



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σήματα-Συστήματα **Μετασχηματισμός Laplace**

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμός Laplace

6.1 Ορισμός

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Όταν όμως το σήμα δεν έχει μετασχηματισμό Fourier, τότε υπάρχει πρόβλημα. Γνωρίζουμε ότι για να ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier το σήμα πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, π.χ. να είναι σήμα ενέργειας. Είδαμε ότι για τα σήματα $u(t)$ και $\text{sgn}(t)$ καθώς και για τις περιοδικές συναρτήσεις ο μετασχηματισμός Fourier δεν ορίστηκε απευθείας, αλλά αποδόθηκε μετασχηματισμός Fourier με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων. Έτσι προκύπτει αβίαστα η ανάγκη να μελετηθεί ο μετασχηματισμός Laplace, ο οποίος ορίζεται για τα προαναφερθέντα σήματα.

Για να εξαχθεί ο μετασχηματισμός Laplace εισάγεται μέσα στο ολοκλήρωμα του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier ένας αποσβενύμενος εκθετικός παράγοντας $e^{-\sigma t}$ με $\sigma > 0$ ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το σήμα $x(t)$, έτσι ώστε το προκύπτον σήμα $x(t)e^{-\sigma t}$ να διαθέτει καλώς ορισμένο μετασχηματισμό Fourier. Τούτο επιτυγχάνεται αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty. \quad (6.1)$$

Παρατηρήστε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα στην (6.1) είναι φραγμένο για $x(t) = u(t)$, $x(t) = tu(t)$, οποιοδήποτε πολυώνυμο ως προς t που είναι μηδέν για $t < 0$ είτε για αυξανόμενα εκθετικά σήματα, λόγω της παρουσίας του παράγοντα σύγκλισης $e^{-\sigma t}$. Ο μετασχηματισμός Fourier του τροποποιημένου σήματος δίνεται από την

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\sigma t} x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = X_1(\sigma + j\omega) \quad (6.2)$$

όπου η (6.2) υποδηλοί ότι το αποτέλεσμα είναι συνάρτηση του $\sigma + j\omega$. Ας πάρουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $X_1(\sigma + j\omega)$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega. \quad (6.3)$$

Θέτουμε $s = \sigma + j\omega$. Η μεταβλητή s λέγεται **μιγαδική συχνότητα** (complex frequency). Τότε ο **ευθύς δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace** ορίζεται ως

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (6.4)$$

Γενικά θα υπάρχει μια περιοχή τιμών του $\sigma = \text{Re}\{s\}$ και επομένως μια περιοχή του s στο μιγαδικό επίπεδο για την οποία ο $X(s)$ υπάρχει. Ο **αντίστροφος δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace** :

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds. \quad (6.5)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται ως ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο πάνω σε μια τροχιά (contour) παράλληλη προς τον $j\omega$ άξονα και ορισμένη για κάθε τιμή του σ τέτοια ώστε $X(s) = X(\sigma + j\omega)$ να συγκλίνει. Ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος στη γενική περίπτωση για οποιοδήποτε $X(s)$ απαιτεί τη χρήση επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στο μιγαδικό επίπεδο.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές μας ενδιαφέρει ο **μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace** που ισχύει για σήματα $x(t)$ που ορίζονται μόνο σε θετικούς χρόνους, δηλαδή $x(t) = 0$ για $t < 0$:

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{UL}\{x(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (6.6)$$

όπου το ολοκλήρωμα περιλαμβάνει τους χροστικούς παλμούς ή τις ανώμαλες συναρτήσεις (singularities) ανώτερης τάξης¹ για $t = 0$. Είναι φανερό ότι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace έχει ιδιαίτερη αξία για την ανάλυση αιτιατών συστημάτων και ιδιαίτερα συστημάτων που προσδιορίζονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και **μη-μηδενικές** αρχικές συνθήκες. Ο προσεκτικός αναγνώστης ανακαλεί από το Κεφάλαιο 3 ότι τέτοια συστήματα δεν είναι γραμμικά, αλλά στοιχειωδώς γραμμικά. Από την εξίσωση ορισμού του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά έγκειται στο κάτω όριο ολοκλήρωσης. Συνεπώς δύο σήματα που διαφέρουν για $t < 0$, αλλά είναι ταυτόσημα

¹Ανώμαλες συναρτήσεις ανώτερης τάξης είναι οι παράγωγοι πρώτης, δεύτερης κ.ο.κ τάξης των χροστικών παλμών ή πολλαπλά ολοκληρώματα της βηματικής συνάρτησης.

για $t \geq 0$ θα έχουν διαφορετικούς δίπλευρους μετασχηματισμούς Laplace, αλλά ταυτόσημους μονόπλευρους μετασχηματισμούς Laplace. Για σήματα που είναι ταυτοτικά μηδέν για $t < 0$, ο μονόπλευρος και ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace ταυτίζονται. Η μελέτη μας θα επικεντρωθεί στο δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace. Όπου απαιτείται θα κάνουμε την αναγκαία διάκριση μεταξύ δίπλευρου και μονόπλευρου μετασχηματισμού.

Σπανίως καταφεύγουμε στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace και αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace με τη χρήση των εξισώσεων ορισμού. Προτιμούμε τη χρήση πινάκων και την αξιοποίηση των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.

- Τα πλεονεκτήματα του μετασχηματισμού Laplace έναντι του μετασχηματισμού Fourier είναι τα εξής:
 - Η ευκολία υπολογισμού του μετασχηματισμού Laplace.
 - Ο μετασχηματισμός Laplace ενσωματώνει τις αρχικές συνθήκες στην επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και μετατρέπει τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.
 - Ο μετασχηματισμός Laplace παρέχει πληροφορίες για τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
 - Ορίζεται μετασχηματισμός Laplace και για σήματα που δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα.
- Ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται στις τηλεπικοινωνίες, τα φίλτρα, οπουδήποτε έχουμε να κάνουμε με το φάσμα.
- Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται στη θεωρία κυκλωμάτων και στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου.
- Ο μετασχηματισμός Fourier, εφόσον ορίζεται, μπορεί να υπολογιστεί απευθείας αν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace.

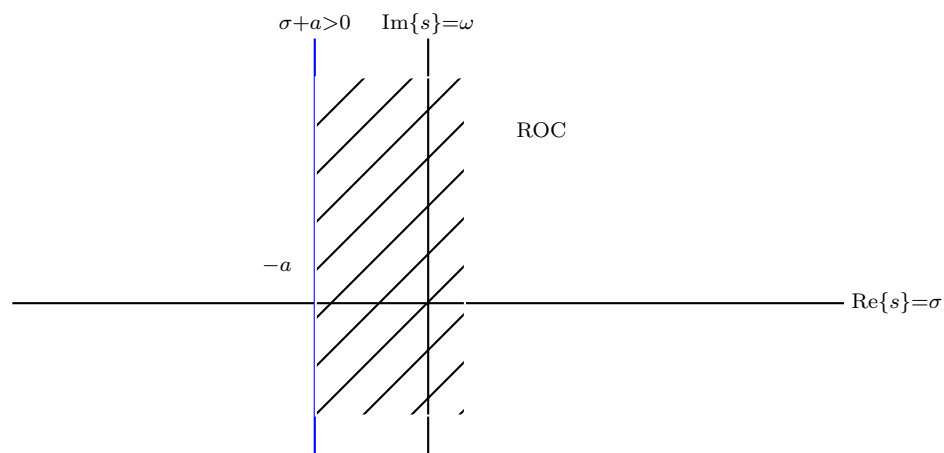
Μια έννοια που έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη του μετασχηματισμού Laplace είναι η **περιοχή σύγκλισης** (region of convergence, ROC). Ως περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace ορίζεται το διάστημα τιμών του $s = \sigma + j\omega$ για τις οποίες ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)e^{-\sigma t}$ συγκλίνει. Αν για ένα σήμα το ολοκλήρωμα ορισμού του μετασχηματισμού Laplace υπάρχει για μια τιμή $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, τότε υπάρχει $\forall s: \text{Re}\{s\} > \sigma_0$.

Παράδειγμα 6.1. Έστω $x(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$. Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορισμού για $s = \sigma + j\omega$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} X(\sigma + j\omega) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{(\sigma+a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0 \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Είναι προφανές ότι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace (6.7) είναι $\text{Re}\{s\} > -a$.

Η περιοχή σύγκλισης δείχνεται παραστατικά στο Σχήμα 6.1. Επειδή ο $j\omega$ άξονας (δηλαδή, η



Σχήμα 6.1: Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.

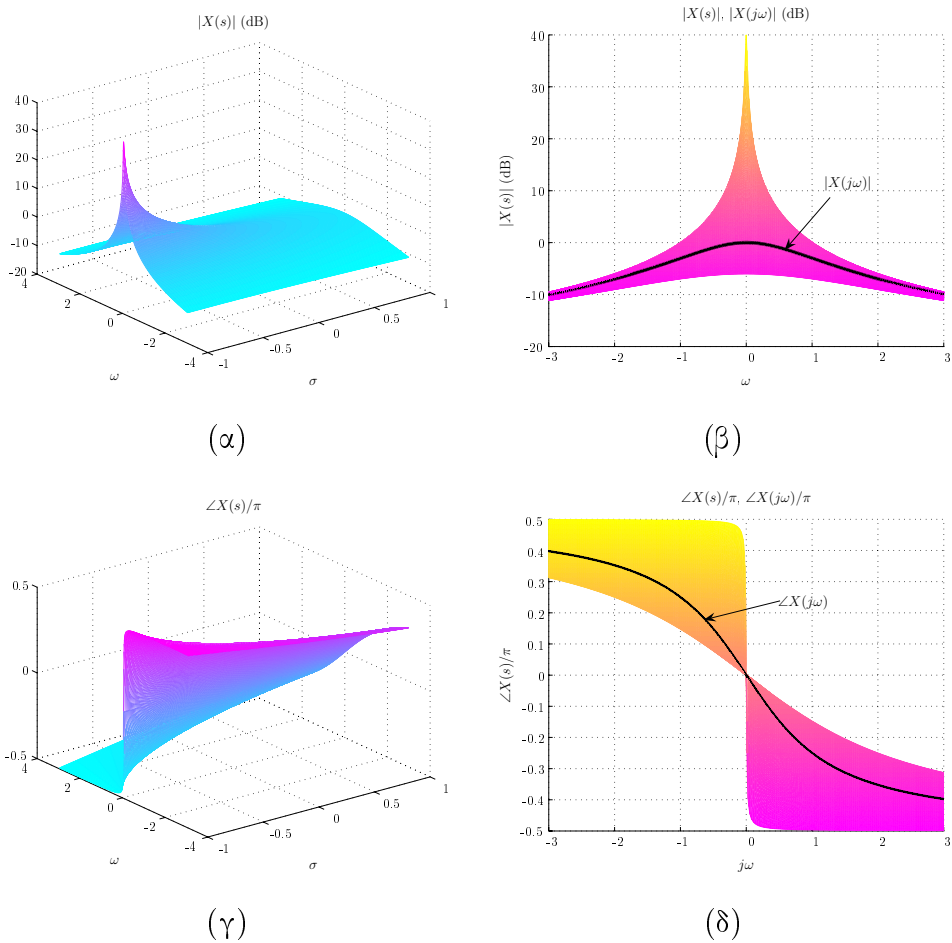
ευθεία $\text{Re}\{s\} = 0$) κείται εντός της περιοχής σύγκλισης, ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και προκύπτει από την (6.7) αν αντικαταστήσουμε όπου $s = j\omega$, δηλαδή

$$X(j\omega) = X(\sigma + j\omega) \Big|_{\sigma=0} = \frac{1}{j\omega + a}. \quad (6.8)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής που λαμβάνει μιγαδικές τιμές. Έτσι το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Laplace είναι στην ουσία διδιάστατες συναρτήσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2.

