Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου - Λυμένες ασκήσεις

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου

7.7 Λυμένες ασκήσεις

7.7.1. Υπολογίστε το Μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. των ακόλουθων σημάτων με τη χρήση των ιδιοτήτων του:

(α) $(\frac{1}{2})^n\, u[n+3]$

(β) $2^n\, u[-n]$

(γ) $[r^n \sin(\omega_0\, n\, T)]\, u[n] \quad |r| < 1$

(δ) $r^{|n|} \cos(\omega_0\, n\, T)$

(ε) $(n+1)\, \alpha^n\, u[n]$

Λύση

(α) Ισχύει

$$(\frac{1}{2})^n\, u[n] \quad \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \tag{7.7.1}$$

$$(\frac{1}{2})^{-3}\, \{(\frac{1}{2})^{n+3}\, u[n+3]\} \quad \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} \quad (\frac{1}{2})^{-3}\, \frac{e^{j3\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}. \tag{7.7.2}$$

(β)

$$x[n] = 2^{-n}u[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = X(\Omega) \tag{7.7.3}$$

$$x[-n] = 2^n\, u[-n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}. \tag{7.7.4}$$

(γ)

$$\begin{aligned}[r^n \sin(\omega_0 nT)]u[n] &= r^n \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 Tn} - e^{-j\omega_0 Tn}]u[n] \\ &= \frac{1}{2j}\Big[e^{j\omega_0 Tn}\, r^n\, u[n] - e^{-j\omega_0 Tn}\, r^n\, u[n]\Big] \\ &\overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}\Big[X(\Omega-\omega_0 T) - X(\Omega+\omega_0 T)\Big] \\ &= \frac{1}{2j}\Big[\frac{1}{1-re^{-j(\Omega-\omega_0 T)}} - \frac{1}{1-re^{-j(\Omega+\omega_0 T)}}\Big] \end{aligned} \tag{7.7.5}$$

όπου

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-re^{-j\Omega}}. \tag{7.7.6}$$

(δ) Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του σήματος

$$y[n] = r^{|n|}\cos(\omega_0\, n\, T) \tag{7.7.7}$$

ξεκινούμε από το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. που αποδείξαμε σε εφαρμογή:

$$x[n] = r^{|n|}, \quad |r| < 1 \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{1-re^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-re^{j\Omega}} - 1. \tag{7.7.8}$$

Ισχύει επίσης

$$\cos(\omega_0 nT) = \frac{1}{2}\Big[e^{j\omega_0 Tn} + e^{-j\omega_0 Tn}\Big] \tag{7.7.9}$$

οπότε

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = &\Big\{\frac{1}{1-re^{-j(\Omega-\omega_0 T)}} + \frac{1}{1-re^{j(\Omega-\omega_0 T)}} - 1 + \\ &\frac{1}{1-re^{-j(\Omega+\omega_0 T)}} + \frac{1}{1-re^{j(\Omega+\omega_0 T)}} - 1\Big\}\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7.7.10}$$

(ε) Για το σήμα

$$(n+1)\,\alpha^n\, u[n] \qquad |\alpha| < 1 \tag{7.7.11}$$

ξεκινάμε από το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ.

$$x[n] = \alpha^n\, u[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \qquad |\alpha| < 1. \tag{7.7.12}$$

Επιπλέον έχουμε

$$nx[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = j\frac{-(-\alpha(-j)e^{-j\Omega})}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$$
$$= j\frac{-\alpha j e^{-j\Omega}}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2} = \alpha\frac{e^{-j\Omega}}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}. \quad (7.7.13)$$

Άρα

$$n\alpha^n u[n] + \alpha^n u[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$
$$= \frac{\alpha e^{-j\Omega} + 1 - \alpha e^{-j\Omega}}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2} = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}. \quad (7.7.14)$$

7.7.2. Στο πρόβλημα αυτό μελετούμε ορθογώνια διακριτά σήματα. Δύο σήματα διακριτού χρόνου $\phi_k[n]$ και $\phi_m[n]$ λέγονται **ορθογώνια** στο διάστημα (N_1, N_2) εάν

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} A_k & k = m \\ 0 & k \neq m. \end{cases} \quad (7.7.15)$$

Αν η τιμή της σταθεράς $A_k = A_m$ είναι 1, τότε τα σήματα λέγονται **ορθοκανονικά**.

(α) Θεωρήστε τα σήματα

$$\phi_k[n] = \delta[n-k] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \quad (7.7.16)$$

Δείξτε ότι τα σήματα αυτά είναι ορθοκανονικά στο διάστημα $(-N, N)$.

<u>Απόδειξη</u>

$$\sum_{n=-N}^{N} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \sum_{n=-N}^{N} \delta[n-k]\delta[n-m] = \delta_{mk} = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7.7.17)$$

όπου m και k κινούνται στο διάστημα $(-N, N)$.

(β) Θεωρήστε τα σήματα

$$\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (7.7.18)$$

Δείξτε ότι τα σήματα αυτά είναι ορθογώνια σ' οποιοδήποτε διάστημα μήκους N.

