5.68)$$

5.2.14 Ταυτότητα του Parseval

Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.69)$$

Απόδειξη: Έστω

$$f(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2. \quad (5.70)$$

Τότε

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \quad (5.71)$$

$$f(t) = x(t)x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \quad (5.72)$$

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης (5.10) για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $f(t)$ προκύπτει

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-j\omega t} dt \quad (5.73)$$

ενώ από την (5.72) έχουμε

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) X^*[\omega - (-\lambda)] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) X^*(\omega + \lambda) d\lambda \quad \forall \omega. \quad (5.74)$$

Οι (5.73) και (5.74) ισχύουν ταυτοτικά για κάθε ω , άρα και για $\omega = 0$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) X^*(\lambda) d\lambda \quad (5.75)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. Γενικότερα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega) Y(\omega) d\omega. \quad (5.76)$$

Αναγνωρίζουμε ότι το αριστερό μέλος της (5.75) είναι η ενέργεια του σήματος W άρα

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5.77)$$

οπότε η συνάρτηση

$$S(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} \quad (5.78)$$

ερμηνεύεται ως **πυκνότητα φάσματος ενέργειας**. Ο Πίνακας 5.1 συνοψίζει τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Βασικά ζεύγη σημάτων ενέργειας και αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier παρατίθενται στον Πίνακα 5.2.

5.3 Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό Fourier ειδικών σημάτων. Ως τέτοια θεωρούμε τις γενικευμένες συναρτήσεις (δηλαδή τη $\delta(t)$ και τις παραγώγους της), αλλά και σήματα, όπως τη συνάρτηση προσήμου, τη βηματική συνάρτηση, το σήμα $|t|$. Ο μετασχηματισμός

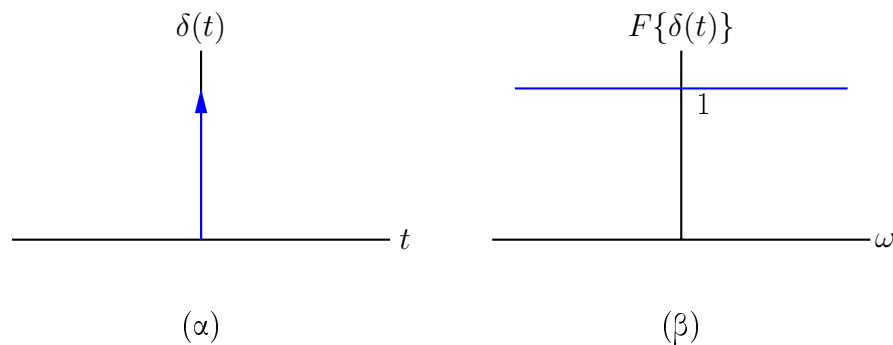
Fourier της $\delta(t)$ προκύπτει εξ ορισμού. Ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της $\delta(t)$, θα **αποδώσουμε** μετασχηματισμό Fourier στα φανταστικά εκθετικά $e^{j\omega_0 t}$ και στη βηματική συνάρτηση, για τα οποία δεν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet. Τούτο θα μας επιτρέψει κατ' επέκταση να αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier και στα περιοδικά σήματα στην επόμενη ενότητα.

5.3.1 Μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$

Με εφαρμογή του ορισμού προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = [e^{-j\omega t}]_{t=0} = 1. \quad (5.79)$$

Το Σχήμα 5.11 δείχνει το ζεύγος $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$. Άμεσα παρεπόμενα της (5.79) είναι τα εξής:



Σχήμα 5.11: (α) Σήμα $\delta(t)$. (β) Μετασχηματισμός Fourier του $\delta(t)$.

$$\delta(t \pm t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{\pm j\omega t_0} \quad (5.80)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (5.81)$$

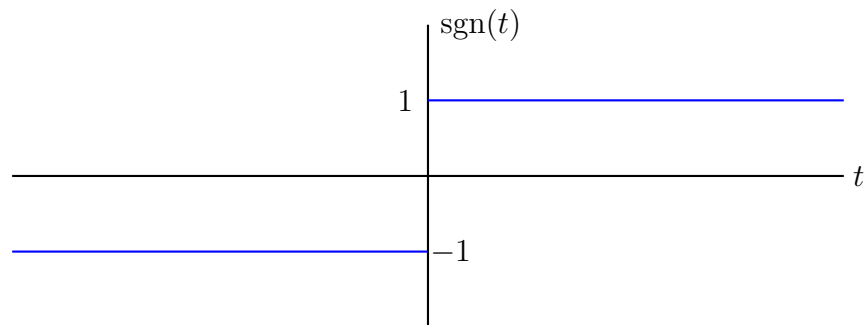
$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \delta(\omega) \quad (5.82)$$

