Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου - Άλυτα προβλήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου

7.8 Άλυτα προβλήματα

1. Σας παρέχονται οι ακόλουθες πληροφορίες για ένα συγκεκριμένο πραγματικό σήμα $x[n]$ με μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου $X(\Omega)$:

1. $x[n] = 0$ για $n > 0$.
2. $x[0] > 0$.
3. $\text{Im}\{X(\Omega)\} = \sin\Omega - \sin 2\Omega$.
4. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = 3$.

Να βρείτε το σήμα $x[n]$. (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 2003)

2. Έστω γραμμικό χρονοαμετάβλητο (Γ.Χ.Α.) σύστημα διακριτού χρόνου (Δ.Χ.) $\mathcal{S}$ με κρουστική απόκριση $h[n]$ και απόκριση συχνότητας $H(\Omega) = H(e^{j\,\Omega})$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι:

1. Η έξοδος του συστήματος σε είσοδο $(1/4)^n u[n]$ είναι η ακολουθία $g[n]$ με

$$g[n] = 0 \qquad \text{για } n \geq 2 \text{ και } n < 0.$$

2. $H(e^{j\,(\pi/2)}) = 1$.
3. $H(e^{j\,\Omega}) = H(e^{j\,(\Omega-\pi)})$.

Να προσδιορίσετε την $h[n]$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2002)

3. (α) Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από τη συνδεσμολογία σειράς δύο Γραμμικών Χρονοαμετάβλητων (Γ.Χ.Α.) συστημάτων με αποκρίσεις συχνότητας

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

και

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}.$$

Να βρείτε την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το πλήρες σύστημα.

(β) Θεωρήστε το αιτιατό και ευσταθές Γ.Χ.Α. σύστημα του οποίου η είσοδος $x[n]$ και η έξοδος $y[n]$ σχετίζονται δια της δευτεροβάθμιας εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n].$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2002)

4. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό $X(\Omega)$ της ακολουθίας

$$a^n\, u[n] \quad \text{εάν } |a| < 1.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. να προσδιορίσετε εκείνον της ακολουθίας

$$(n+1)\, \alpha^n\, u[n].$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την απάντηση του ερωτήματος (β) και μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι:

$$x[n] = \frac{(n+r-1)\,!}{n\,!\,(r-1)\,!}a^n u[n] \overset{FT-DT}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{(1-\alpha\, e^{-j\,\Omega})^r}.$$

(Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2002)

5. Ένα αιτιατό και ευσταθές Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. $\mathcal{S}$ έχει την ιδιότητα ότι σε διέγερση $x[n] = (4/5)^n\, u[n]$ παράγει απόκριση $y[n] = n\,(4/5)^n\, u[n]$.

(i) Να προσδιορίσετε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

(ii) Να προσδιορίσετε την εξίσωση διαφορών που συσχετίζει οποιαδήποτε διέγερση με την απόκριση του συστήματος. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2001)

6. (α) Να βρείτε το σήμα Δ.Χ. $x[n]$ για το οποίο γνωρίζετε τα εξής:

   1. Το σήμα $x[n]$ είναι σήμα πραγματικό άρτιας συμμετρίας ως προς n.

   2. Το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο $N = 8$ και συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.

   3. $a_9 = 6$.

   4. $\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}|x[n]|^2 = 72$.

(β) Ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

όπου a είναι πραγματικός αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μικρότερη του 1. Να βρείτε μια τιμή του b τέτοια ώστε

$$|H(e^{j\Omega})| = 1 \quad \forall\Omega.$$

Πώς λέγεται ένα τέτοιο σύστημα; Να προσδιορίσετε την απόκριση του συστήματος για $a = -1/2$, όταν τούτο διεγείρεται από το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2001)

7. Θεωρήστε το εξής ζεύγος

$$g[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} G(e^{j\,\Omega}).$$

Έστω ότι

$$g[n] = x_{(2)}[n]$$

όπου το σήμα $x[n]$ έχει μετασχηματισμό Fourier Δ.Ξ. $X(e^{j\,\Omega})$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α που είναι τέτοιος ώστε $0 < \alpha < 2\pi$ και $G(e^{j\,\Omega}) = G(e^{j\,(\Omega-\alpha)})$. (Θέμα εξετάσεων

Ιουνίου 2000)

8. Έστω $x[n]$ ένα περιοδικό σήμα Δ.Χ. με περίοδο $N = 8$ και συντελεστές της σειράς Fourier τέτοιους, ώστε $a_k = -a_{k-4}$. Δημιουργείται το περιοδικό σήμα με την ίδια περίοδο

$$y[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) x[n-1]$$

Αν συμβολίσουμε με b_k τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $y[n]$ βρείτε το σήμα $f[k]$ που είναι τέτοιο ώστε

$$b_k = f[k]\, a_k.$$

(Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 1998)

9. Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$X(e^{j\,\Omega}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(1/2)^k}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\,(\Omega - \frac{\pi}{2}k)}}.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$x[n] = g[n]q[n],$$

όπου $g[n]$ είναι της μορφής $\alpha^n u[n]$ και $q[n]$ είναι ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N.

