Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα
Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου

Η ανάλυση Fourier συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.) μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις ιδιότητες σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση Fourier διακριτού χρόνου (Δ.Χ.). Η διαπραγμάτευση του θέματος αναπτύσσεται παραλλήλως προς τη μελέτη σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Τα εργαλεία που θα μελετήσουμε έχουν τις δικές τους διακριτές ρίζες. Οι μέθοδοι και οι έννοιες Δ.Χ. είναι θεμελιώδεις στην αριθμητική ανάλυση. Όντως αριθμητικές μέθοδοι για παρεμβολή, ολοκλήρωση και διαφόριση σε ακολουθίες αριθμών άρχισαν να μελετώνται από τον Νεύτωνα στα 1600. Η πρόβλεψη της κίνησης ουρανίων σωμάτων δοσμένης μιας σειράς παρατηρήσεων κέντρισε την έρευνα τον 18ο και 19ο αιώνες. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

- Οι μέθοδοι Σ.Χ. απαντούνται στη φυσική, στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.
- Οι μέθοδοι Δ.Χ. απαντούνται στην αριθμητική ανάλυση, στην ανάλυση χρονοσειρών (π.χ. οικονομική πρόβλεψη, ανάλυση δημογραφικών δεδομένων, πρόβλεψη εξέλιξης φυσικών φαινομένων).

Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:

- η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
- η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως

– ψηφιακοί αναλυτές φωνής

– ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.

Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

- είναι κατάλληλος για αποδοτικές ψηφιακές υλοποιήσεις
- ελάττωσε το χρόνο υπολογισμού κατά πολλές τάξεις μεγέθους από $\mathcal{O}(N^2)$ σε $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:

- Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
- Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.

Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:

- Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι **πεπερασμένη**. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
- Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier:
  – το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (Discrete-Time Fourier Transform), FT-DT και
  – το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform), DFT.

  Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. προκύπτει από τη διακριτή σειρά Fourier απειρίζοντας την περίοδο δειγματοληψίας, όπως ακριβώς προέκυψε ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. από τη σειρά Fourier Σ.Χ. Αλλά η διαδικασία αυτή καταλήγει σ' ένα μετασχηματισμό συνεχούς μεταβλητής, πράγμα άβολο όταν επεξεργαζόμαστε ακολουθίες αριθμών. Για να θεραπεύσουμε αυτή τη δυσκολία, κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier που αποτελεί δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σε "συχνότητες" που αντιστοιχούν σε N δείγματα "συχνότητας" τα οποία προκύπτουν από ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος $[0, 2\pi)$. Θυμηθείτε ότι οι "συχνότητες" των σημάτων Δ.Χ. είναι γωνίες. Αν συμβολίσουμε με Ω τη "συχνότητα" Δ.Χ., αυτή αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα ω, τη γνωστή μας κυκλική συχνότητα (που μετριέται σε rad/sec), σύμφωνα με τη σχέση

$$\Omega = \omega\, T \tag{7.1}$$

όπου T είναι η περίοδος δειγματοληψίας. Έχοντας κατά νου την (7.1) μπορούμε να μιλούμε ευρύτερα για συχνότητες Ω χωρίς εισαγωγικά εφεξής. Τα ομοιόμορφα δείγματα συχνότητας δεν είναι παρά οι τιμές

$$\Omega_k = k\,\frac{2\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{7.2}$$

Χωρίς καμιά αυθαιρεσία ισχυριζόμαστε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, DFT,δεν είναι παρά μια **νόθα διακριτή σειρά Fourier.** Αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT είναι οι αλγόριθμοι FFT.

7.1 Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Για να εξάγουμε την αναπαράσταση σειράς Fourier στο Δ.Χ. πρέπει να αναπτύξουμε περιοδικά σήματα Δ.Χ. σαν γραμμικούς συνδυασμούς μιγαδικών εκθετικών Δ.Χ. Θα δείξουμε ότι τα μιγαδικά εκθετικά Δ.Χ. είναι **ιδιοσυναρτήσεις** των Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ.

Υποθέστε ότι ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με κρουστική απόκριση $h[n]$ διεγείρεται από είσοδο

$$x[n] = z^n. \tag{7.3}$$

Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. θα δίνεται από το άθροισμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} y[n] = (x * h)[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k} = z^n \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}\right]}_{H(z)} \\ &= \underbrace{H(z)}_{\text{ιδιοτιμή}}\; z^n \end{aligned} \tag{7.4}$$

όπου $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}$ είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n. Η εξίσωση (7.4) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ' ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.

Θα περιοριστούμε, κατ' αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής

$$z^n = e^{j\Omega n} \tag{7.5}$$

δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα της μορφής (7.5) είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε

- την επέκταση σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων Δ.Χ. (διακριτή σειρά Fourier)
- το μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ως επέκταση της διακριτής σειράς Fourier.

Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιότητων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντιστοίχων εργαλείων Σ.Χ.