<u>Απόδειξη</u>

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} e^{-jm(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k-m = 0, \pm N, \ldots \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases} \quad (7.7.19)$$

Επειδή όμως

$$\left.\begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ m = 0, 1, \ldots, N-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1-N \leq k-m \leq N-1 \\ k-m = 0, \pm N, \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k = m. \tag{7.7.20}$$

(γ) Δείξτε ότι εάν

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \, \phi_i[n] \tag{7.7.21}$$

όπου $\phi_i[n]$ είναι ορθογώνια στο διάστημα (N_1, N_2), τότε

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i|^2 \, A_i. \tag{7.7.22}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 &= \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] x^*[n] \\ &= \sum_{n=N_1}^{N_2} \left\{ \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \, \phi_i[n] \right\} \left\{ \sum_{l=1}^{M} \alpha_l^* \, \phi_l^*[n] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \alpha_i \, \alpha_l^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n] \, \phi_l^*[n] \\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \alpha_i \, \alpha_l^* \, A_i \, \delta_{il} \\ &= \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \, \alpha_i^* \, A_i = \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i|^2 \, A_i. \end{aligned} \tag{7.7.23}$$

(δ) Έστω $\phi_i[n]$, $i = 0, 1, \ldots, M$, ένα σύνολο ορθογωνίων συναρτήσεων πάνω στο διάστημα (N_1, N_2) και $x[n]$ δοσμένο σήμα. Υποθέστε ότι επιθυμούμε να προσεγγίσουμε το $x[n]$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\phi_i[n]$, δηλαδή

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \, \phi_i[n] \tag{7.7.24}$$

όπου α_i είναι σταθεροί συντελεστές. Έστω

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]. \tag{7.7.25}$$

Δείξτε ότι εάν επιθυμούμε να ελαχιστοποιηθεί το

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2 \tag{7.7.26}$$

τότε

$$\alpha_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n]. \tag{7.7.27}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=N_1}^{N_2} e[n]\, e^*[n] = \sum_{n=N_1}^{N_2} (x[n] - \hat{x}[n])(x^*[n] - \hat{x}^*[n]) \\
&= \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 - \sum_{n=N_1}^{N_2} \hat{x}[n]\, x^*[n] - \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \hat{x}^*[n] + \sum_{n=N_1}^{N_2} \hat{x}[n]\, \hat{x}^*[n] \\
&= \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 - \sum_{n=N_1}^{N_2} \left[\sum_{i=0}^{M} \alpha_i\, \phi_i[n]\right] x^*[n] \\
&\quad - \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \sum_{i=0}^{M} \alpha_i^*\, \phi_i^*[n] + \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{i=0}^{M} \sum_{l=0}^{M} \alpha_i\, \alpha_l^*\, \phi_i[n]\, \phi_l^*[n] \\
&= \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 - \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n]\, x^*[n] \\
&\quad - \sum_{i=0}^{M} \alpha_i^* \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n] + \sum_{i=0}^{M} |\alpha_i|^2 A_i.
\end{aligned} \tag{7.7.28}$$

Αντικαθιστούμε $\alpha_i = b_i + j\, c_i$

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 - \sum_{i=0}^{M} (b_i + j\, c_i) \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n]\, x^*[n] \\
&\quad - \sum_{i=0}^{M} (b_i - j\, c_i) \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n] + \sum_{i=0}^{M} (b_i^2 + c_i^2) A_i.
\end{aligned} \tag{7.7.29}$$

Όμως πρέπει και αρκεί

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta b_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; -\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n]\, x^*[n] - \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n] + 2 b_i A_i = 0 \tag{7.7.30}$$

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta c_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; -j \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n]\, x^*[n] + j \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n] + 2 c_i A_i = 0 \tag{7.7.31}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}
b_i &= \frac{1}{2A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} \{\phi_i[n]\, x^*[n] + x[n]\, \phi_i^*[n]\} = \frac{1}{A_i} \mathrm{Re} \left\{ \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, \phi_i^*[n] \right\} \qquad (7.7.32) \\
c_i &= \frac{1}{2A_i} j \sum_{n=N_1}^{N_2} \{\phi_i[n]\, x^*[n] - x[n]\, \phi_i^*[n]\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2A_i} j \sum_{n=N_1}^{N_2} \{x[n]\,\phi_i^*[n] - \phi_i[n]\,x^*[n]\} = \frac{1}{A_i}\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\,\phi_i^*[n]\right\}. \quad (7.7.33)$$

Επομένως

$$\alpha_i = b_i + j\,c_i = \frac{1}{A_i}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\,\phi_i^*[n]. \quad (7.7.34)$$

(ε) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα για τον υπολογισμό των συντελεστών, όταν

$$\phi_i[n] = \delta[n-i]. \quad (7.7.35)$$

$$\begin{aligned}\alpha_i = \frac{1}{A_i}\sum_{n=-N}^{N} x[n]\,\delta[n-i] \;&=\; \sum_{n=-N}^{N} x[n]\,\delta[n-i] = x[i] \\ & \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N. \end{aligned} \quad (7.7.36)$$

7.7.3. (α) Έστω $x[n]$ πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο N και μιγαδικούς συντελεστές της σειράς Fourier α_k. Αν η καρτεσιανή μορφή των α_k αναπαρίσταται ως $\alpha_k = b_k + j\,c_k$, όπου b_k και c_k είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξτε ότι $\alpha_{-k} = \alpha_k^*$.