(α)Να προσδιορίσετε την τιμή του α.

(β) Να προσδιορίσετε την τιμή του N.

(γ) Είναι το σήμα $x[n]$ πραγματικό; (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 1999)

10. Έστω $x[n]$ και $y[n]$ μιγαδικές ακολουθίες και $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ οι μετασχηματισμοί Fourier Δ.Χ. αυτών.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης και κατάλληλες ιδιότητες του μετασχηματισμού να προσδιορίσετε με όρους των $x[n]$ και $y[n]$ την ακολουθία της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι $X(\Omega)Y^*(\Omega)$.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega.$$

Τι παρατηρείτε;

(γ) Με τη χρήση της αποδεικτέας σχέσης του ερωτήματος (β) να προσδιορίσετε την τιμή του αθροίσματος:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \, \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

(Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2000)

11. Έστω σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με $0 \leq n \leq N-1$. Να εκφράσετε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του σήματος, $X(e^{j\Omega})$, με όρους των συντελεστών του διακριτού μετασχηματισμού Fourier $X[k]$. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2010)

12. Για το σήμα Δ.Χ. $x[n]$ γνωρίζετε τα εξής:

   1. Το σήμα $x[n]$ είναι σήμα πραγματικό περιττής συμμετρίας ως προς n.
   2. Το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο $N = 9$ και συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier c_k.
   3. $|c_{10}| = 7$.
   4. $\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{9} |x[n]|^2 = 98$.

Να προσδιορίσετε το σήμα $x[n]$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010)

13. Θεωρήστε τα ακολούθα περιοδικά σήματα Δ.Χ. με περίοδο $N = 6$:

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \cos\Big(\frac{2\pi}{6}\, n\Big) \\ y[n] &= \sin\Big(\frac{2\pi}{6}\, n + \frac{\pi}{4}\Big) \\ z[n] &= x[n]\, y[n]. \end{aligned}$$

(α) Να προσδιορίσετε τη διακριτή σειρά Fourier του $x[n]$.
(β) Να προσδιορίσετε τη διακριτή σειρά Fourier του $y[n]$.
(γ) Να προσδιορίσετε τη διακριτή σειρά Fourier του $z[n]$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διακριτής σειράς Fourier.

14. Έστω $x[n]$ περιοδικό σήμα με περίοδο N και συντελεστές σειράς Fourier a_k.
(α) Να εκφράσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier b_k του σήματος $|x[n]|^2$ με όρους των a_k.

(β) Αν οι συντελεστές a_k είναι πραγματικοί, υπάρχει καμιά εγγύηση ότι οι συντελεστές b_k θα είναι επίσης πραγματικοί;

15. Δίνεται ότι

$$a^{|n|} \overset{FT-DT}{\longleftrightarrow} \frac{1-a^2}{1-2a\,\cos\Omega + a^2}, \quad |a| < 1.$$

Χρησιμοποιήστε τις διαδικές ιδιότητες για να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος Σ.Χ. με περίοδο $T = 1$

$$x(t) = \frac{1}{5 - 4\cos(2\pi\, t)}.$$

16. Έστω

$$y[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\,n}{\pi\, n}\right)^2 * \left(\frac{\sin\Omega_c\, n}{\pi\, n}\right), \quad |\Omega_c| \le \pi.$$

Να προσδιορίσετε ένα πιό αυστηρό περιορισμό για το Ω_c που να εγγυάται ότι

$$y[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\,n}{\pi\, n}\right)^2.$$

17. Έστω ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $Y(\Omega)$

$$y[n] = \left(\frac{\sin\Omega_c\, n}{\pi\, n}\right)^2 \quad 0 < \Omega_c < \pi.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή του Ω_c, ώστε $Y(\pi) = 0.5$.

18. Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ και απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\text{αν } -\pi \le \Omega_0 \le \pi, \quad \cos\Omega_0\, n \longrightarrow \Omega_0\, \cos\Omega_0\, n.$$

(α) Να προσδιορίσετε την $H(\Omega)$.

(β) Να προσδιορίσετε την $h[n]$.

19. Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + x[n-1].$$

(α) Να βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος.

(β) Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(γ) Να σχεδιάσετε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας.

(δ) Να βρείτε τη συχνότητα αποκοπής 3-dB του συστήματος.

20. Έστω σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$. Ορίζουμε το σήμα $g[n] = e^{j\Omega_0 n}\, x[n]$.

(α) Να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του σήματος $p[n] = e^{j\Omega_0 n}$.

(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού να δείξετε ότι $G(\Omega) = X(\Omega - \Omega_0)$.