Υπό το πρίσμα του Παραδείγματος 6.1 συνάγουμε ότι η ύπαρξη του ολοκληρώματος στην (6.4) είναι εγγυημένη αν το σήμα $x(t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες **ικανές** συνθήκες:

1. το $x(t)$ είναι ολοκληρώσιμο σε κάθε πεπερασμένο διάστημα τιμών του t στην περιοχή $-\infty < t < +\infty$ και



Σχήμα 6.2: Μετασχηματισμός Laplace $X(s) = \frac{1}{s+1}$: (α) Μέτρο του μετασχηματισμού Laplace. (β) Παρατήρηση του τρισδιάστατου γραφήματος (α) από τον αρνητικό ημιάξονα των σ . Υπερτίθεται το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Φάση του μετασχηματισμού Laplace. (δ) Παρατήρηση του τρισδιάστατου γραφήματος (γ) από τον αρνητικό ημιάξονα των σ . Υπερτίθεται η φάση του μετασχηματισμού Fourier.

2. το $x(t)$ είναι **εκθετικής τάξης** καθώς t τείνει στο $\pm\infty$, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} = 0$ για κάποια περιοχή τιμών του σ .

Οι συνθήκες που προαναφέρθηκαν είναι ικανές, **αλλά όχι αναγκαίες**, επειδή υπάρχουν σήματα $x(t)$ που δεν τις ικανοποιούν, αλλά διαθέτουν μετασχηματισμό Laplace. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace είναι μια λωρίδα στο μιγαδικό επίπεδο. Πράγματι: διαχωρίζοντας το ολοκλήρωμα ορισμού του μετασχηματισμού Laplace (6.4) σε αρνητικά και θετικά χρονικά διαστήματα

$$X(s) = \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (6.9)$$

παρατηρούμε ότι για να υπάρχει το πρώτο ολοκλήρωμα στην (6.9) για τη χειρότερη δυνατή επιλογή $x(t) = e^{\alpha t}$, όταν $t < 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, πρέπει $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} < \alpha$. Όντως το πρώτο ολοκλήρωμα αναλύεται σε

$$\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - s)\xi} d\xi \quad (6.10)$$

απ' όπου καθίσταται προφανές ότι πρέπει $\alpha - \sigma > 0$ για να υπάρχει. Ομοίως για να υπάρχει το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (6.9) για τη χειρότερη δυνατή επιλογή $x(t) = e^{\beta t}$ για $t > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ πρέπει $\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > \beta$. Ο μετασχηματισμός Laplace θα υπάρχει **μόνο** αν $\alpha > \beta$. Γενικά η περιοχή σύγκλισης θα είναι μια ανοιχτή περιοχή του s .

Εφεξής ο μετασχηματισμός Fourier, όταν ορίζεται, θα παριστάνεται ως $X(j\omega)$ αντί $X(\omega)$ για να κάνουμε εμφανές ότι προκύπτει από το μετασχηματισμό Laplace αντικαθιστώντας όπου s το $j\omega$. Γενικά αν το σήμα $x(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός πραγματικών ή μιγαδικών εκθετικών, τότε ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (6.11)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή $N(s)$ ονομάζονται **μηδενικά** (zeros), ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται **πόλοι** (poles). Παρατηρούμε ότι στα μηδενικά μηδενίζεται ένας ρητός μετασχηματισμός Laplace, ενώ στους πόλους ένας ρητός μετασχηματισμός Laplace απειρίζεται.

Ας υποθέσουμε ότι ένας ρητός μετασχηματισμός Laplace αναλύεται ως

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_M s^M}{b_0 + b_1 s + \dots + b_N s^N} = \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}. \quad (6.12)$$

Σ' ένα ρητό μετασχηματισμό Laplace ο αριθμός των μηδενικών z_i πρέπει να ισούται με τον αριθμό των πόλων p_i . Τούτο είναι προφανές αν στην (6.12) $M = N$, οπότε όλοι οι πόλοι

και τα μηδενικά είναι **πρόδηλοι**. Αν $M < N$, τότε λείπουν μηδενικά. Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε $N - M$ **άδηλα μηδενικά** στο άπειρο, επειδή

$$X(s) = \frac{1}{s^{N-M}} \frac{a_M + a_{M-1}s^{-1} + \dots + a_0s^{-M}}{b_N + b_{N-1}s^{-1} + \dots + b_0s^{-N}} \quad (6.13)$$

και $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = 0$. Αν $M > N$, τότε λείπουν πόλοι. Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε $M - N$ **άδηλους πόλους** στο άπειρο, επειδή $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \infty$.

Παράδειγμα 6.2. Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t). \quad (6.14)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ είναι

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{Re}\{s\} > -1} + \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\text{Re}\{s\} > -2} \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > -1 \quad (6.15)$$

όπου για τον πρώτο παράγοντα του αθροίσματος στον $X(s)$ έχουμε ROC: $\text{Re}\{s\} > -1$, ενώ για τον δεύτερο παράγοντα έχουμε ROC: $\text{Re}\{s\} > -2$: οπότε τελικά προκύπτει ότι η περιοχή σύγκλισης του αθροίσματος των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace θα είναι η τομή των επιμέρους ROC, δηλαδή $\text{Re}\{s\} > -1$.

Κάνοντας πράξεις στην (6.15) παίρνουμε:

$$X(s) = \frac{(s+2) + (s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1. \quad (6.16)$$

Άρα ο $X(s)$ έχει ένα πρόδηλο μηδενικό για $s = -\frac{3}{2}$, ένα άδηλο μηδενικό για $s = \infty$ και δύο πρόδηλους πόλους για $s = -1$ και $s = -2$, αντιστοίχως. Το **διάγραμμα πόλων-μηδενικών** σχεδιάζεται στο Σχήμα 6.3.

Παράδειγμα 6.3. Έστω το σήμα

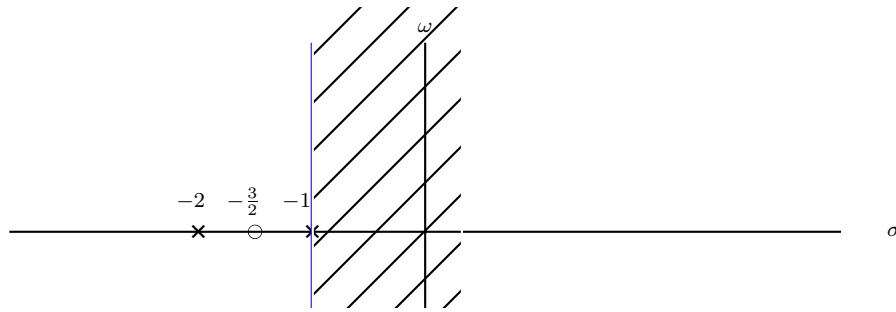
$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t). \quad (6.17)$$

Τότε:

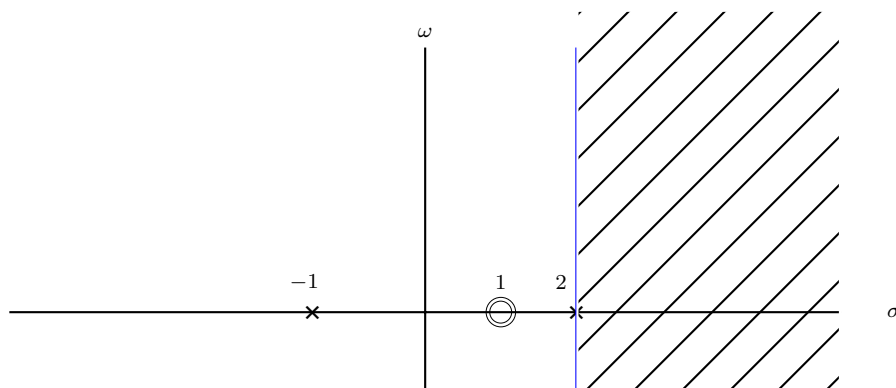
$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (6.18)$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \text{Re}\{s\} > 2. \quad (6.19)$$

Λέμε ότι ο $X(s)$ που δίνεται από την (6.19) έχει διπλό μηδενικό για $s = 1$ και απλούς πόλους για $s = -1$ και $s = 2$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών σχεδιάζεται στο Σχήμα 6.4.



Σχήμα 6.3: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού Laplace του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$.



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού Laplace του σήματος $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$.

6.2 Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

Η ολοκληρωμένη θεώρηση του μετασχηματισμού Laplace δεν απαιτεί μόνο τον προσδιορισμό της αλγεβρικής παράστασης $X(s)$, αλλά και την εύρεση της σχετιζόμενης περιοχής σύγκλισης.

- **Ιδιότητα 1:** Η περιοχή σύγκλισης αποτελείται από λωρίδες του s -επιπέδου που είναι παράλληλες προς τον $j\omega$ άξονα. Δηλαδή, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace του $x(t)$ αποτελείται από εκείνες τις τιμές του s για τις οποίες το $x(t)e^{-\sigma t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty. \quad (6.20)$$

- **Ιδιότητα 2:** Για ρητούς μετασχηματισμούς Laplace η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.

- **Ιδιότητα 3:** Αν το σήμα $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και απολύτως ολοκληρώσιμο, τότε η περιοχή σύγκλισης εκτείνεται σ' ολόκληρο το s -επίπεδο.

Από την στιγμή που το χρονικό διάστημα στο οποίο το $x(t)$ δεν μηδενίζεται είναι πεπερασμένο, αν το πολλαπλασιάσουμε μ' ένα εκθετικό όρο $e^{-\sigma t}$, η συνάρτηση που προκύπτει παραμένει ολοκληρώσιμη στην ίδια περιοχή με το $x(t)$. Αν λοιπόν

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty \quad (6.21)$$

τότε, για να είναι το $s = \sigma + j\omega$ μέσα στην περιοχή σύγκλισης απαιτούμε ότι το $x(t)e^{-\sigma t}$ να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, δηλαδή

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty. \quad (6.22)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

– Αν $\sigma = \text{Re}\{s\} = 0$, το ολοκλήρωμα (6.22) είναι φραγμένο λόγω της (6.21).

– Αν $\sigma > 0$, επειδή

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \quad (6.23)$$

συνάγουμε ότι το δεξί μέρος της (6.23) είναι φραγμένο, άρα και το αριστερό θα είναι φραγμένο, οπότε η περιοχή σύγκλισης είναι $\text{Re}\{s\} > 0$.

– Αν $\sigma < 0$, επειδή

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \quad (6.24)$$

συνάγουμε ότι το δεξί μέρος της (6.24) είναι φραγμένο, άρα και το αριστερό θα είναι φραγμένο, οπότε η περιοχή σύγκλισης είναι $\text{Re}\{s\} < 0$.

Συνεπώς η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο.