<u>Λύση</u>

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \;\Rightarrow \\
\alpha_{-k} &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\
&= \frac{1}{N}\left\{\sum_{n=<N>} x[n]\,\left\{\cos\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right] + j\sin\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right]\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,\cos\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right] + j\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,\sin\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right] \\
&= \mathrm{Re}\{\alpha_k\} - j\mathrm{Im}\{\alpha_k\} \;\Rightarrow\; \alpha_{-k} = \alpha_k^*.
\end{aligned} \quad (7.7.37)$$

(β) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των b_k και b_{-k}; Ποιά είναι η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των c_k και c_{-k};

<u>Λύση</u>

$$\alpha_{-k} = \alpha_k^* \Leftrightarrow \begin{cases} b_{-k} &= b_k \\ c_{-k} &= -c_k. \end{cases} \quad (7.7.38)$$

(γ) Υποθέστε ότι N είναι άρτιος. Δείξτε ότι $a_{N/2}$ είναι πραγματικός αριθμός.

<u>Λύση</u>

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \;\Rightarrow \\
\alpha_{N/2} &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\frac{N}{2}(\frac{2\pi}{N})n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\pi n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} (-1)^n\, x[n] \;\rightarrow\; \text{πραγματικός.}
\end{aligned} \tag{7.7.39}$$

(δ) Δείξτε ότι η ακολουθία $x[n]$ μπορεί να εκφραστεί ως τριγωνομετρική σειρά Fourier της μορφής:

$$x[n] = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\left[b_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}) - c_k\sin(\frac{2\pi kn}{N})\right] \tag{7.7.40}$$

για N περιττό αριθμό ή

$$x[n] = \{\alpha_0 + \alpha_{N/2}(-1)^n\} + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2}\left[b_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}) - c_k\sin(\frac{2\pi kn}{N})\right] \tag{7.7.41}$$

αν N είναι άρτιος αριθμός.

<u>Λύση</u>

$$\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=<N>} \alpha_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\
&= \sum_{k=-(\frac{N-1}{2})}^{\frac{N-1}{2}} \alpha_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\alpha_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} + \alpha_{-k}\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}\right\} \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \Bigg\{ (b_k + j\,c_k)\left[\overbrace{\cos k(\frac{2\pi}{N})n}^{A_k} + j\,\overbrace{\sin k(\frac{2\pi}{N})n}^{B_k}\right] \\
&\qquad + (b_k - j\,c_k)\left[\cos k(\frac{2\pi}{N})n - j\sin k(\frac{2\pi}{N})n\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \{(b_k A_k - c_k B_k) + j(b_k B_k - c_k A_k) \\ +(b_k A_k - c_k B_k) - j(b_k B_k - c_k A_k)\} \quad \text{ο.ε.δ.} \tag{7.7.42}$$

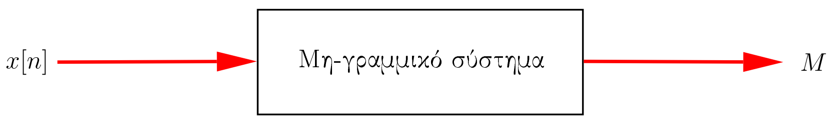
Για N άρτιο το $N-1$ είναι περιττός, οπότε

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \alpha_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-1} \alpha_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \alpha_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} + \alpha_{N/2}\,(-1)^n \\ &\overset{(l=-k)}{=} \{\alpha_0 + \alpha_{N/2}\,(-1)^n\} + \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \alpha_{-l}\, e^{-jl(\frac{2\pi}{N})n} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \alpha_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \{\alpha_0 + \alpha_{N/2}\,(-1)^n\} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \alpha_{-k}\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} + \alpha_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \right\} \\ &= \{\alpha_0 + \alpha_{N/2}\,(-1)^n\} + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ b_k \cos\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right] - c_k \sin\left[k(\frac{2\pi}{N})n\right] \right\}. \end{aligned} \tag{7.7.43}$$

7.7.4. Έστω μη-γραμμικό σύστημα (Σχήμα 7.7.1) του οποίου η έξοδος δίνεται από τη σχέση

$$M = \max_n \left| \sum_{k=0}^{10} (\frac{1}{2})^k \, x^2[n-k] \right| \tag{7.7.44}$$

όπου $|\cdot|$ υποδηλοί το μέτρο. Επειδή το M είναι ίσο με τη μέγιστη τιμή καθόλο το χρόνο, προκύπτει ότι είναι σταθερά. Έστω $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$. Για διαφορετικές επιλογές του Ω_0, το M θα είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το Ω_0, δηλαδή, γι' αυτήν την οικογένεια εισόδων $M = M(\Omega_0)$. Να προσδιορίστε αν το $M = M(\Omega_0)$ είναι περιοδικό σήμα ως προς Ω_0. Αν ναί, να βρείτε την περίοδό του.



Σχήμα 7.7.1: Σύστημα της Άσκησης 7.7.4.

Λύση

$$\begin{aligned} M(\Omega_0) &= \max_n \left| \sum_{k=0}^{10} (\frac{1}{2})^k \, e^{j2\Omega_0(n-k)} \right| \\ &= \max_n \left| e^{j2\Omega_0 n} \, \sum_{k=0}^{10} (\frac{1}{2})^k \, e^{-j2\Omega_0 k} \right| \end{aligned} \tag{7.7.45}$$

Επειδή το $e^{j2\Omega_0 n}$ είναι περιοδικό με περίοδο π έπεται ότι $M(\Omega_0) = M(\Omega_0 + \pi)$ είναι περιοδικό με την ίδια περίοδο.