Η εξίσωση σύνθεσης που αντιστοιχεί στην εξίσωση ανάλυσης (5.79) είναι

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega. \quad (5.83)$$

5.3.2 Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης προσήμου

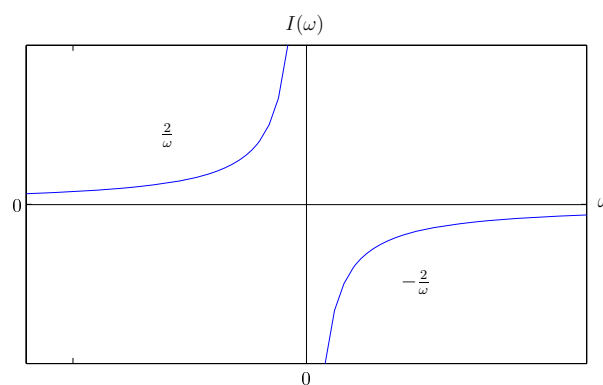
Η συνάρτηση προσήμου $\text{sgn}(t)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.12. Για τη συνάρτηση προσήμου ισχύει

Σχήμα 5.12: Σήμα $\text{sgn}(t)$.

το εξής ζεύγος μετασχηματισμού

$$\text{sgn}(t) = \frac{|t|}{t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} = I(\omega). \quad (5.84)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι καθαρώς φανταστικός και σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.13. Η



Σχήμα 5.13: Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης προσήμου.

απόδειξη της (5.84) στηρίζεται στην παράσταση της συνάρτησης προσήμου ως ορίου ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \right]. \quad (5.85)$$

5.3.3 Μετασχηματισμός Fourier βηματικής συνάρτησης

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (5.86)$$

Παράδειγμα 5.4. Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ και

$$g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (5.87)$$

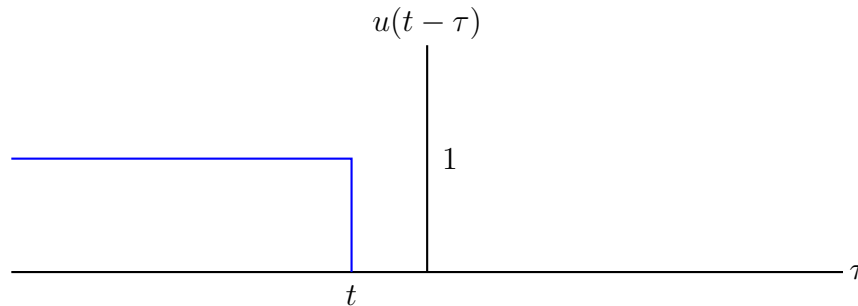
να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$, δηλαδή του ολοκληρώματος του σήματος $x(t)$.

Ισχύει

$$g(t) = \int_{-\infty}^t 1 x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - \tau) x(\tau) d\tau = (u * x)(t) \quad (5.88)$$

επειδή η $u(t - \tau)$, όπως σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.14, περιγράφει τα όρια του ολοκληρώματος.

Οπότε



Σχήμα 5.14: Σήμα $u(t - \tau)$ ως συνάρτηση του τ .

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} X(\omega) = \pi\delta(\omega) X(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega} = \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}. \quad (5.89)$$

5.3.4 Μετασχηματισμός Fourier της νιοστής παραγώγου της $\delta(t)$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει

$$\mathcal{F}\{\delta^{(n)}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-j\omega t} dt \triangleq (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = (j\omega)^n. \quad (5.90)$$

Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει τα ακόλουθα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier:

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n \\ (jt)^n &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \delta^{(n)}(\omega). \end{aligned} \quad (5.91)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αμφότερα τα μέλη της (5.91) με j^n

$$-(1)^n t^n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (5.92)$$

και τα μέλη της (5.92) με $(-1)^n$ παίρνουμε

$$t^n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (-1)^n 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega). \quad (5.93)$$