Παράδειγμα 6.4. Έστω

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{αν } 0 < t < T \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (6.25)$$

Τότε

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]. \quad (6.26)$$

Σύμφωνα με την Ιδιότητα 3, η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το s -επίπεδο. Επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος μηδενίζονται για $s = -a$, το $-a$ δεν είναι πόλος της $X(s)$. Αυτό μπορεί να δειχθεί εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s + a)} \right]. \quad (6.27)$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πόλος για $s = -a$, επειδή το όριο είναι

$$X(-a) = T. \quad (6.28)$$

- **Ιδιότητα 4:** Αν το σήμα $x(t)$ είναι δεξιάς πλευράς, δηλαδή $x(t) = 0$ για $t < T_1$, και αν η ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ κείται στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, τότε όλες οι τιμές του s για τις οποίες $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

Αν σ_0 ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty. \quad (6.29)$$

Επειδή το σήμα $x(t)$ είναι δεξιάς πλευράς, ισχύει

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty. \quad (6.30)$$

Αν $\sigma_1 > \sigma_0$, τότε

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} e^{-\sigma_0 t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (6.31)$$

οπότε $\sigma_1 \in \text{ROC}$. Λέμε ότι η περιοχή σύγκλισης είναι ένα **δεξί ημιεπίπεδο**. Άμεσο επακόλουθο της ιδιότητας αυτής είναι ότι η περιοχή σύγκλισης ενός μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι δεξί ημιεπίπεδο.

- **Ιδιότητα 5:** Αν το σήμα $x(t)$ είναι αριστερής πλευράς, δηλαδή $x(t) = 0$ για $t > T_2$, και η ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ κείται στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, τότε όλες οι τιμές του s που είναι τέτοιες ώστε $\text{Re}\{s\} < \sigma_0$ ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης. Για τα σήματα αριστερής πλευράς, η περιοχή σύγκλισης είναι **αριστερό ημιεπίπεδο**.
- **Ιδιότητα 6:** Αν το σήμα $x(t)$ είναι **αμφίπλευρο**, δηλαδή υφίσταται για $\forall t$, και η ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ κείται στην περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, τότε η περιοχή σύγκλισης συγκροτείται από μια **λωρίδα στο s -επίπεδο** που περιλαμβάνει την ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$.

- **Ιδιότητα 7:** Αν ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ του σήματος $x(t)$ είναι ρητή συνάρτηση, τότε η περιοχή σύγκλισης φράσσεται από τους πόλους ή εκτείνεται στο άπειρο. Επιπλέον η περιοχή σύγκλισης **δεν** περιέχει κανένα πόλο του $X(s)$.
- **Ιδιότητα 8:** Αν ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ του σήματος $x(t)$ είναι ρητή συνάρτηση, όταν το σήμα $x(t)$ είναι δεξιάς πλευράς, τότε η περιοχή σύγκλισης εκτείνεται δεξιότερα του πιο δεξιού πόλου· ενώ όταν το $x(t)$ είναι αριστερής πλευράς, τότε η περιοχή σύγκλισης εκτείνεται αριστερότερα του πιο αριστερού πόλου.

6.3 Υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace

Όπως είπαμε το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace στην (6.5) πρέπει να υπολογιστεί πάνω σε μια τροχιά μέσα στην περιοχή σύγκλισης. Αν το ολοκλήρωμα υπολογιστεί πάνω σε μια τροχιά οπουδήποτε εκτός της περιοχής σύγκλισης η μοναδικότητα του ζεύγους $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ θα καταστραφεί. Ακόμη και αν ο $X(s)$ ορίζεται οπουδήποτε στο s -επίπεδο εκτός από έναν αριθμό μεμονωμένων ανώμαλων σημείων, ο $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ μόνο για τις τιμές του s που κείνται μέσα στην περιοχή σύγκλισης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τα **αιτιατά** σήματα, οι σχέσεις που ορίζουν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Laplace είναι μοναδικές συν ή πλην μια **μηδενική** (null) συνάρτηση $\nu(t)$, δηλαδή

$$X(s) \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) \pm \nu(t) \quad (6.32)$$

όπου

$$\int_0^t \nu(\xi) d\xi = 0, \quad \forall t. \quad (6.33)$$

Ως μηδενική συνάρτηση ορίζουμε κάθε συνάρτηση που είναι παντού μηδέν εκτός από ένα α-ριθμησιμο σύνολο σημείων, όπου έχει πεπερασμένες τιμές. Συμπεραίνουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος, γιατί τα σήματα στο πεδίο του χρόνου μπορούν να διαφέρουν κατά μια μηδενική συνάρτηση. Για παράδειγμα, δύο τέτοια

σήματα είναι τα

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } t > 0 \\ 0.5 & \text{αν } t = 0 \\ 0 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } t > 0 \\ 1 & \text{αν } t = 0 \\ 0 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

που έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace $X(s) = \frac{1}{s}$. Προφανώς η διαφορά μεταξύ των $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι τετριμμένη. Οι μηδενικές συναρτήσεις είναι ασήμαντες στην εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace. Αν ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου, τότε υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία.

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace δεν θα ακολουθήσουμε την εξίσωση ορισμού. Για μετασχηματισμούς Laplace που είναι ρητές συναρτήσεις του s , ο υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού μπορεί να γίνει με χρήση της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα, δηλαδή της επέκτασης μιας ρητής αλγεβρικής έκφρασης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων (όρων μικρότερης τάξης), που προτάθηκε από τον Heaviside. Έστω

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6.35)$$

όπου το πολυώνυμο του παρονομαστή παραγοντοποιείται ως εξής

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - \alpha_i). \quad (6.36)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Μη επαναλαμβανόμενοι γραμμικοί όροι (διακεκριμένοι πραγματικοί πόλοι)

Έστω ένας γραμμικός όρος $s - \alpha_1$ τότε

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - \alpha_1)D_1(s)} = \frac{A}{s - \alpha_1} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad (6.37)$$

όπου

$$A = \frac{(s - \alpha_1)N(s)}{D(s)} \Big|_{s=\alpha_1} = \frac{N(\alpha_1)}{D_1(\alpha_1)}. \quad (6.38)$$

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για όλους τους γραμμικούς όρους παίρνουμε

$$A_i = \frac{(s - \alpha_i)N(s)}{D(s)} \Big|_{s=\alpha_i}. \quad (6.39)$$

2. Επαναλαμβανόμενοι γραμμικοί όροι $(s - \alpha_i)^k$ για $k \geq 2$ (πολλαπλοί πραγματικοί πόλοι)

Έστω ένας πόλος στο α_1 με πολλαπλότητα k , $(s - \alpha_1)^k$. Κάνουμε την επέκταση

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - \alpha_1)^k} = \frac{A_{11}}{s - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k}}{(s - \alpha_1)^k}. \quad (6.40)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αμφότερα τα μέλη της (6.40) με $(s - \alpha_1)^k$ παίρνουμε

$$(s - \alpha_1)^k \frac{N(s)}{D(s)} = A_{11}(s - \alpha_1)^{k-1} + A_{12}(s - \alpha_1)^{k-2} + \dots + A_{1k}. \quad (6.41)$$

Υπολογίζοντας την τιμή της ταυτότητας (6.41) για $s = \alpha_1$ προκύπτει

$$A_{1k} = (s - \alpha_1)^k \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=\alpha_1} \quad (6.42)$$

ενώ αν διαφορίσουμε την (6.41) και υπολογίσουμε την τιμή της παραγώγου για $s = \alpha_1$ θα προκύψει

$$A_{1k-1} = \frac{d}{ds} \left[(s - \alpha_1)^k \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=\alpha_1} \quad (6.43)$$

και γενικεύοντας μετά από $k - l$ διαφορίσεις θα έχουμε

$$A_{1l} = \frac{1}{(k - l)!} \left[\frac{d^{k-l}}{ds^{k-l}} \left[(s - \alpha_1)^k \frac{N(s)}{D(s)} \right] \right] \Big|_{s=\alpha_1} \quad l = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (6.44)$$

Η (6.44) γενικεύεται για κάθε επαναλαμβανόμενο γραμμικό όρο.

3. Μιγαδικοί πόλοι

Οι μιγαδικοί πόλοι εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη, οπότε αν συγχωνεύσουμε τα αντίστοιχα μονώνυμα, προκύπτει

$$(s + \alpha + j\omega_0)(s + \alpha - j\omega_0) = (s + \alpha)^2 + \omega_0^2 \quad (6.45)$$

οπότε στην ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα θα εμφανιστεί όρος της μορφής

$$\frac{A_1 s + A_2}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (6.46)$$

και για την αντιστροφή του όρου αυτού χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t u(t) \quad (6.47)$$

$$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t u(t). \quad (6.48)$$

4. Πολλαπλοί τετραγωνικοί παράγοντες

Στην περίπτωση αυτή κάνουμε την επέκταση

$$\frac{A}{(s^2 + \alpha)^k} \equiv \frac{A_1 s + B_1}{s^2 + \alpha} + \frac{A_2 s + B_2}{(s^2 + \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k s + B_k}{(s^2 + \alpha)^k} \quad (6.49)$$

και από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του s .

Έστω $X(s)$ δεν έχει πολλαπλούς πόλους και η τάξη του αριθμητή $N(s)$ είναι **μικρότερη** από αυτή του παρονομαστή $D(s)$, τότε

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + \alpha_i}. \quad (6.50)$$

Η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$ μπορεί να εξαχθεί από τις περιοχές σύγκλισης των επιμέρους όρων. Υπάρχουν δύο δυνατότητες για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

- ROC δεξιά του πόλου $s = -\alpha_i$, οπότε

$$\frac{A_i}{s + \alpha_i} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A_i e^{-\alpha_i t} u(t) \quad (6.51)$$

- ROC αριστερά του πόλου $s = -\alpha_i$, οπότε

$$\frac{A_i}{s + \alpha_i} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -A_i e^{-\alpha_i t} u(-t). \quad (6.52)$$

Παράδειγμα 6.5. Ας μελετήσουμε την αντιστροφή διάφορων μετασχηματισμών Laplace.

(α)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1. \quad (6.53)$$

Αναλύοντας σε άθροισμα μερικών κλασμάτων παίρνουμε

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (6.54)$$

όπου

$$A = \left[(s+1)X(s) \right]_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1 \quad (6.55)$$

$$B = \left[(s+2)X(s) \right]_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1. \quad (6.56)$$

Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -1. \quad (6.57)$$

Συνεπώς πρέπει να εκλεγεί ως ROC κάθε όρου η περιοχή $R_1(R_2)$ έτσι ώστε $R_1 \cap R_2$ να ισούται με τη δοσμένη ROC = $\{s : \text{Re}\{s\} > -1\}$. Αρκεί: $R_1 = \{s : \text{Re}\{s\} > -1\}$ και $R_2 = \{s : \text{Re}\{s\} > -2\}$, οπότε

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t). \quad (6.58)$$

(β)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} < -2. \quad (6.59)$$

Αρκεί $R_1 = \{s : \text{Re}\{s\} < -1\}$ και $R_2 = \{s : \text{Re}\{s\} < -2\}$, οπότε

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t). \quad (6.60)$$

(γ)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1. \quad (6.61)$$

Αρκεί $R_1 = \{s : \text{Re}\{s\} < -1\}$ και $R_2 = \{s : \text{Re}\{s\} > -2\}$, οπότε

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t). \quad (6.62)$$

6.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τις ιδιότητες του (δίπλευρου) μετασχηματισμού Laplace. Παράλληλα, όπου υπάρχουν διαφοροποιήσεις, παραθέτουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες για το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace. Σ' όλες τις άλλες περιπτώσεις, οι ιδιότητες του δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace ισχύουν και για το μονόπλευρο. Στο τέλος της ενότητας αυτής παρατίθενται πίνακες με χαρακτηριστικά ζεύγη δίπλευρων μετασχηματισμών Laplace (Πίνακας 6.1), ιδιοτήτων του δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace (Πίνακας 6.2) και ιδιοτήτων του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace (Πίνακας 6.3).