7.7.5. Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα έχει απόκριση συχνότητας

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\,3\Omega} & |\Omega| < \frac{3\pi}{16} \\ 0 & \frac{3\pi}{16} \leq |\Omega| \leq \pi. \end{cases} \tag{7.7.46}$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι μια περιοδική παλμοσειρά μοναδιαίων ώσεων με περίοδο $N = 16$, δηλαδή,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k]. \tag{7.7.47}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση

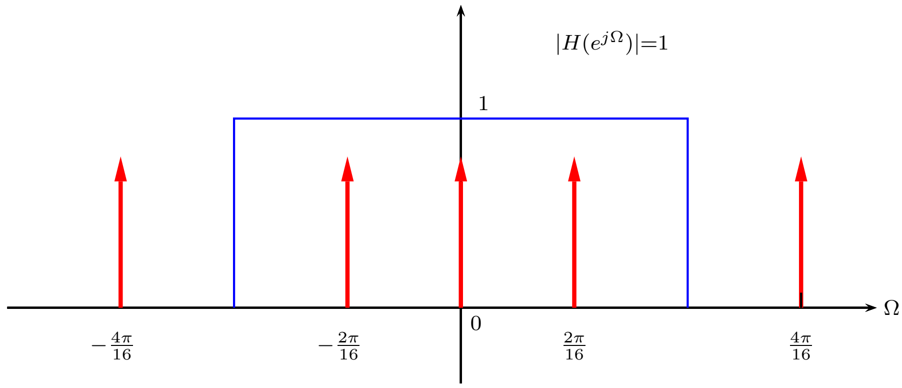
$$\begin{aligned} x[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \frac{2\pi k}{N}) \Big|_{N=16} \\ &= \frac{2\pi}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \frac{2\pi k}{16}). \end{aligned} \tag{7.7.48}$$

Παρατηρούμε ότι και ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος εισόδου είναι περιοδικός με περίοδο 16 και ότι μέσα στο διάστημα $-\pi < \Omega \leq \pi$ θα υπάρχουν 16 μοναδιαίες ώσεις στο πεδίο της συχνότητας στις τιμές

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{16} k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ \text{κ.ο.κ.} \tag{7.7.49}$$

Το Γ.Χ.Α. σύστημα είναι ένα κατωδιαβατό φίλτρο (Σχήμα 7.7.2) που απομακρύνει όλες τις ώσεις εκτός εκείνων για $k = 0, \pm 1$ στις οποίες προσθέτει μια διαφορά φάσης $e^{-3j\Omega}|_{\Omega=\Omega_k}$. Έτσι

$$Y(\Omega) = \frac{2\pi}{16} \left\{ \delta(\Omega) + e^{j\frac{6\pi}{16}} \, \delta(\Omega + \frac{2\pi}{16}) + e^{-j\frac{6\pi}{16}} \, \delta(\Omega - \frac{2\pi}{16}) \right\}. \tag{7.7.50}$$



Σχήμα 7.7.2: Απόκριση συχνότητας του συστήματος και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της διεγέρσεως.

Άρα η έξοδος είναι

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \frac{1}{16}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\delta(\Omega)+e^{j\frac{6\pi}{16}}\,\delta(\Omega+\frac{2\pi}{16})+e^{-j\frac{6\pi}{16}}\,\delta(\Omega-\frac{2\pi}{16})\right\}e^{j\Omega n}\,d\Omega \\
&= \frac{1}{16}\left\{1+e^{j(\Omega n+\frac{6\pi}{16})}\Big|_{\Omega=-\frac{2\pi}{16}}+e^{j(\Omega n-\frac{6\pi}{16})}\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{16}}\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left\{1+e^{j(-\frac{2\pi}{16}n+\frac{6\pi}{16})}+e^{j(\frac{2\pi}{16}n-\frac{6\pi}{16})}\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left\{1+e^{-j(\frac{2\pi}{16}n-\frac{6\pi}{16})}+e^{j(\frac{2\pi}{16}n-\frac{6\pi}{16})}\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left[1+2\cos(\frac{2\pi n}{16}-\frac{6\pi}{16})\right] \\
&= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}\cos(\frac{2\pi n}{16}-\frac{3\pi}{8}).
\end{aligned} \tag{7.7.51}$$

7.7.6. Μια συνήθης αριθμητική πράξη είναι η διαφορά πρώτης τάξης

$$y[n]=\nabla(x[n])=x[n]-x[n-1] \tag{7.7.52}$$

όπου $x[n]$ είναι η είσοδος και $y[n]$ είναι η έξοδος του συστήματος.

(α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι Γ.Χ.Α.

<u>Λύση</u>

<u>Γραμμικότητα</u>

$$\nabla(\alpha x_1[n]+bx_2[n]) = \alpha x_1[n]+bx_2[n]-(\alpha x_1[n-1]+bx_2[n-1])$$

$$= \quad \alpha\nabla(x_1[n]) + b\nabla(x_2[n]). \tag{7.7.53}$$

Χρονική αμεταβλητότητα

$$\nabla(x[n-1]) = x[n-1] - x[n-2] = y[n-1]. \tag{7.7.54}$$

(β) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση

Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$. Τότε η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι η κρουστική απόκριση:

$$y[n] = h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]. \tag{7.7.55}$$

(γ) Να σχεδιάσετε την απόκριση συχνότητας του συστήματος (μέτρο και φάση).