7.2 Διακριτή Σειρά Fourier

Ένα σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό όταν

$$\exists N \in \mathbb{Z}^+ : \quad x[n] = x[n+N]. \tag{7.6}$$

Το σήμα $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ είναι περιοδικό σήμα Δ.Χ. με περίοδο N, επειδή

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.7}$$

Τα φανταστικά εκθετικά με περίοδο N δίνονται από τη σχέση

$$\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.8}$$

Τα σήματα αυτά έχουν συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας $\frac{2\pi}{N}$ και επομένως είναι αρμονικές. Ενώ όλα τα σήματα Σ.Χ.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \tag{7.9}$$

είναι διακεκριμένα, υπάρχουν **μόνο** N διαφορετικά σήματα στο σύνολο $\{\phi_k[n] = e^{jk\Omega n}\}$, επειδή τα φανταστικά εκθετικά που διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π είναι ταυτόσημα. Όντως

$$e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n}\, e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n} \tag{7.10}$$

ή

$$\phi_{k+Nr}[n] = e^{j(k+Nr)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi rn} = \phi_k[n]. \tag{7.11}$$

Επομένως το k πρέπει να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N, π.χ. $k = 0, 1, \ldots, N-1$ ή $k = 3, 4, \ldots, N+2$, κ.ο.κ. Έτσι το άθροισμα στην επέκταση σε σειρά Fourier θα πρέπει να περιοριστεί σε N προσθετέους

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, \phi_k[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.12}$$

Η (7.12) ορίζει τη **διακριτή σειρά Fourier,** όπου a_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier.

7.2.1 Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier

Πρόβλημα: Δοθέντος ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. $x[n]$ με περίοδο N να προσδιοριστούν οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier a_k ώστε

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, \phi_k[n], \qquad \phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.13}$$

Το πρόβλημα ισοδυναμεί με εύρεση της λύσης του συνόλου των N γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=<N>} a_k \\ x[1] &= \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi k}{N}} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi k(N-1)}{N}} \end{aligned} \tag{7.14}$$

για διαδοχικές τιμές του n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Το σύστημα των εξισώσεων (7.14) είναι σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους a_k, για $k =< N >$. Μπορεί να δειχθεί ότι οι N εξισώσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (αποδείξτε το), άρα το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση ως προς a_k.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μπορεί να υπολογιστεί μια κλειστή σχέση για τους συντελεστές a_k με όρους των δειγμάτων $x[n]$, ώστε να μη χρειάζεται να καταφεύγουμε σε επίλυση συστήματος εξισώσεων. Προς τούτο βοηθά η ταυτότητα:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{7.15}$$

δηλαδή, το άθροισμα των τιμών ενός φανταστικού εκθετικού σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν, εκτός αν το φανταστικό εκθετικό είναι σταθερά.

Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την (7.15) για $N = 6$ με τη βοήθεια του Σχήματος 7.1. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το άθροισμα όλων των φασικών διανυσμάτων είναι μηδέν εκτός αν $k = 0, 6, 12, \ldots$ Για κάθε n ο γραμμικός συνδυασμός των φασικών διανυσμάτων (ένα από κάθε γράφημα) με τους συντελεστές a_k δίνει το $x[n]$, δηλαδή $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$.

Παρατηρήστε ότι ο λόγος

$$\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+1)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = e^{jk\frac{2\pi}{N}} \tag{7.16}$$

δεν εξαρτάται από το n, οπότε έχουμε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο a δίνεται από την

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a=1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1. \end{cases} \tag{7.17}$$

Για $k = 0, \pm N, \pm 2N \ldots$ έχουμε

$$e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 1 \tag{7.18}$$

ενώ εν γένει

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases} \tag{7.19}$$

Ας πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (7.13) με $e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$ και ας αθροίσουμε για $n =< N >$