6.4.1 Γραμμική ιδιότητα

Αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R_1 και $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)$ με ROC: R_2 , τότε

$$ax(t) + bg(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aX(s) + bG(s), \quad \text{ROC: περιέχει την } R_1 \cap R_2. \quad (6.63)$$

Η περιοχή σύγκλισης μπορεί να είναι ευρύτερη, όταν λόγω χάρη εξουδετερώνεται ένας πόλος από ένα μηδενικό, όπως στο Παράδειγμα 6.6.

Παράδειγμα 6.6. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ όταν

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad (6.64)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1. \quad (6.65)$$

Εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα προκύπτει

$$\begin{aligned} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) &= X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{(s+2) - 1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned} \quad (6.66)$$

με περιοχή σύγκλισης $\text{Re}\{s\} > -2$.

6.4.2 Μετατόπιση στο χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s), \quad \text{ROC: } R. \quad (6.67)$$

Η περιοχή σύγκλισης παραμένει ίδια.

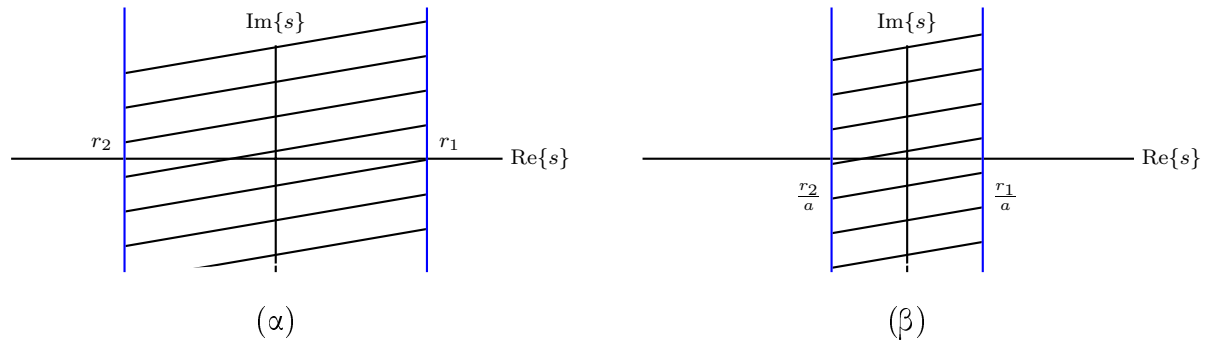
6.4.3 Χρονική κλιμάκωση

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC: } \frac{R}{a}. \quad (6.68)$$

Η περιοχή σύγκλισης στην (6.68) ερμηνεύεται ως εξής: Αν R είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή του Σχήματος 6.5(α), τότε η νέα περιοχή σύγκλισης $\frac{R}{a}$ θα είναι η λωρίδα μεταξύ των $\frac{r_2}{a}$ και $\frac{r_1}{a}$ του Σχήματος 6.5(β), η οποία για $a > 1$ θα είναι στενότερη της αρχικής, ενώ για $0 < a < 1$ θα είναι ευρύτερη. Προφανώς για $a < 0$ θα αναστραφεί η διάταξη των r_2 και r_1 .

Στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace η πραγματική σταθερά κλιμάκωσης a πρέπει να είναι θετική, δηλαδή $a > 0$.



Σχήμα 6.5: (α) Αρχική περιοχή σύγκλισης ROC: R . (β) Περιοχή σύγκλισης μετά τη χρονική κλιμάκωση για $a > 1$, ROC: $\frac{R}{a}$.

6.4.4 Παραγωγή στο χρόνο

Αν $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \pm\infty$ και $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s), \quad \text{ROC: περιέχει την } R. \quad (6.69)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) e^{-st}] - \lim_{t \rightarrow -\infty} [x(t) e^{-st}] + sX(s) = sX(s) \end{aligned} \quad (6.70)$$

επειδή ο πρώτος και δεύτερος όροι στην (6.70) είναι μηδενικοί όταν $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης για $t \rightarrow \pm\infty$.

Παρατηρήστε ότι για $x(t) = u(t)$, ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής συνάρτησης κατ' εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού προκύπτει ως

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0. \quad (6.71)$$

Επειδή $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$, εφαρμόζοντας την (6.69) παίρνουμε

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad \text{ROC: όλο το } s\text{-επίπεδο.} \quad (6.72)$$

Για το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace η (6.69) διαφοροποιείται σε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-), \quad \text{ROC: περιέχει την } R \quad (6.73)$$

όπου $\mathcal{X}(s)$ είναι ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ και $x(0^-)$ είναι η τιμή του $x(t)$ για $t = 0^-$. Πράγματι, ο δεύτερος όρος στην (6.70) τροποποιείται σε

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} [x(t)e^{-st}] = x(0^-). \quad (6.74)$$

Για αιτιατές συναρτήσεις $x(0^-) = 0$.

Η (6.73) γενικεύεται σε

$$\mathcal{UL} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x^{(1)}(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (6.75)$$

όπου $x^{(n)}(0^-)$ είναι οι τιμές της n -στής παραγώγου στο 0^- .

6.4.5 Παραγωγήιση στο s - επίπεδο

Διαφορίζοντας αμφότερα τα μέλη της (6.4) ως προς s

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t) x(t) e^{-st} dt \quad (6.76)$$

οπότε συνάγουμε ότι αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$-t x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{ROC: } R. \quad (6.77)$$

6.4.6 Ολοκλήρωση στον χρόνο

Αν $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] = \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC: περιέχει την } R \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}. \quad (6.78)$$

Στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace υπάρχουν δύο παραλλαγές της ιδιότητας αυτής:

$$\mathcal{UL} \left[\int_{0^-}^t x(\lambda) d\lambda \right] = \frac{1}{s} \mathcal{X}(s), \quad \text{ROC: περιέχει την } R \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\} \quad (6.79)$$

$$\mathcal{UL} \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] = \frac{1}{s} \mathcal{X}(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\lambda) d\lambda, \quad \text{ROC: περιέχει την } R \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}. \quad (6.80)$$

Απόδειξη (6.80):

Έστω $g(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$. Τότε

$$g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} x(\lambda) d\lambda}_{g(0^-)} + \int_{0^-}^t x(\lambda) d\lambda = g(0^-) + \int_{0^-}^t x(\lambda) d\lambda. \quad (6.81)$$

Αλλά $\frac{dg(t)}{dt} = x(t)$, οπότε

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = \mathcal{UL}\{x(t)\} \Leftrightarrow \quad (6.82)$$

$$s\mathcal{G}(s) - g(0^-) = \mathcal{X}(s) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}g(0^-). \quad (6.83)$$

6.4.7 Μετατόπιση στο s -επίπεδο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R , τότε

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0), \quad \text{ROC: } R + \text{Re}\{s_0\} \quad (6.84)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - j\omega_0), \quad \text{ROC: } R. \quad (6.85)$$

6.4.8 Συνέλιξη δύο σημάτων

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ με ROC: R_1 και $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} G(s)$ με ROC: R_2 , τότε

$$(x * g)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)G(s), \quad \text{ROC: περιέχει την } R_1 \cap R_2. \quad (6.86)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(x * g)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)g(t - \lambda)d\lambda \right] e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \lambda)e^{-s(t-\lambda)}d\lambda = \\ &= X(s)G(s). \end{aligned} \quad (6.87)$$

6.4.9 Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής

Υπό τις συνθήκες ότι $x(t) = 0$ για $t < 0$ και $x(t)$ δεν περιέχει κρουστικούς παλμούς ή ανωμαλίες ανώτερης τάξης για $t = 0$, ισχύει το **θεώρημα αρχικής τιμής**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (6.88)$$

και το **θεώρημα τελικής τιμής**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \quad (6.89)$$

Απόδειξη: Επειδή $x(t) = 0$ για $t < 0$, έχουμε $x(t) = x(t)u(t)$. Αν αναπτύξουμε το $x(t)$ κατά Taylor περί το 0^+ παίρνουμε

$$x(t) = \left[x(0^+) + x^{(1)}(0^+)t + \dots + x^{(n)}(0^+) \frac{t^n}{n!} + \dots \right] u(t) \quad (6.90)$$

όπου $x^{(n)}(0^+)$ είναι η τιμή της n -στής παραγώγου για $t = 0^+$. Αλλά από τον Πίνακα 6.1 παίρνουμε

$$x^{(n)}(0^+) \left(\frac{t^n}{n!} \right) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (6.91)$$

Υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Laplace αμφοτέρων των πλευρών της (6.90) προκύπτει

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}} \quad (6.92)$$

οπότε

$$sX(s) = x^{(0)}(0^+) + \frac{x^{(1)}(0^+)}{s} + \dots \quad (6.93)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος της αρχικής τιμής, αν πάρουμε το όριο για $s \rightarrow \infty$.

Επειδή $x(t) = 0$ για $t < 0$ παίρνουμε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace² για να συμπεριλάβουμε και τυχόν μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες, οπότε

$$\mathcal{UL} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX(s) - x(0^-). \quad (6.94)$$

Αν πάρουμε το όριο αμφοτέρων των μερών της (6.94) για $s \rightarrow 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-) \Leftrightarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-) \end{aligned} \quad (6.95)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος της τελικής τιμής.

Το θεώρημα της τελικής τιμής χρησιμοποιείται για την εύρεση της τιμής ενός σήματος στη μόνιμη κατάσταση (ισορροπία). Το θεώρημα της τελικής τιμής **δεν** ισχύει όταν η $sX(s)$ έχει πόλους στο δεξί ημιεπίπεδο ή στον φανταστικό άξονα. Εάν υπάρχουν πόλοι στο δεξί ημιεπίπεδο, αυτοί αντιστοιχούν σε αυξανόμενα εκθετικά σήματα στο πεδίο του χρόνου των οποίων το όριο για $t \rightarrow \infty$ δεν υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχουν πόλοι στον $j\omega$ άξονα, αυτοί αντιστοιχούν σε καθαρα ήμιτονα και τα όρια για $t \rightarrow \infty$ ορίζονται με χρήση της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων.

² $X(s) = \mathcal{X}(s)$.

6.4.10 Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace ημι-περιοδικών συναρτήσεων

Δεν μιλάμε για αυστηρώς περιοδικά σήματα, αλλά για συναρτήσεις που είναι “περιοδικές” για θετικούς χρόνους. Έστω το σήμα της πρώτης περιόδου

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & \text{αν } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.96)$$

τότε ένα ημι-περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί σαν

$$x(t) = x_T(t) + x_T(t - T) + x_T(t - 2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_T(t - kT). \quad (6.97)$$

Αν $x_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{UL}} \mathcal{X}_T(s)$, τότε

$$x_T(t - kT) \xleftrightarrow{\mathcal{UL}} \mathcal{X}_T(s) e^{-kTs}. \quad (6.98)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(s) &= \mathcal{UL} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_T(t - kT) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{UL} \left\{ x_T(t - kT) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_T(s) e^{-kTs} = \mathcal{X}_T(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \mathcal{X}_T(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Επομένως

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{UL}} \mathcal{X}_T(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}. \quad (6.100)$$

Παράδειγμα 6.7. Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace των $u(t)$ και $\cos \omega_0 t u(t)$.