5.3.5 Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$

Έστω $x(t) = |t|$, τότε

$$x(t) = t u(t) - t u(-t) \quad (5.94)$$

$$\mathcal{F}\{|t|\} = \mathcal{F}\{t u(t)\} - \mathcal{F}\{t u(-t)\}. \quad (5.95)$$

Αλλά

$$t \xrightarrow{\mathcal{F}} -2\pi j \delta^{(1)}(\omega) \quad (5.96)$$

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5.97)$$

$$u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi \delta(-\omega) - \frac{1}{j\omega} = \pi \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \quad (5.98)$$

οπότε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[-2\pi j \delta^{(1)}(\omega) * \left\{ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right\} \right] - \frac{1}{2\pi} \left[-2\pi j \delta^{(1)}(\omega) * \left\{ \pi \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} 2\pi j \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2\pi} 2\pi j \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} \\ &= -2j \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} = -2\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{\omega} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(\xi) \frac{1}{\omega - \xi} d\xi \\ &= -2 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\omega - \xi} \right] \Big|_{\xi=0} = -2 \frac{-(-1)}{(\omega - \xi)^2} = -2 \frac{1}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Άρα

$$|t| \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{2}{\omega^2}. \quad (5.100)$$

5.4 Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος και κατά συνέπεια δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier. Είναι γνωστές οι ταυτότητες

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad (5.101)$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}). \quad (5.102)$$

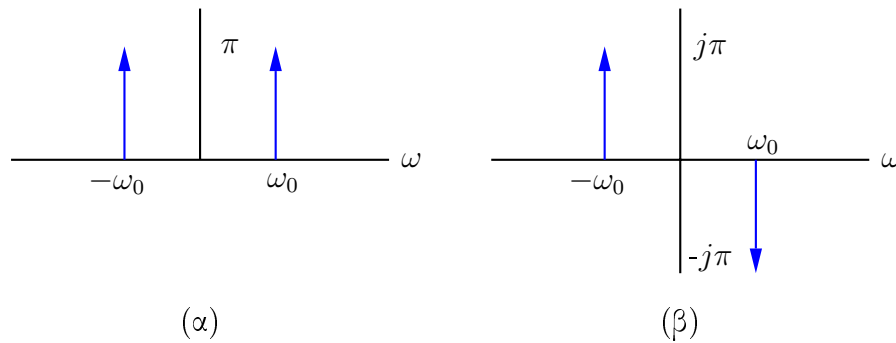
Οπότε, επειδή αποδώσαμε ήδη μετασχηματισμό Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\omega_0 t}$ ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$, κατ' εφαρμογή της γραμμικό-

τητας, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \right\} \\ &= \pi \left\{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right\}\end{aligned}\quad (5.103)$$

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = j\pi \left\{ \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) \right\}.\quad (5.104)$$

Δηλαδή, οι μετασχηματισμοί Fourier των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι φάσματα γραμμικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: Μετασχηματισμός Fourier των σημάτων (α) $\cos \omega_0 t$ και (β) $\sin \omega_0 t$.

Έστω περιοδικό σήμα $x(t)$. Το περιοδικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε εκθετική σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}.\quad (5.105)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος θα προκύψει ως συνέπεια της απόδοσης μετασχηματισμού Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{jn\omega_0 t}$:

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \mathcal{F}\left\{ e^{jn\omega_0 t} \right\} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}\quad (5.106)$$

όπου a_n οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier που υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \underbrace{\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\}}_{X_T(\omega)} \Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} X_T(n\omega_0)\end{aligned}\quad (5.107)$$

και

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.108)$$

είναι το σήμα της πρώτης περιόδου. Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.109)$$

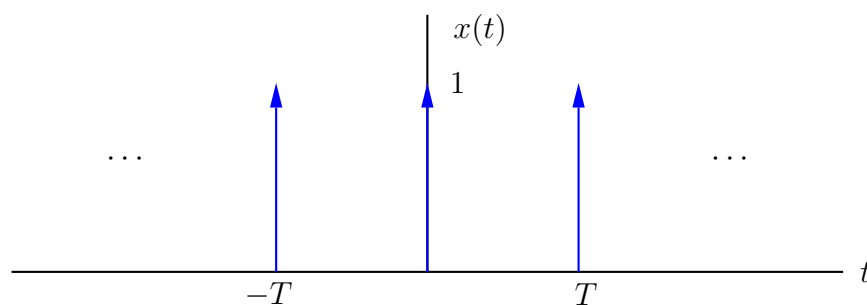
Αξίζει να σχολιαστεί ότι

- τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
- ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφάιρηση.