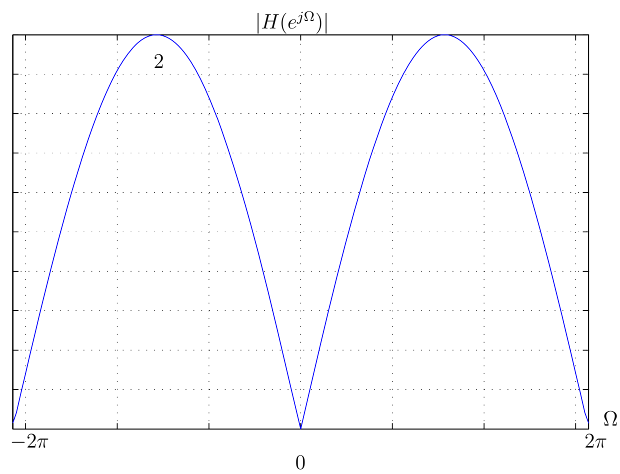
Λύση

$$H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j\Omega} \tag{7.7.56}$$

Μέτρο:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})| &= |(1-\cos\Omega) + j\,\sin\Omega| = \sqrt{(1-\cos\Omega)^2 + \sin^2\Omega} \\ &= \sqrt{1+\cos^2\Omega + \sin^2\Omega - 2\cos\Omega} = \sqrt{2-2\cos\Omega}. \end{aligned} \tag{7.7.57}$$

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.7.3.



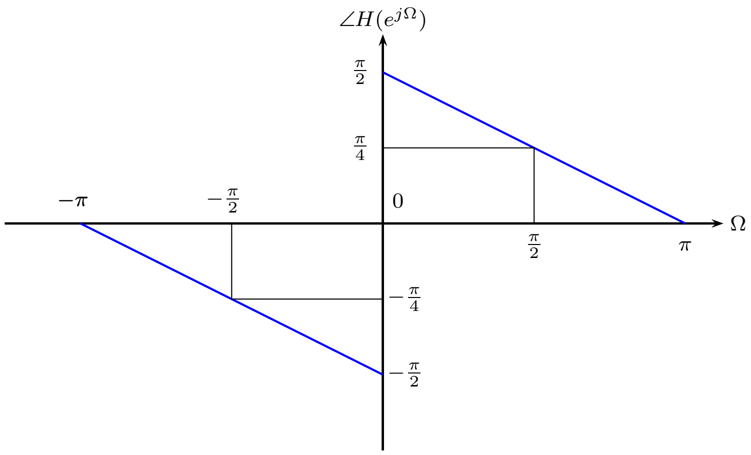
Σχήμα 7.7.3: Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(e^{j\Omega})|$.

Φάση:

$$H(e^{j\Omega}) = (1-\cos\Omega) + j\,\sin\Omega \quad (7.7.58)$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \arctan\left(\frac{\sin\Omega}{1-\cos\Omega}\right). \quad (7.7.59)$$

Η φάση της απόκρισης συχνότητας σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.7.4



Σχήμα 7.7.4: Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(e^{j\Omega})$.

(δ) Δείξτε ότι εάν $x[n] = (f * g)[n]$, τότε

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n] * g[n]) = f[n] * \nabla(g[n]). \quad (7.7.60)$$

Λύση

Δείξαμε ότι

$$\nabla(x[n]) = (x * h)(n) = x[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \quad (7.7.61)$$

άρα

$$\begin{aligned} \nabla\{(f * g)[n]\} &= [(f * g) * h][n] = [f * (g * h)][n] \\ &= [f * (h * g)][n] = [(f * h) * g][n] \qquad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned} \quad (7.7.62)$$

(ε) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που θα μπορούσε να συνδεθεί σε συνδεσμολογία σειράς με ένα σύστημα διαφοράς πρώτης τάξης για να ανακτήσει την είσοδο. Δηλαδή βρείτε το $h_i[n]$ όπου $h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$.

Λύση

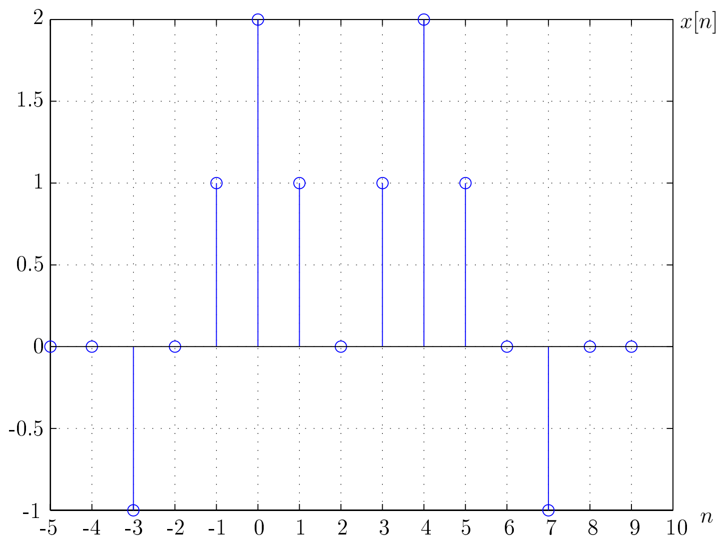
Θέλουμε $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$ ή στο πεδίο της συχνότητας

$$H_i(\Omega)\ H(\Omega) = 1 \Leftrightarrow H_i(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}. \tag{7.7.63}$$

Αλλά το σύστημα που έχει τέτοια απόκριση συχνότητας είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση

$$h_i[n] = u[n]. \tag{7.7.64}$$

7.7.7. Έστω $X(e^{j\Omega})$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n]$ που φαίνεται στο Σχήμα 7.7.5. Να εκτελέσετε τους υπολογισμούς που ακολουθούν χωρίς να υπολογίσετε ρητώς το μετασχηματισμό $X(e^{j\Omega})$.