Παρατηρούμε ότι και τα δύο σήματα είναι δεξιάς πλευράς. Επειδή για $t < 0$ μηδενίζονται, ο δίπλευρος και ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace ταυτίζονται. Ο μετασχηματισμός Laplace του $u(t)$ είναι

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0. \quad (6.101)$$

Για το σήμα $\cos \omega_0 t u(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t u(t)\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}\{s\} > 0. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Πίνακας 6.1: Δίπλευροι μετασχηματισμοί Laplace βασικών σημάτων.

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	Περιοχή σύγκλισης
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\delta(t - T)$	e^{-sT}	Όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at} \cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at} \sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

Πίνακας 6.2: Ιδιότητες του δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace.

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	Περιοχή σύγκλισης
	$x(t)$	$X(s)$	R_1
	$g(t)$	$G(s)$	R_2
Γραμμικότητα	$ax(t) + bg(t)$	$aX(s) + bG(s)$	Τουλάχιστο $R_1 \cap R_2$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R_1
Μετατόπιση στο s -επίπεδο	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατοπισμένη R_1 Αν $s \in R_1$ τότε $s - s_0 \in R_1$
Κλιμακώση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Κλιμακωμένη R_1 Αν $s \in R_1$ τότε $\frac{s}{a} \in R_1$
Συζυγία	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_1
Συνέλιξη	$(x * g)(t)$	$X(s) G(s)$	Τουλάχιστο $R_1 \cap R_2$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	Τουλάχιστο R_1
Παραγωγή στο s -επίπεδο	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R_1
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	Τουλάχιστο $R_1 \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}$

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Αν $x(t) = 0$ για $t < 0$ και $x(t)$ δεν περιέχει χρουστικούς παλμούς ή ανωμαλίες ανώτερης τάξης για $t = 0$, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Πίνακας 6.3: Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace.

Ιδιότητα	Σήμα	Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace	Περιοχή σύγκλισης
	$x(t)$	$\mathcal{X}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$
	$g(t)$	$\mathcal{G}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_2$
Γραμμικότητα	$ax(t) + bg(t)$	$a\mathcal{X}(s) + b\mathcal{G}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
Παραγώγιση	$x^{(n)}(t)$	$s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$
Ολοκλήρωση	$\int_{0^-}^t x(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \max(0, \sigma_1)$
Πολλαπλασιασμός επί t	$tx(t)$	$-\frac{d}{ds} \mathcal{X}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$
Διαίρεση δια t	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathcal{X}(\xi) d\xi$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0} \mathcal{X}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$
Μετατόπιση στο s -επίπεδο	$e^{-at} x(t)$	$\mathcal{X}(s + a)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1 + \operatorname{Re}\{a\}$
Κλιμάκωση	$x(at), a \in \mathbb{R}, a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\operatorname{Re}\{s\} > a\sigma_1$
Συνέλιξη στο χρό- νο	$(x * g)(t)$	$\mathcal{X}(s)\mathcal{G}(s)$	$\operatorname{Re}\{s\} > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathcal{X}(z)\mathcal{G}(s-z) dz$	$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1 + \sigma_2$ $\sigma_1 < c < \operatorname{Re}\{s\} - \sigma_2$

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Αν $x(t)$ δεν περιέχει κρουστικούς παλμούς ή ή ανωμαλίες ανώτερης τάξης για $t = 0$, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

Παράδειγμα 6.8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (6.103)$$

Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace του ολοκληρώματος παίρνουμε

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} X(s) \quad (6.104)$$

όπου

$$X(s) = \frac{1}{s} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) \quad (6.105)$$

άρα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \int_0^t d\lambda = t u(t). \quad (6.106)$$

Συνεπώς

$$t u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (6.107)$$

Παράδειγμα 6.9. Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου του σήματος $\cos \omega_0 t u(t)$.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαφορίσης

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{d}{dt} \cos \omega_0 t u(t)\right\} = s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \quad (6.108)$$

Αλλά για $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$ ο μονόπλευρος και δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace ταυτίζονται, οπότε από τον Πίνακα 6.1 προκύπτει

$$\mathcal{X}(s) = X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (6.109)$$

Επειδή $x(0^-) = u(0^-) = 0$, τελικώς παίρνουμε

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{d}{dt} \cos \omega_0 t u(t)\right\} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0. \quad (6.110)$$

Παρατηρούμε ότι και ο δίπλευρος μετασχηματισμός Laplace θα κατέληγε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 6.10. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $e^{-t} u(t) * e^{-t} u(t)$.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t} u(t) * e^{-t} u(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t} u(t)\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{e^{-t} u(t)\right\} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1. \quad (6.111)$$

6.4.11 Σχέση μετασχηματισμών Laplace και Fourier

Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier, αρκεί ο $j\omega$ άξονας (δηλαδή, η ευθεία $\text{Re}\{s\} = 0$) να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace. Τούτο ισοδυναμεί με την απαίτηση όλοι οι πόλοι είναι στο αριστερό s -ημιεπίπεδο ή πάνω στον $j\omega$ άξονα.

- Αν οι πόλοι κείτονται στο αριστερό s -ημιεπίπεδο, ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει κάνοντας την αντικατάσταση:

$$X(\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (6.112)$$

- Αν υπάρχουν πόλοι πάνω στον $j\omega$ άξονα, τότε το σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου περιέχει συνημιτονοειδείς όρους, οπότε:
 - Προσδιορίζουμε το $x(t)$ με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace.
 - Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier που αντιστοιχεί στο $x(t)$ που βρέθηκε προηγουμένως.

6.5 Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace

Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι η απόκριση ενός γραμμικού χρονοαμετάβλητου συστήματος (Γ.Χ.Α.) με κρουστική απόκριση $h(t)$ σ' ένα μιγαδικό εκθετικό της μορφής e^{st} είναι

$$y(t) = H(s) e^{st} \quad (6.113)$$

όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (6.114)$$

Παρατηρούμε ότι για $s = j\omega$ η (6.114) αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Fourier της $h(t)$, εφόσον υπάρχει, δηλαδή στην απόκριση συχνότητας του συστήματος, ενώ για $s \in \mathbb{C}$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace της $h(t)$, που αναφέρεται ως **συνάρτηση συστήματος** (system function) ή **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function).

Ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να αξιοποιηθεί στην ανάλυση και το χαρακτηρισμό των Γ.Χ.Α. συστημάτων. Πράγματι, από την ιδιότητα της συνέλιξης προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης ενός Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$Y(s) = H(s) X(s) \quad (6.115)$$

όπου $X(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της διέγερσης. Αντίστοιχη έκφραση είδαμε και στο πλαίσιο του μετασχηματισμού Fourier, αν αντικαταστήσουμε όπου s το $j\omega$. Πολλές ιδιότητες του Γ.Χ.Α. συστήματος μπορούν να συσχετιστούν με ιδιότητες της συνάρτησης συστήματος στο s -επίπεδο. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τις ιδιότητες αυτές.

6.5.1 Αιτιατότητα

Η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού Γ.Χ.Α. συστήματος είναι μηδέν για $t < 0$. Κατά συνέπεια η κρουστική απόκριση είναι σήμα δεξιάς πλευράς, οπότε ισχύει η

- **Ιδιότητα 1:** Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος $H(s)$ ενός αιτιατού Γ.Χ.Α. συστήματος είναι ένα δεξί ημιεπίπεδο.

Εάν η συνάρτηση συστήματος είναι ρητή, η προηγούμενη ιδιότητα εξειδικεύεται ως εξής:

- **Ιδιότητα 2:** Για συστήματα με ρητή συνάρτηση συστήματος $H(s)$, η αιτιατότητα ισοδυναμεί με περιοχή σύγκλισης που είναι δεξί ημιεπίπεδο δεξιότερα από τον πιό δεξιό πόλο.

Παράδειγμα 6.11. Θεωρήστε το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-2t}u(t). \quad (6.116)$$

Επειδή $h(t) = 0$ για $t < 0$ συνάγουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό. Η συνάρτηση συστήματος υπολογίζεται αντικαθιστώντας στο μετασχηματισμό Laplace, που εξήχθη στο Παράδειγμα 6.1, $a = 2$:

$$H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2. \quad (6.117)$$

Στην περίπτωση αυτή η $H(s)$ είναι ρητή και επαληθεύεται η ορθότητα της Ιδιότητας 2.

Παράδειγμα 6.12. Θεωρήστε το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-2|t|}. \quad (6.118)$$

Παρατηρούμε ότι $h(t) \neq 0$ για $t < 0$. Άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό. Επειδή η $h(t)$ μπορεί να αναλυθεί ως

$$h(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) \quad (6.119)$$

αν αξιοποιήσουμε τα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace του Πίνακα 6.1 παίρνουμε

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2 \quad (6.120)$$

$$e^{2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s-2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < 2 \quad (6.121)$$

και προκύπτει η συνάρτηση συστήματος

$$H(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{-4}{s^2-4}, \quad -2 < \operatorname{Re}\{s\} < 2. \quad (6.122)$$

Επομένως, η $H(s)$ είναι ρητή και έχει περιοχή σύγκλισης που δεν είναι δεξιότερα του πύο δεξιού πόλου. Το αποτέλεσμα είναι συνεπές με το γεγονός ότι το σύστημα **δεν** είναι αιτιατό.

Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος $H(s)$ ενός αιτιατού Γ.Χ.Α. συστήματος είναι ένα δεξί ημιεπίπεδο. Το αντίστροφο **δεν** είναι κατ' ανάγκη αληθές. Μια περιοχή σύγκλισης συνάρτησης συστήματος στα δεξιά του πύο δεξιού πόλου δεν εγγυάται ότι το σύστημα είναι αιτιατό, αλλά μόνο ότι είναι δεξιάς πλευράς.

Παράδειγμα 6.13. Έστω η συνάρτηση συστήματος

$$H(s) = \frac{e^s}{s+2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2. \quad (6.123)$$

Η (6.123) προδικάζει ότι η χροστική απόκριση $h(t)$ είναι δεξιάς πλευράς. Πράγματι από την

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2 \quad (6.124)$$

ως συνέπεια της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει η $H(s)$

$$e^{-2(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^s}{s+2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2 \quad (6.125)$$

οπότε η χροστική απόκριση είναι $h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$ που είναι μεν δεξιάς πλευράς, αλλά μη-αιτιατή.

Ένα σύστημα λέγεται **ανταιτιατό** (anti-causal), εάν $h(t) = 0$ για $t > 0$. Η περιοχή σύγκλισης ενός ανταιτιατού συστήματος είναι ένα αριστερό ημιεπίπεδο. Αν η συνάρτηση συστήματος είναι ρητή, τότε η περιοχή σύγκλισης θα κείται αριστερότερα του πύο αριστερού πόλου.

6.5.2 Ευστάθεια

Ένα Γ.Χ.Α. είναι ευσταθές όταν η χροστική του απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Επομένως, όταν ο μετασχηματισμός Fourier της χροστικής απόκρισης είναι καλώς ορισμένος. Οπότε ισχύει η

- **Ιδιότητα 3:** Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι ευσταθές, όταν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος $H(s)$ περιλαμβάνει τον $j\omega$ άξονα.