Παράδειγμα 5.5. Έστω η περιοδική παλμοσειρά $\delta(t - nT)$

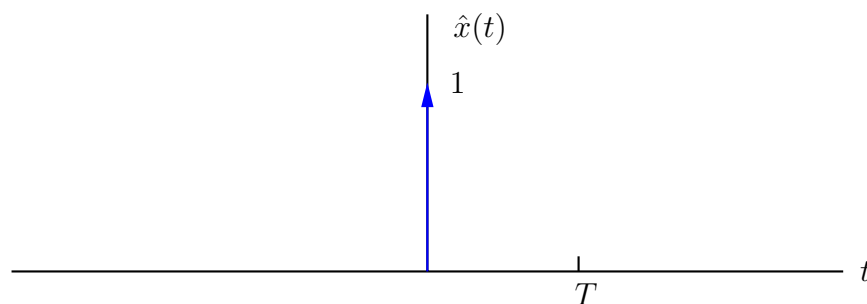
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (5.110)$$

που σχεδιάζεται στο Σχήμα 5.16. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T και θεμελιώδη συχνότη-



Σχήμα 5.16: Τρένο παλμών $\delta(t - nT)$, $n = \dots - 1, 0, 1, \dots$

τα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Το σήμα της πρώτης περιόδου $\hat{x}(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 5.17. Ο μετασχηματισμός



Σχήμα 5.17: Σήμα πρώτης περιόδου $\hat{x}(t)$ περιοδικού τρένου παλμών δέλτα.

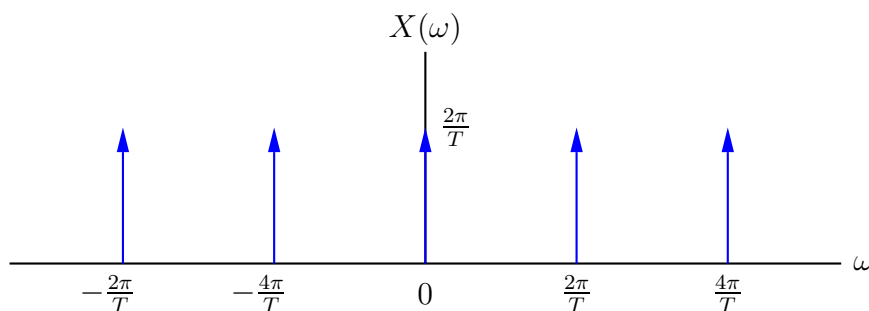
Fourier του σήματος της πρώτης περιόδου είναι

$$X_T(\omega) = \int_0^T \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (5.111)$$

οπότε $X_T(n\omega_0) = 1$ και

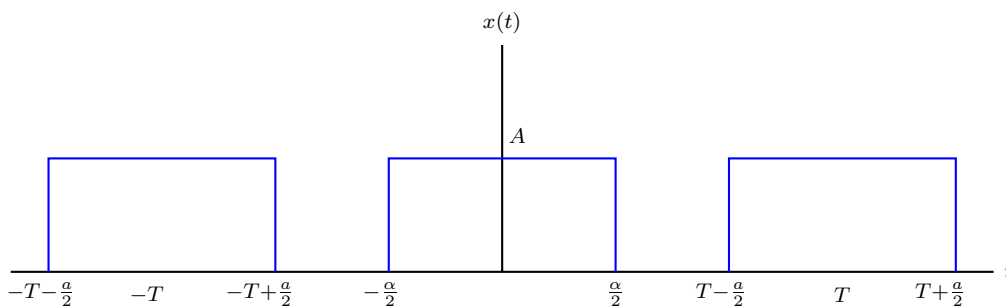
$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.112)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier εικονίζεται στο Σχήμα 5.18.



Σχήμα 5.18: Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού τρένου παλμών δ .