Σχήμα 7.7.5: Σήμα $x[n]$.

(α) $X(e^{j\Omega})|_{\Omega=0}$

(β) $\angle X(e^{j\Omega})$

(γ) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega$

(δ) Να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε το σήμα που έχει μετασχηματισμό Fourier $\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}$.

Λύση

(α)

$$X(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = \left. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 6. \tag{7.7.65}$$

(β) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία είναι συμμετρική περί το 2. Τούτο σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \overset{n=m+2}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+2]\, e^{-j\Omega(m+2)} \\
&= e^{-j\Omega 2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+2]\, e^{-j\Omega m} \\
&= e^{-j\Omega 2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{-1} x[m+2]\, e^{-j\Omega m} + x[2]\, e^{-j\Omega 0} + \sum_{m=1}^{+\infty} x[m+2]\, e^{-j\Omega m} \right\} \\
&\overset{n=-m}{=} e^{-j\Omega 2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} x[2-n]\, e^{j\Omega n} + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n+2]\, e^{-j\Omega n} \right\} \\
&= e^{-j\Omega 2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ x[2-n]\, e^{j\Omega n} + x[n+2]\, e^{-j\Omega n} \right\} \right] \\
&\overset{(x[n+2]=x[2-n])}{=} e^{-j\Omega 2} \sum_{n=1}^{+\infty} x[n+2]\, (e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}) \\
&= e^{-j\Omega 2} \underbrace{\left\{ 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x[n+2]\, \cos\Omega n \right\}}_{A(\Omega)}
\end{aligned} \tag{7.7.66}$$

όπου $A(\Omega)$ πραγματική συνάρτηση άρα μηδενικής φάσης. Συνεπώς $\angle X(e^{j\Omega}) = -2\Omega$, $-\pi \le \Omega < \pi$.

(γ)

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega \bigg|_{n=0} = 2\pi\, x[0] = 2\pi \cdot 2 = 4\pi. \tag{7.7.67}$$

(δ)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\} &= \mathrm{Re}\{A(\Omega)\, e^{-j\Omega 2}\} = A(\Omega)\cos 2\Omega \\
&= \frac{A(\Omega)}{2}\{e^{j\Omega 2} + e^{-j\Omega 2}\} \overset{\mathcal{IFT-DT}}{\longleftrightarrow} \\
y[n] &= \frac{1}{2}\{\alpha[n+2] + \alpha[n-2]\}.
\end{aligned} \tag{7.7.68}$$

Αλλά

$$X(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega 2}\, A(\Omega) \overset{\mathcal{FT-DT}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = \alpha[n-2]. \tag{7.7.69}$$

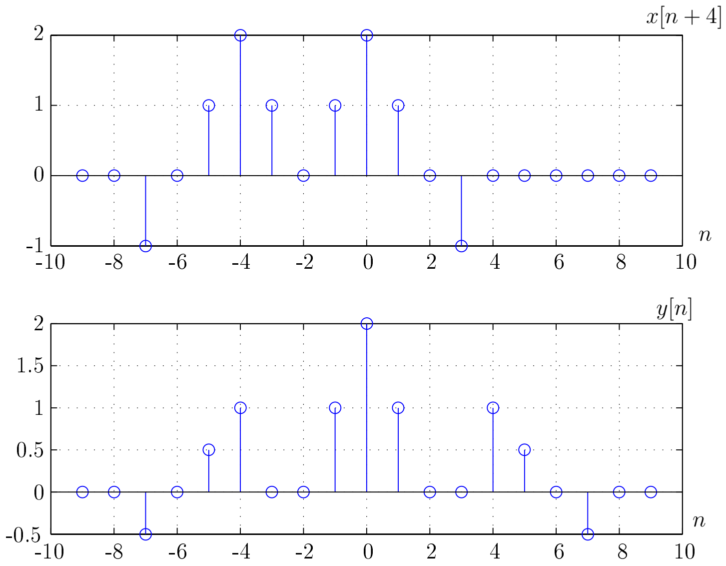
οπότε

$$\alpha[n+2] = \alpha[\underbrace{n-2}+4] = x[n+4]. \tag{7.7.70}$$

Επομένως

$$y[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] + x[n+4]\right\}. \tag{7.7.71}$$

Τα σήματα $x[n+4]$ και $y[n]$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.7.6.



Σχήμα 7.7.6: Σήματα $x[n+4]$ και $y[n]$.

7.7.8. Έστω $x[n]$ και $X(\Omega)$ αναπαριστούν μια ακολουθία και το μετασχηματισμό Fourier της, αντιστοίχως. Προσδιορίστε με όρους του $X(\Omega)$ τους μετασχηματισμούς των $y_s[n]$, $y_d[n]$ και $y_e[n]$. Σε κάθε περίπτωση να σχεδιάσετε τους $Y(\Omega)$ για το μετασχηματισμό $X(\Omega)$ του Σχήματος 7.7.7.