Για την τάξη των αιτιατών Γ.Χ.Α. συστημάτων που έχουν ρητή συνάρτηση συστήματος, η ευστάθεια του συστήματος ελέγχεται εύκολα εξετάζοντας τους πόλους του συστήματος. Τότε η Ιδιότητα 3 εξειδικεύεται στην

- **Ιδιότητα 4:** Ένα αιτιατό σύστημα με ρητή συνάρτηση συστήματος $H(s)$ είναι ευσταθές, τότε και μόνο τότε αν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ κείνται στο αριστερό s -ημιεπίπεδο, δηλαδή όταν όλοι οι πόλοι έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Παράδειγμα 6.14. Έστω Γ.Χ.Α. σύστημα με χροστική απόκριση $h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$. Αν ανατρέξουμε στο Παράδειγμα 6.5 τότε η συνάρτηση συστήματος προκύπτει

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1. \quad (6.126)$$

Το σύστημα είναι

- **αιτιατό**, επειδή η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος είναι δεξιότερα του πιο δεξιού πόλου και
- **ευσταθές**, επειδή η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος περιλαμβάνει τον $j\omega$ άξονα.

Αν η συνάρτηση συστήματος ήταν

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1 \quad \text{ή} \quad (6.127)$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} < -2 \quad (6.128)$$

τότε σε αμφότερες τις περιπτώσεις, επειδή η περιοχή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τον $j\omega$ άξονα, αποφαινόμεσθε ότι τα συστήματα αυτά είναι **ασταθή**. Στην (6.128) το σύστημα είναι ανταιτιατό.

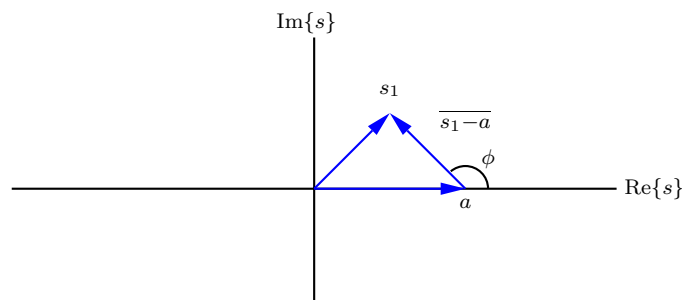
6.6 Γεωμετρικός υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι ο μετασχηματισμός Laplace υπολογισμένος πάνω στον $j\omega$ άξονα. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μια διαδικασία για το γεωμετρικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier και γενικότερα του μετασχηματισμού Laplace σε οποιοδήποτε σημείο του μιγαδικού επιπέδου από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που συνδέεται με ένα ρητό μετασχηματισμό Laplace. Θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace με ένα απλό μηδενικό, $X(s) = s - a$, για $s = s_1$, όπου s_1 ένας συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός. Η τιμή του μετασχηματισμού Laplace στο s_1 , $X(s_1) = s_1 - a$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός που προκύπτει ως άθροισμα των μιγαδικών αριθμών s_1 και $-a$. Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα, το $\overline{s_1 - a}$, προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα των $\overline{s_1}$ και $-\overline{a}$, οπότε είναι ένα διάνυσμα που άγεται από το μηδενικό (δηλαδή, το a) και δείχνει στο σημείο s_1 . Τότε σύμφωνα με το Σχήμα 6.6 έχουμε

$$\text{μήκος του διανύσματος } \overline{X(s_1)} = |X(s_1)| = \text{μήκος } \overline{s_1 - a} = |\overline{s_1 - a}| \quad (6.129)$$

$$\begin{aligned} \text{φάση του διανύσματος } \overline{X(s_1)} &= \angle X(s_1) = \text{γωνία μεταξύ του διανύσματος } \overline{s_1 - a} \text{ και} \\ \text{του πραγματικού άξονα} &= \phi. \end{aligned} \quad (6.130)$$



Σχήμα 6.6: Γεωμετρική ερμηνεία $X(s_1) = s_1 - a$.

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace με έναν απλό πόλο, $X(s) = \frac{1}{s - a}$, για $s = s_1$. Κατ' αναλογία η τιμή του $X(s_1)$ θα έχει μέτρο

$$|X(s_1)| = \frac{1}{|s_1 - a|} \quad (6.131)$$

και φάση

$$\angle X(s_1) = -\phi. \quad (6.132)$$

- Ένας ρητός μετασχηματισμός Laplace μπορεί να εκφραστεί ως

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)} \quad (6.133)$$

οπότε η τιμή του μετασχηματισμού για $s = s_1$ σε παράσταση μέτρου-φάσης είναι

$$X(s_1) = |X(s_1)| \angle X(s_1) \quad (6.134)$$

όπου

$$|X(s_1)| = |M| \frac{\prod_{i=1}^R |s_1 - \beta_i|}{\prod_{j=1}^P |s_1 - \alpha_j|} \quad (6.135)$$

$$\angle X(s_1) = \begin{cases} \sum_{i=1}^R \angle(s_1 - \beta_i) - \sum_{j=1}^P \angle(s_1 - \alpha_j), & \text{αν } M > 0 \\ \pi + \sum_{i=1}^R \angle(s_1 - \beta_i) - \sum_{j=1}^P \angle(s_1 - \alpha_j), & \text{αν } M < 0. \end{cases} \quad (6.136)$$

Επομένως το μέτρο του $X(s_1)$ είναι το μέτρο του παράγοντα κλίμακας M επί το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων που άγονται από τα μηδενικά και καταλήγουν στο s_1 διά το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων που άγονται από τους πόλους και καταλήγουν στο s_1 . Ομοίως η φάση του $X(s_1)$ είναι το άθροισμα των γωνιών των διανυσμάτων που άγονται από τα μηδενικά και καταλήγουν στο s_1 μείον το άθροισμα των γωνιών των διανυσμάτων που άγονται από τους πόλους και καταλήγουν στο s_1 συν ενδεχομένως π ακτίνα, όταν $M < 0$.

Παράδειγμα 6.15. Έστω

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{3}}, \quad \text{Re}\{s\} > -\frac{1}{3}. \quad (6.137)$$

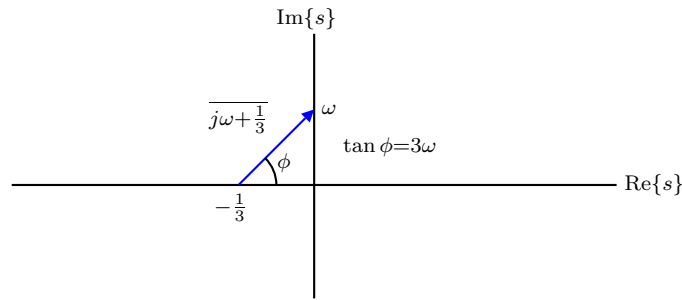
Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται, διότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον $j\omega$ άξονα. Θέτοντας $s = j\omega$ μπορούμε να υπολογίσουμε γεωμετρικώς το μετασχηματισμό Fourier, όπως στο Σχήμα 6.7.

Έχουμε

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{3}} \quad (6.138)$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \omega^2}} \quad (6.139)$$

$$\angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\frac{1}{3}}\right) = -\arctan(3\omega) \quad (6.140)$$



Σχήμα 6.7: Γεωμετρική ερμηνεία $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{3}}$.

όπου το μέτρο και η φάση μπορούν να υπολογιστούν με απλές τριγωνομετρικές γνώσεις. Παρατηρούμε ότι το μήκος του διανύσματος του πόλου αυξάνει μονότονα καθώς αυξάνει το ω , άρα $|X(j\omega)|$ ελαττώνεται μονότονα με την αύξηση του ω .

Ο γεωμετρικός υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier χρησιμεύει στην προσεγγιστική εξαγωγή των χονδρικών χαρακτηριστικών του, αξιοποιώντας τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του μήκους και της γωνίας των διανυσμάτων που άγονται από τους πόλους και τα μηδενικά.

6.6.1 Πρωτοβάθμια συστήματα

Η χρονική απόκριση ενός πρωτοβάθμιου συστήματος και η αντίστοιχη συνάρτηση συστήματος είναι

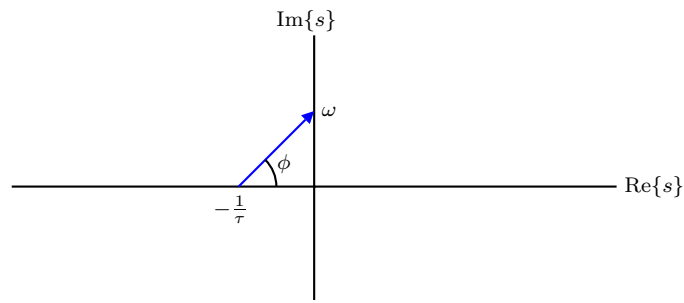
$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{s\tau + 1}, \quad \text{Re}\{s\} > -\frac{1}{\tau}. \quad (6.141)$$

Ένα τέτοιο Γ.Χ.Α. σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad y(0) = 0 \quad (6.142)$$

για την οποία ισχύει η συνθήκη αρχικής ηρεμίας $x(t) = 0$, όταν $t < 0$. Η θετική πραγματική σταθερά τ είναι γνωστή ως **σταθερά χρόνου**. Για την τιμή $t = \tau$ παρατηρούμε ότι $h(\tau) = \frac{1}{e} h(0)$. Το Σχήμα 6.8 δείχνει το γεωμετρικό υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας ενός πρωτοβάθμιου συστήματος. Από το Σχήμα 6.8 συνάγουμε τα ακόλουθα χονδρικά χαρακτηριστικά για τη μεταβολή της $H(j\omega)$ ως προς ω :

- Το μέτρο $|H(j\omega)|$ της απόκρισης συχνότητας, $H(j\omega)$, παρουσιάζει μέγιστο όταν $\omega = 0$.
- Το μέτρο $|H(j\omega)|$ της απόκρισης συχνότητας, $H(j\omega)$ παρουσιάζει βαθμιαία μείωση καθώς το ω αυξάνεται.



Σχήμα 6.8: Γεωμετρικός υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας πρωτοβάθμιου συστήματος.

- Η φάση $\angle H(j\omega)$ της απόκρισης συχνότητας, $H(j\omega)$, μειώνεται από το 0 στο $-\frac{\pi}{2}$ καθώς το ω αυξάνεται.