Παράδειγμα 5.6. Έστω η παλμοσειρά του Σχήματος 5.19. Ο μετασχηματισμός Fourier του

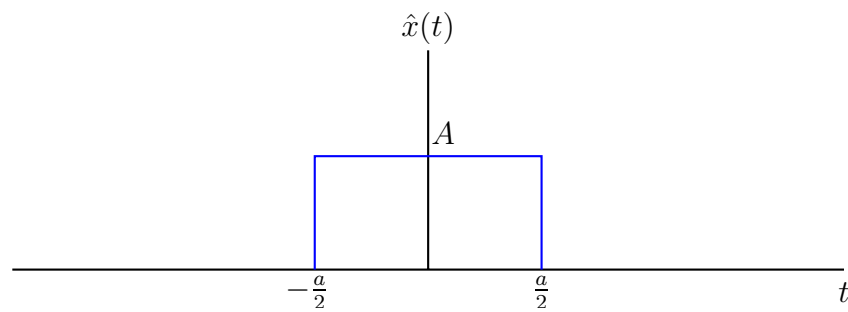


Σχήμα 5.19: Περιοδικό τρένο ορθογώνιων παλμών $x(t)$.

περιοδικού τρένου ορθογώνιων παλμών του Σχήματος 5.19 δίνεται από την

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (5.113)$$

όπου $X_T(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος της πρώτης περιόδου $\hat{x}(t)$. Το σήμα $\hat{x}(t)$ παρατίθεται στο Σχήμα 5.20. Επομένως



Σχήμα 5.20: Σήμα πρώτης περιόδου για το περιοδικό τρένο ορθογώνιων παλμών $\hat{x}(t)$.

$$\begin{aligned}
 X_T(\omega) &= A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} - \left[e^{-j\omega t} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{A}{j\omega} \left[-e^{-j\omega(a/2)} + e^{j\omega(a/2)} \right] \\
 &= \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega a}{2}\right) = \frac{Aa}{\frac{\omega a}{2}} \sin \frac{\omega a}{2} = Aa \text{Sa}\left(\frac{\omega a}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

Άρα

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Aa \text{Sa}\left(\frac{n\pi a}{T}\right) \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right). \tag{5.115}$$

Συνάγουμε ότι τα φάσματα των περιοδικών σημάτων είναι τα ίδια είτε αν υπολογιστούν μέσω της σειράς Fourier είτε μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Μετασχηματισμοί Fourier ειδικών σημάτων και σημάτων ισχύος παρατίθενται στον Πίνακα 5.3.

Πίνακας 5.1: Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου.

Ιδιότητα	Μη-περιοδικό σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$y(t)$	$Y(\omega)$
Γραμμικότητα	$a x(t) + b y(t)$	$a X(\omega) + b Y(\omega)$
Δυαδικότητα	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$e^{-j \omega t_0} X(\omega)$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{j \omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συζυγία	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Χρονική αναστροφή	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Χρονική και συχνοτική κλιμάκωση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Συνέλιξη	$(x * y)(t)$	$X(\omega) Y(\omega)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$
Διαφόριση στο χρόνο	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j \omega X(\omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$
Διαφόριση στη συχνότητα	$t x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(t) \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-\omega)\} \\ \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-\omega)\} \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
Πραγματικά σήματα άρτιας συμμετρίας	$x(t) \in \mathbb{R}, x(t) = x(-t)$	$X(\omega)$ πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας
Πραγματικά σήματα περιττής συμμετρίας	$x(t) \in \mathbb{R}, x(t) = -x(-t)$	$X(\omega)$ καθαρώς φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας
Αποσύνθεση σε άρτιο και περιττό μέρος πραγματικού σήματος	$\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(\omega)\} \\ j \operatorname{Im}\{X(\omega)\} \end{cases}$

Ταυτότητα Parseval για μη-περιοδικά σήματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Πίνακας 5.2: Μετασχηματισμοί Fourier σημάτων ενέργειας.

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$
$x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - t & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$	$X(\omega) = \left[\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right]^2$
$x(t) = e^{-a t} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = t e^{-a t} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a t} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$x(t) = e^{-a t} \sin \omega_0 t u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
$x(t) = e^{-a t} \cos \omega_0 t u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

Πίνακας 5.3: Μετασχηματισμοί Fourier ειδικών σημάτων και σημάτων ισχύος.

Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\delta(t)$	1
$\delta^{(1)}(t) = \delta'(t)$	$j\omega$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j \pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
Περιοδικό σήμα $x(t) = x(t+T)$ με αναπαράσταση σειράς Fourier	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$	
Περιοδικό σήμα με σήμα πρώτης περιόδου $x_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_T(\omega)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T(\frac{2\pi k}{T}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$	
Περιοδικό τρένο ορθογώνιων παλ- μών	$2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi k}{T} T_1)}{k} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$	
και $x(t+T) = x(t)$	
Περιοδικό τρένο παλμών δέλτα	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	