(α) Δειγματολήπτης (sampler):

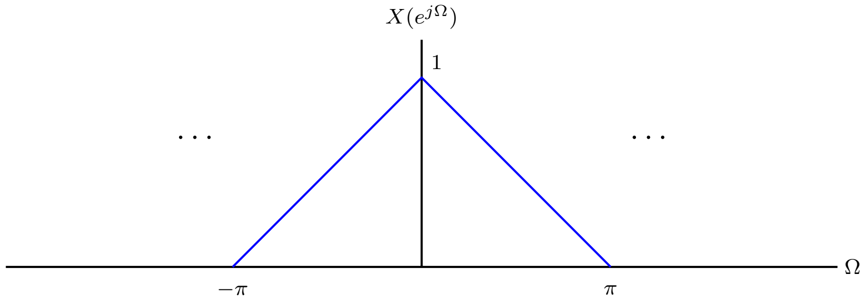
$$y_s[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ άρτιος} \\ 0 & n \text{ περιττός.} \end{cases} \tag{7.7.72}$$

(β) Συμπιεστής (compressor):

$$y_d[n] = x[2n]. \tag{7.7.73}$$

(γ) Αποσυμπιεστής (expander):

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ άρτιος} \\ 0 & n \text{ περιττός.} \end{cases} \tag{7.7.74}$$



Σχήμα 7.7.7: $X(e^{j\Omega})$.

Υπόδειξη: Δίνεται ότι:

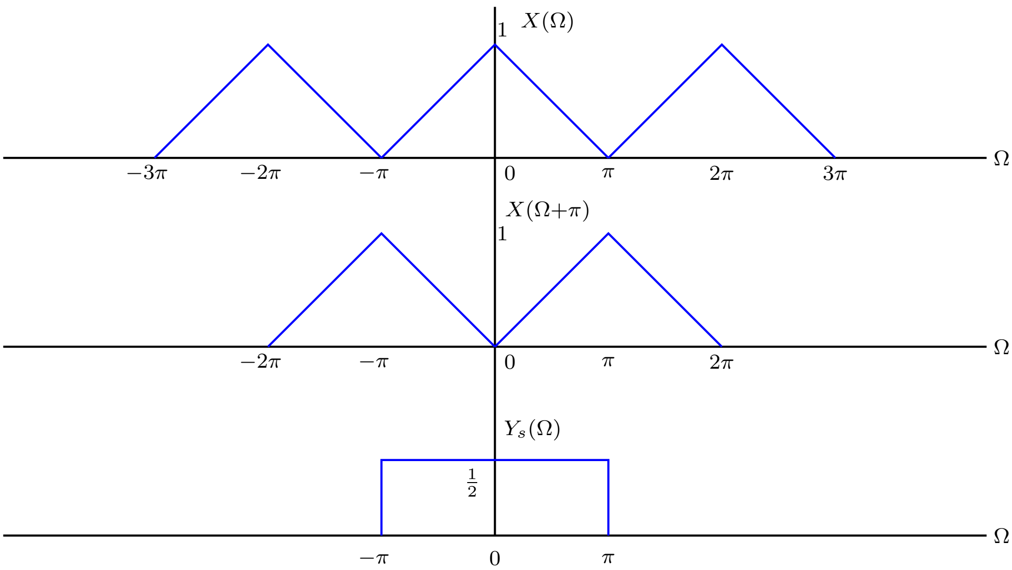
$$y_s[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n\, x[n]\} \ \text{ και } \ e^{j\pi} = -1. \tag{7.7.75}$$

<u>Λύση</u>

(α) Από την (7.7.75)και το Σχήμα 7.7.7 προκύπτει ότι

$$y_s[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + e^{j\pi n}\, x[n]\} \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} Y_s(\Omega) = \frac{1}{2}\{X(\Omega) + X(\Omega+\pi)\}. \tag{7.7.76}$$

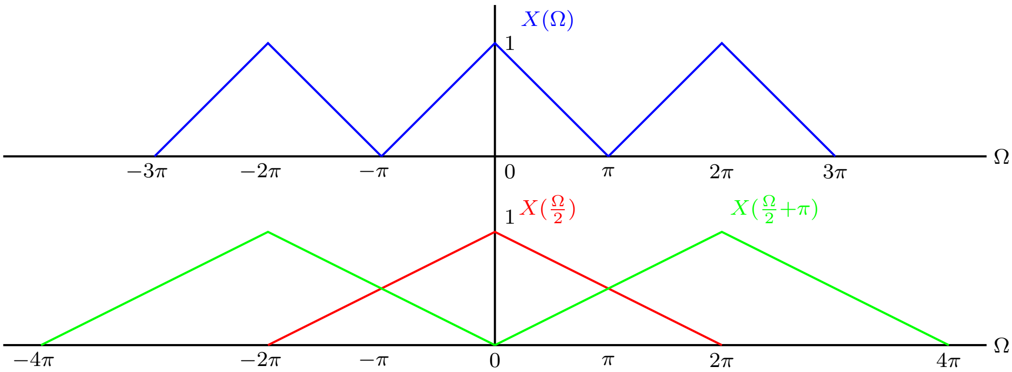
Χρησιμοποιώντας το Σχήμα 7.7.7, ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $Y_s(\Omega)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.7.8.



Σχήμα 7.7.8: Υπολογισμός $Y_s(\Omega)$.

(β) Από τον ορισμό της συμπιεσμένης ακολουθίας

$$y_d[n] = x[2n] \tag{7.7.77}$$



Σχήμα 7.7.9: Υπολογισμός $Y_d(\Omega)$.

ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της συμπιεσμένης ακολουθίας δίνεται από την

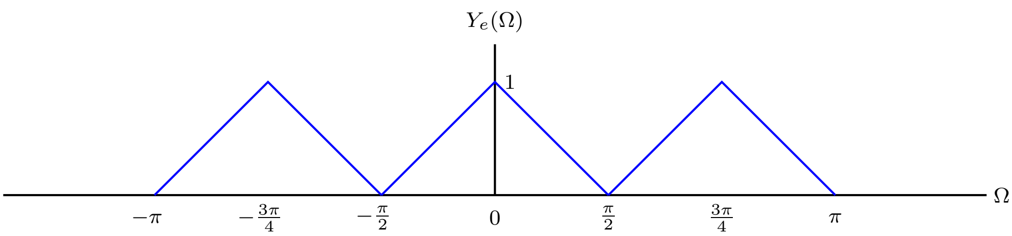
$$\begin{aligned} Y_d(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[2n]}\, e^{-j\Omega n} \\ &\overset{m=2n}{=} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \text{ άρτιος}}}^{+\infty} x[m]\, e^{-j\frac{\Omega}{2}m} = \mathcal{F}\{y_s[n]\}|_{\Omega \leftarrow \frac{\Omega}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[X(\frac{\Omega}{2}) + X(\frac{\Omega}{2}+\pi)\right] = Y_s(\frac{\Omega}{2}). \end{aligned} \tag{7.7.78}$$

Στο Σχήμα 7.7.9 σχεδιάζονται οι μετασχηματισμοί $X(\frac{\Omega}{2})$ και $X(\frac{\Omega}{2}+\pi)$.

(γ) Επειδή

$$y_e[n] = x_{(2)}[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} Y_e(\Omega) = X(2\Omega) \tag{7.7.79}$$

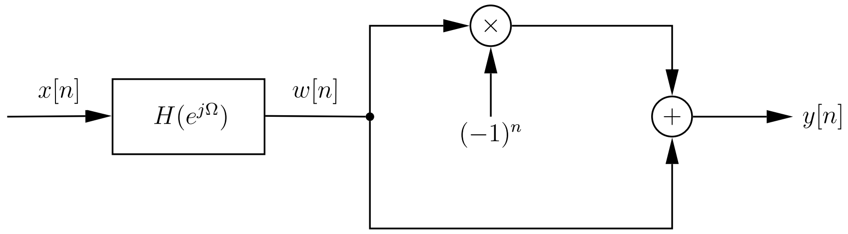
ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της αποσυμπιεσμένης ακολουθίας είναι όπως στο Σχήμα 7.7.10.



Σχήμα 7.7.10: Υπολογισμός $Y_e(\Omega)$.

7.7.9. Για το σύστημα του Σχήματος 7.7.11 προσδιορίστε την έξοδο, όταν η είσοδος είναι $\delta[n]$ και όταν $H(e^{j\Omega})$ είναι ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο, δηλαδή:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\Omega| < \pi. \end{cases} \tag{7.7.80}$$



Σχήμα 7.7.11: Σύστημα του Προβλήματος 7.7.9.

<u>Λύση</u> Αν $x[n] = \delta[n]$, τότε $X(\Omega) = 1$ και

$$W(\Omega) = H(e^{j\Omega})\, 1 = H(e^{j\Omega}). \tag{7.7.81}$$

Αλλά

$$y[n] = w[n] + (-1)^n w[n] \tag{7.7.82}$$

όπου

$$(-1)^n w[n] = e^{j\pi n} w[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} W(\Omega - \pi) = H(e^{j(\Omega-\pi)}) \tag{7.7.83}$$

$$y[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = H(e^{j\Omega}) + H(e^{j(\Omega-\pi)}). \tag{7.7.84}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $H(e^{j(\Omega-\pi)})$ έχει τη μορφή του Σχήματος 7.7.12, δηλαδή

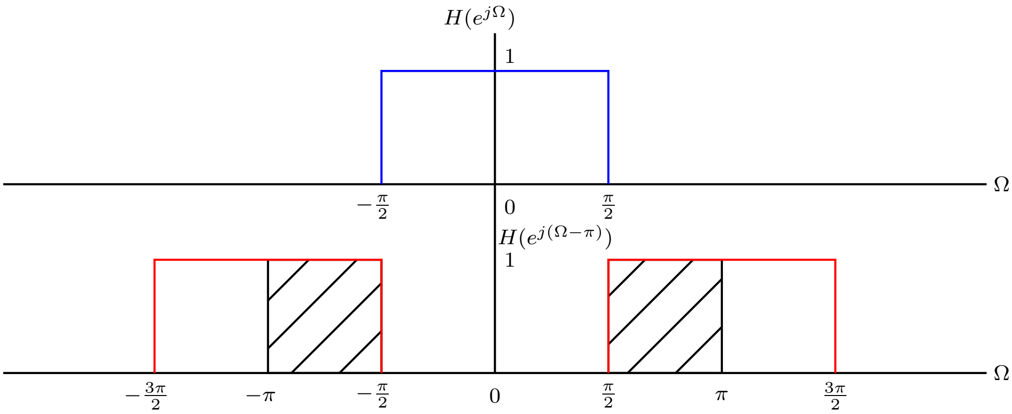
$$H(e^{j(\Omega-\pi)}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} \leq |\Omega| < \pi \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{7.7.85}$$

Επομένως

$$Y(\Omega) = 1 \qquad \Omega \in [-\pi, \pi) \tag{7.7.86}$$

και κατά συνέπεια

$$y[n] = \delta[n]. \tag{7.7.87}$$



Σχήμα 7.7.12: Υπολογισμός $H(e^{j(\Omega-\pi)})$.