Πράγματι

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}. \quad (6.143)$$

Αν υπολογίσουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= -10 \log_{10}(\omega^2\tau^2 + 1) \\ &\approx -20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \tau, \quad \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (6.144)$$

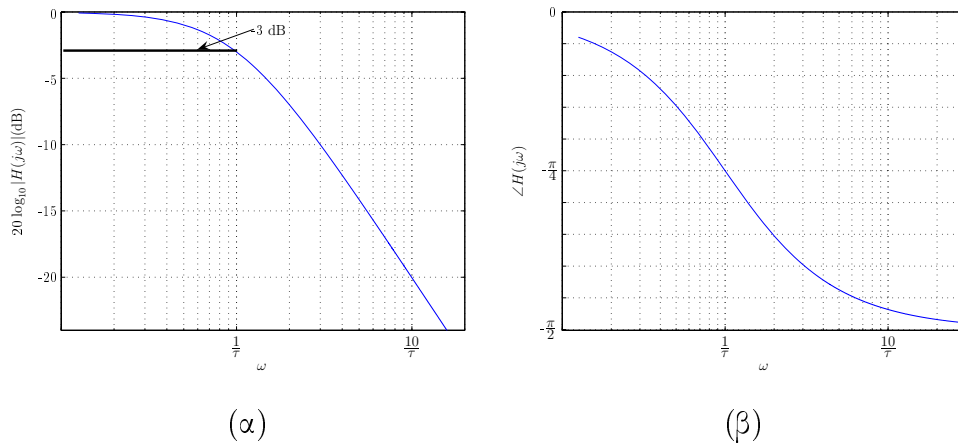
τότε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας μετριέται σε dB. Παρατηρούμε ότι στη συχνότητα $\omega = \frac{1}{\tau}$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι 3 dB κάτω από τη μέγιστη τιμή του για $\omega = 0$. Η συχνότητα $\omega = \frac{1}{\tau}$ ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής**. Για συχνότητα δεκαπλάσια της συχνότητας αποκοπής το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \Big|_{\omega=\frac{10}{\tau}} \cong -10 \log_{10} 101 = -20 \text{ dB}. \quad (6.145)$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= -\arctan(\omega\tau) \\ &\approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \frac{0.1}{\tau} \\ -\frac{\pi}{4} [\log_{10}(\omega\tau) + 1] & \frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega \geq \frac{10}{\tau}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.146)$$

Οι γραφικές παραστάσεις του $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ και της $\angle H(j\omega)$ ως προς ω καλούνται **διαγράμματα Bode** (Bode plots). Τα διαγράμματα Bode του πρωτοβάθμιου συστήματος που



Σχήμα 6.9: Διαγράμματα Bode πρωτοβάθμιου συστήματος. (α) Μέτρο και (β) Φάση της απόκρισης συχνότητας.

μελετούμε σχεδιάζονται στο Σχήμα 6.9, όπου η συχνότητα ω μετριέται σε λογαριθμική κλίμακα. Ελάττωση της σταθεράς χρόνου συνεπάγεται αύξηση της συχνότητας αποκοπής, διεύρυνση του εύρους ζώνης και γρηγορότερο ρυθμό πτώσης της $h(t)$.

6.6.2 Δευτεροβάθμια συστήματα

Η κρουστική απόκριση ενός δευτεροβάθμιου συστήματος είναι

$$h(t) = M \left[e^{c_1 t} - e^{c_2 t} \right] u(t) \quad (6.147)$$

όπου

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.148)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.149)$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad \omega_n > 0. \quad (6.150)$$

Η παράμετρος ζ καλείται **λόγος απόσβεσης** (damping ratio) και η συχνότητα ω_n καλείται **μη-αποσβενύμενη φυσική συχνότητα** (undamped natural frequency). Ένα τέτοιο Γ.Χ.Α. σύστημα περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

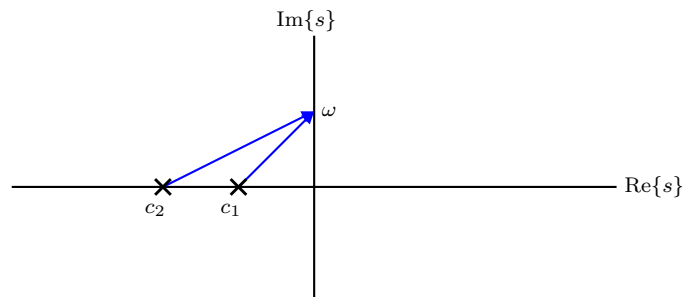
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t), \quad y(0) = 0 \quad (6.151)$$

για την οποία ισχύει η συνθήκη αρχικής ηρεμίας, $x(t) = 0$ όταν $t < 0$. Η συνάρτηση συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)}. \quad (6.152)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- A) $\zeta > 1$: Τότε c_1, c_2 είναι πραγματικοί πόλοι, οπότε το δευτεροβάθμιο σύστημα είναι γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων συστημάτων. Στο πεδίο του χρόνου η αντίστοιχη κρουστική απόκριση είναι διαφορά δύο αποσβενύμενων εκθετικών. Λέμε ότι το σύστημα είναι **υπεραποσβενύμενο** (overdamped). Το Σχήμα 6.10 δείχνει το γεωμετρικό υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.



Σχήμα 6.10: Γεωμετρικός υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας δευτεροβάθμιου συστήματος με πραγματικούς πόλους.

Παρατηρούμε ότι:

- A.1) Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, $|H(j\omega)|$, φθίνει μονότονα καθώς το $|\omega|$ αυξάνεται. Επομένως το σύστημα έχει **κατωδιαβατή** συχνωτική συμπεριφορά.
- A.2) Η φάση της απόκρισης συχνότητας, $\angle H(j\omega)$, κυμαίνεται μεταξύ 0 (για $\omega \rightarrow 0$) και $-\pi$ (καθώς το $\omega \rightarrow \infty$).
- A.3) Καθώς το ζ αυξάνεται ο ένας πόλος πλησιάζει τον $j\omega$ άξονα και ο άλλος πόλος απομακρύνεται στον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών. Ο πόλος που είναι κοντά στον $j\omega$ άξονα αντιστοιχεί σ' ένα κατωδιαβατό πρωτοβάθμιο σύστημα με χαμηλή συχνότητα αποκοπής και αργή απόσβεση στο πεδίο του χρόνου (μεγάλη σταθερά χρόνου). Ο πόλος που είναι μακριά από τον $j\omega$ άξονα αντιστοιχεί σ' ένα

κατωδιαβατό πρωτοβάθμιο σύστημα με υψηλή συχνότητα αποκοπής και γρήγορη απόσβεση στο πεδίο του χρόνου (μικρή σταθερά χρόνου).

- A.4) Για $\zeta \gg 1$, ο κοντινός στο $j\omega$ άξονα πόλος παίζει τον πρωταγωνιστικό ρόλο στην κατωδιαβατή συχνοτική συμπεριφορά του συστήματος, επειδή το μήκος και η γωνία του διανύσματος που άγεται από αυτόν τον πόλο είναι πίο ευαίσθητα σε μεταβολές του ω απ' ό,τι το μήκος και η γωνία του διανύσματος που άγεται από τον μακρινό πόλο.

Θέτοντας όπου $s = j\omega$ στην (6.152) προκύπτει η απόκριση συχνότητας

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}. \quad (6.153)$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με ω_n^2 παίρνουμε

$$H(j\omega) = \frac{1}{(\frac{j\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{j\omega}{\omega_n}) + 1}. \quad (6.154)$$

Επομένως η απόκριση συχνότητας καθίσταται συνάρτηση του λόγου $\frac{\omega}{\omega_n}$. Μεταβάλλοντας το ω_n ισοδυναμεί με χρονική και συχνοτική κλιμάκωση.

- B) $\zeta = 1$: Τότε το σύστημα έχει ένα διπλό πραγματικό πόλο στο $c_1 = c_2 = -\omega_n$ και η απόκριση συχνότητας εκφυλίζεται σε

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}. \quad (6.155)$$

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα ζευγών μετασχηματισμών Fourier, προκύπτει η κρουστική απόκριση

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t). \quad (6.156)$$

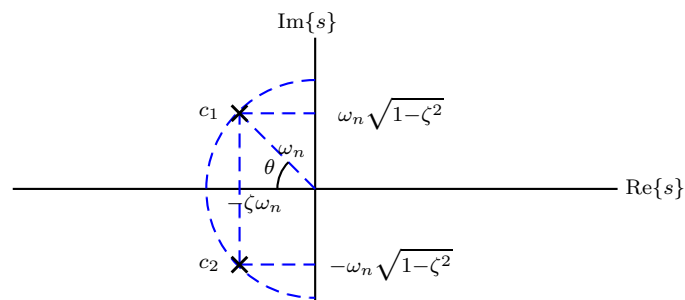
Λέμε ότι το δευτεροβάθμιο σύστημα είναι **κρίσιμα αποσβενύμενο** (critically damped).

- Γ) $0 < \zeta < 1$: Η κρουστική απόκριση στην περίπτωση αυτή παίρνει τη μορφή

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) u(t). \quad (6.157)$$

Λέμε ότι το σύστημα είναι **υποαποσβενύμενο** (underdamped). Η κρουστική απόκριση παρουσιάζει αποσβενύμενες ταλαντώσεις. Η συχνότητα των ταλαντώσεων είναι $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ και είναι μικρότερη της ω_n . Ο ρυθμός απόσβεσης της ημιτονοειδούς ταλάντωσης αυξάνεται καθώς το ζ αυξάνεται. Η βηματική απόκριση παρουσιάζει ταλαντώσεις

(ringing) και υπέρβαση (overshoot), δηλαδή λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από την τελική της τιμή. Στην περίπτωση αυτή έχουμε συζυγείς μιγαδικούς πόλους, επειδή η χροστική απόκριση είναι συνάρτηση πραγματικής τιμής. Το Σχήμα 6.11 δείχνει παραστατικά το διάγραμμα πόλων ενός υποαποσβενύμενου δευτεροβάθμιου συστήματος.



Σχήμα 6.11: Διάγραμμα πόλων δευτεροβάθμιου συστήματος με συζυγείς μιγαδικούς πόλους.

Από το Σχήμα 6.11 παρατηρούμε ότι:

- Γ.1) Για ζ μικρό, οι πόλοι είναι κοντά στον $j\omega$ άξονα.
 Γ.2) Όταν $\omega \rightarrow \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, ο πόλος στο δεύτερο τεταρτημόριο υπερισχύει στη συχνοτική συμπεριφορά του συστήματος. Παρατηρήστε ότι η απόσταση

$$\left[j\omega - (-\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] \quad (6.158)$$

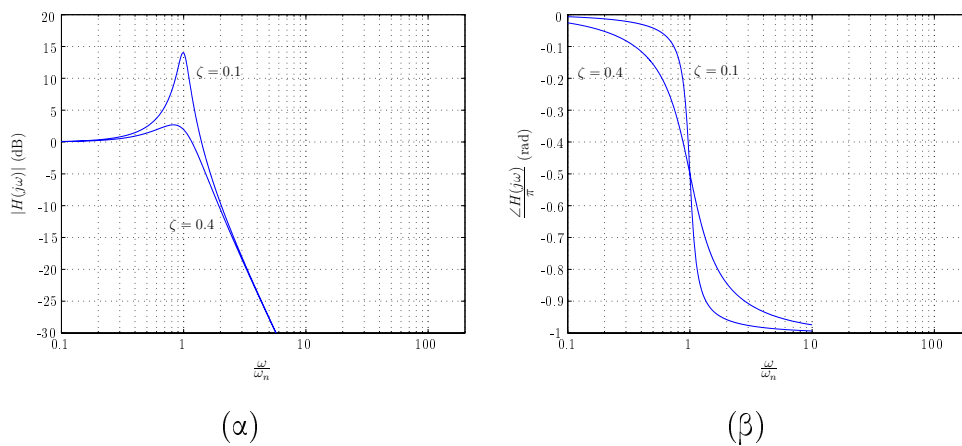
γίνεται ελάχιστη όταν $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Παρατηρούμε τότε **κορύφωση** (peak) στην απόκριση συχνότητας για ω κοντά στην $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Η κορυφή της απόκρισης συχνότητας δεν συμβαίνει όταν $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, αλλά για συχνότητα ω ελαφρώς μικρότερη από την τιμή $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, λόγω της παρουσίας του άλλου πόλου.

- Γ.3) Για $0 < \zeta < 1$, το δευτεροβάθμιο σύστημα είναι ένα **μη-ιδανικό ζωνοδιαβατό φίλτρο** (non-ideal bandpass filter). Η παράμετρος ζ ελέγχει την οξύτητα και το εύρος της κορυφής της απόκρισης συχνότητας. Συχνά χρησιμοποιούμε επίσης την παράμετρο $Q = \frac{1}{2\zeta}$ που ονομάζεται **συντελεστής ποιότητας** (quality measure).
 Γ.4) Το μήκος του διανύσματος που άγεται από τον πόλο στο δεύτερο τεταρτημόριο αυξάνεται κατά παράγοντα $\sqrt{2}$ από τη μικρότερη τιμή που αντιστοιχεί σε $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ όταν το ω αυξάνεται κατά $\zeta\omega_n$. Συνεπώς για μικρά ζ και αγνοώντας την παρουσία

του μακρινού πόλου στο τρίτο τεταρτημόριο, το μέτρο της απόκρισης συχνότητας, $|H(j\omega)|$, είναι εντός ενός παράγοντα $\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής του στην συχνοτική περιοχή

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} - \zeta \omega_n < \omega < \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} + \zeta \omega_n. \quad (6.159)$$

Το εύρος ζώνης του ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι $2\zeta\omega_n$. Συχνά χρησιμοποιούμε το **σχετικό εύρος ζώνης** $B = 2\zeta$ που είναι το εύρος ζώνης δια ω_n . Παρατηρούμε ότι $B = \frac{1}{Q}$. Το εύρος ζώνης αυξάνεται, όταν το ζ αυξάνεται ή ισοδύναμα όταν ο συντελεστής ποιότητας Q μειώνεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.12(α).



Σχήμα 6.12: Διαγράμματα Bode δευτεροβάθμιου συστήματος με ζωνοδιαβατή συμπεριφορά. (α) Μέτρο και (β) Φάση απόκρισης συχνότητας.

- Γ.5) Καθώς μεταβάλλουμε το ζ κρατώντας το ω_n σταθερό, επειδή $\zeta = \cos\theta$, οι πόλοι μετακινούνται πάνω σ' ένα ημικύκλιο ακτίνας ω_n . Καθώς το ζ αυξάνει από το 0 στο 1, οι δύο συζυγείς μιγαδικοί πόλοι κινούνται στο αριστερό s -ημιεπίπεδο πάνω σ' ένα ημικύκλιο ακτίνας ω_n .
- Γ.6) Μεταβάλλοντας το ω_n κρατώντας το ζ σταθερό, τα συμπεράσματα της προηγούμενης συζήτησης παραμένουν εξίσου έγκυρα, επειδή το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας εξαρτώνται από το λόγο $\frac{\omega}{\omega_n}$. Και στην περίπτωση αυτή, η απόκριση συχνότητας δίνεται από την (6.153).
- Γ.7) Για $\zeta \rightarrow 0$ η κορυφή της απόκρισης συχνότητας είναι οξεία και το εύρος ζώνης είναι πολύ στενό. Επομένως όταν ο συντελεστής ποιότητας Q αυξάνεται το φίλτρο

καθίσταται ολοένα και πιο επιλεκτικό συχνοτήτων.

Δ) $\zeta = 0$: Οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον $j\omega$ άξονα και στο πεδίο του χρόνου η κρουστική απόκριση είναι ημιτονοειδής χωρίς απόσβεση, δηλαδή

$$h(t) = M[e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}] = 2jM \sin(\omega_n t). \quad (6.160)$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(j\omega) = 2M\pi[\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)] \quad (6.161)$$

οπότε το σύστημα είναι **μη-αποσβενύμενο** (undamped) και η συχνότητα ταλάντωσης είναι η ω_n .

Όταν η απόκριση συχνότητας δίνεται από την (6.153), τότε για το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισχύει

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} \\ &\approx \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n & \text{αν } \omega \gg \omega_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.162)$$

ενώ για τη φάση της απόκρισης συχνότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= -\arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) \\ &\approx \begin{cases} 0 & \omega \leq 0.1 \omega_n \\ -\frac{\pi}{2} [\log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) + 1] & 0.1 \omega_n \leq \omega \leq 10 \omega_n \\ -\pi & \omega \geq 10 \omega_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.163)$$

Το Σχήμα 6.13 συνοψίζει τη συμπεριφορά ενός δευτεροβάθμιου συστήματος.

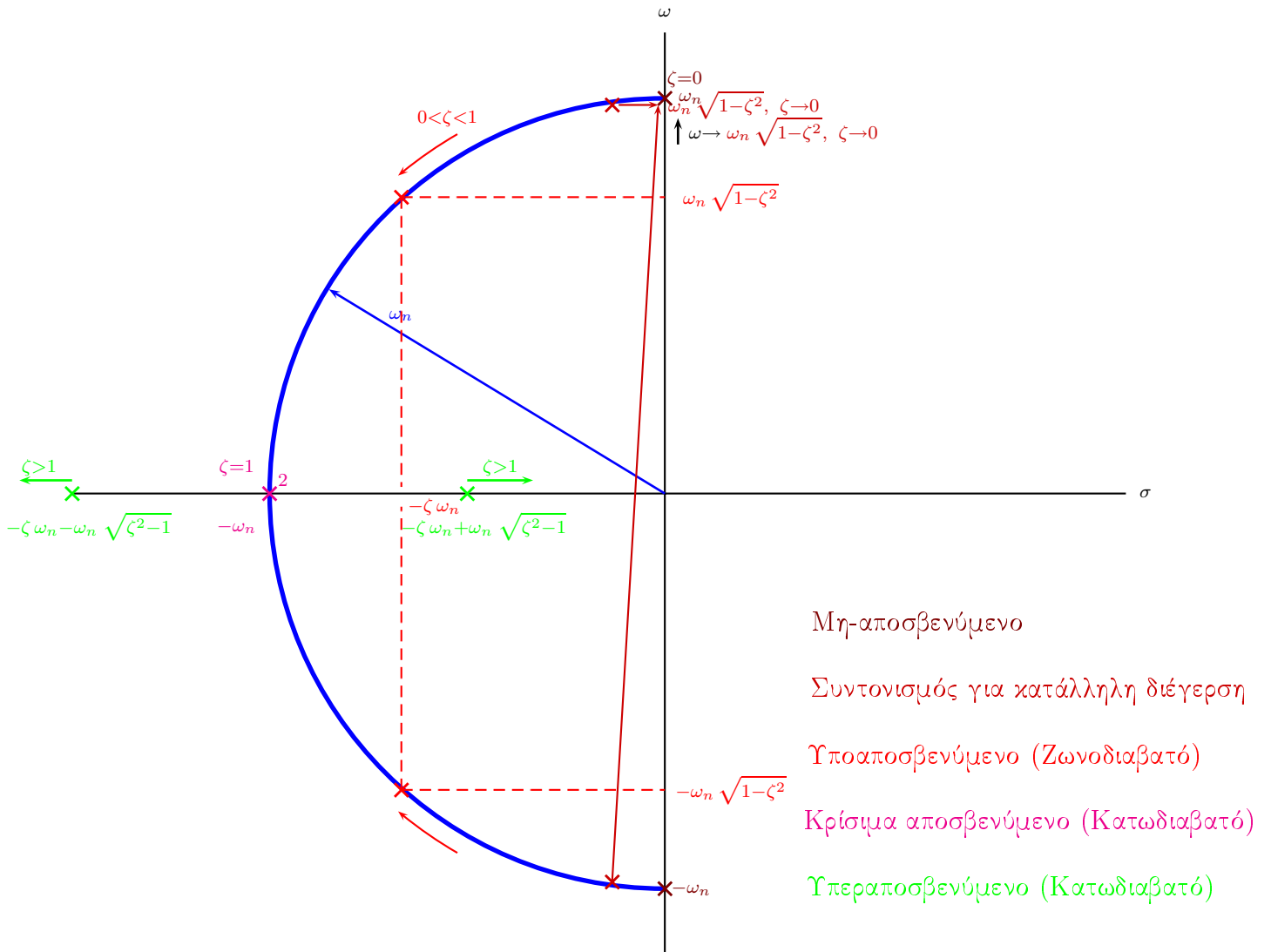
6.6.3 Ολοπερατά συστήματα

Ολοπερατό (all-pass) καλείται το σύστημα που έχει συνάρτηση συστήματος

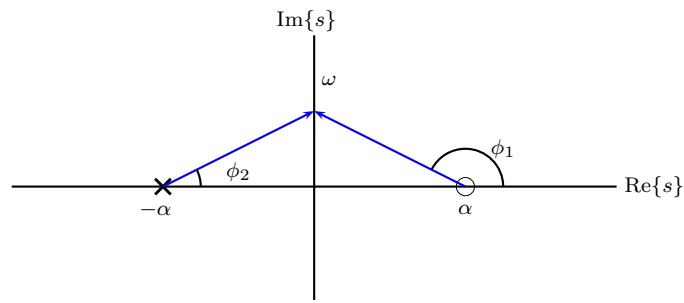
$$H(s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (6.164)$$

οπότε η απόκριση συχνότητας ενός τέτοιου συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - \alpha}{j\omega + \alpha}. \quad (6.165)$$



Σχήμα 6.13: Συμπεριφορά ενός δευτεροβάθμιου συστήματος.



Σχήμα 6.14: Γεωμετρικός υπολογισμός απόκρισης συχνότητας ολοπερατού συστήματος.

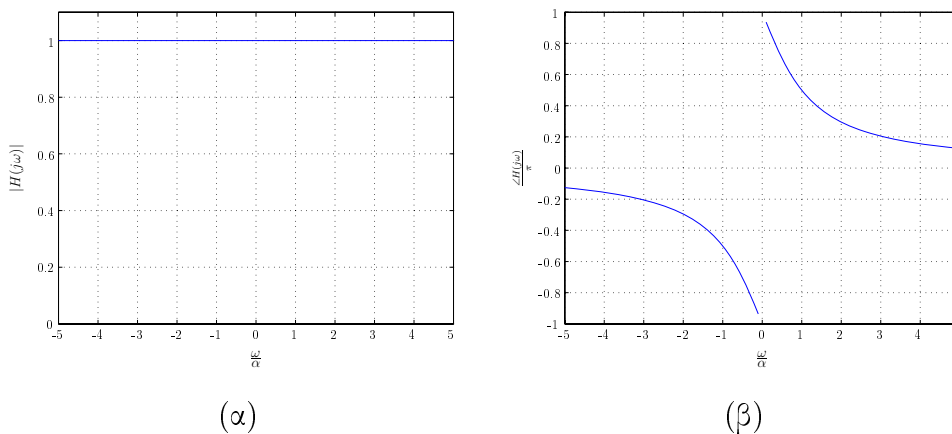
Ο γεωμετρικός υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας του ολοπερατού συστήματος δείχνεται στο Σχήμα 6.14.

Από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται στο Σχήμα 6.14 και στοιχειώδεις γνώσεις τριγωνομετρίας προκύπτει το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας:

$$|H(j\omega)| = \frac{|j\omega - \alpha|}{|j\omega + \alpha|} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = 1 \quad (6.166)$$

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle(j\omega - \alpha) - \angle(j\omega + \alpha) \\ &= \arctan\left(\frac{\omega}{-\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \\ &= \pi - 2 \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (6.167)$$

ή αλλιώς $\angle H(j\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = (\pi - \varphi_2) - \varphi_2 = \pi - 2\varphi_2$ όπου $\varphi_2 = \arctan(\frac{\omega}{\alpha})$. Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας σχεδιάζονται στο Σχήμα 6.15.



Σχήμα 6.15: Απόκριση συχνότητας ολοπερατού συστήματος. (α) Μέτρο και (β) Φάση.