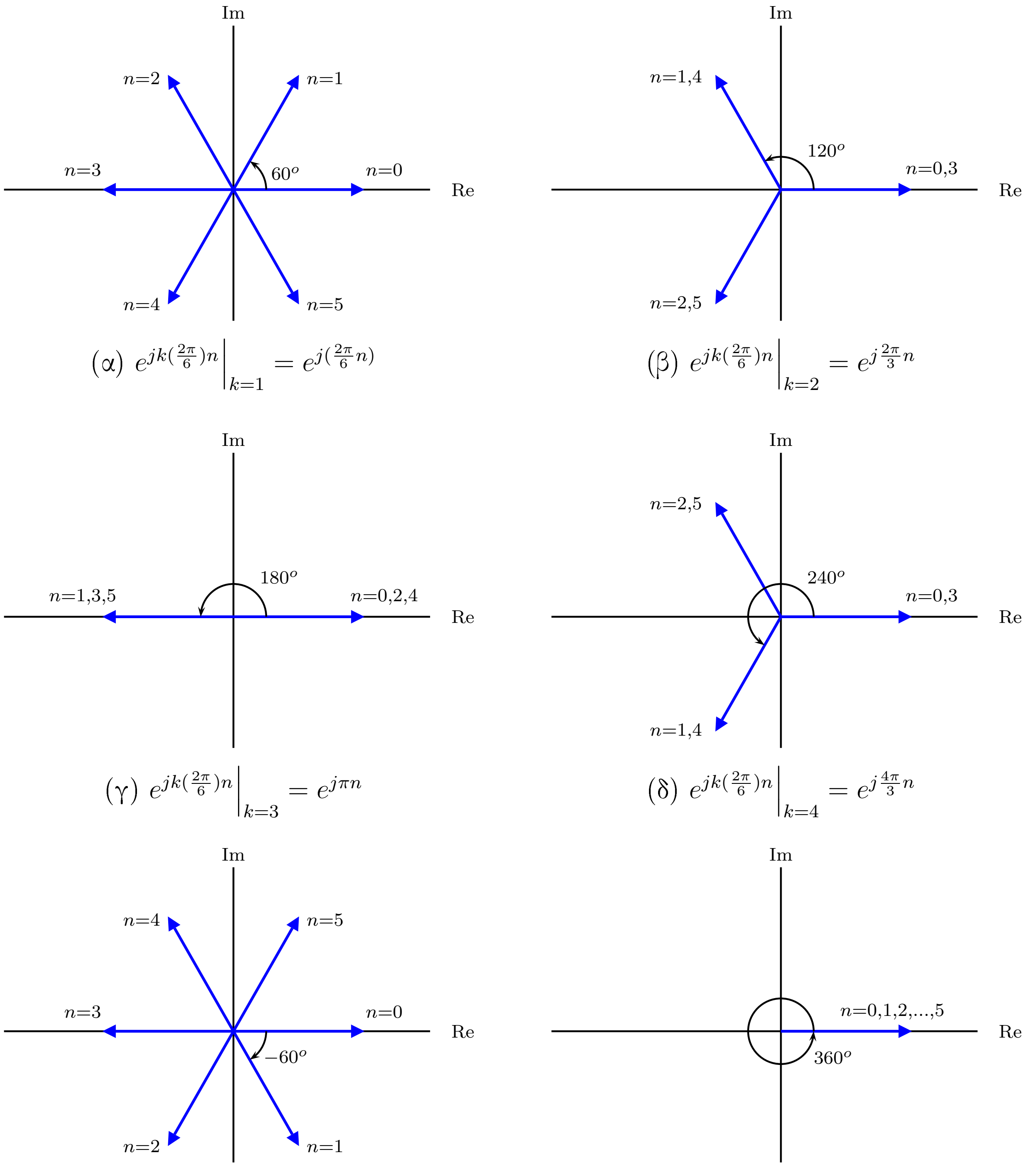
$$\begin{aligned} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} &= \sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \\ \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} &= \begin{cases} N a_r & k - r = \lambda N, \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Διαλέγουμε το k να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N που περιέχει το r. Δηλαδή,

$$\left. \begin{array}{l} 0 \le k - r < N \\ k - r = \lambda N \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0. \tag{7.21}$$

Αλλά $\lambda = 0$ συνεπάγεται $k = r$. Επομένως το δεξί μέρος της (7.20) είναι μη-μηδενικό για $k = r$, ενώ μηδενίζεται για $k \neq r$. Οπότε λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n} \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{7.22}$$



(α) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=1} = e^{j(\frac{2\pi}{6}n)}$

(β) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=2} = e^{j\frac{2\pi}{3}n}$

(γ) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=3} = e^{j\pi n}$

(δ) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=4} = e^{j\frac{4\pi}{3}n}$

(ε) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=5} = e^{j5\frac{2\pi}{6}n}$

(στ) $e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}\Big|_{k=6} = e^{j2\pi n}$

Σχήμα 7.1: Για να υπολογιστεί το δείγμα $x[n]$ αρκεί να σχηματίσουμε το γραμμικό συνδυασμό των φασικών διανυσμάτων $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$ με συντελεστές a_k, για $k =< 6 >= 1, 2, \ldots, 6$.

Συνοψίζουμε ότι η η εξίσωση σύνθεσης της διακριτής σειράς Fourier είναι

$$x[n] \triangleq \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n} \tag{7.23}$$

ενώ η εξίσωση ανάλυσης δίνεται από την

$$a_k \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n} \tag{7.24}$$

όπου a_k είναι οι **φασματικοί συντελεστές** της ακολουθίας $x[n]$.

Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{7.25}$$

Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, ..., N\}$ τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{7.26}$$

οπότε πρέπει και αρκεί

$$a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]. \tag{7.27}$$

Αλλά

$$\phi_0[n] = \phi_N[n] \tag{7.28}$$

οπότε

$$a_0 = a_N \quad \text{και γενικότερα} \;\; a_k = a_{k+N}. \tag{7.29}$$

Δηλαδή, οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται **περιοδικά** με περίοδο N. Συνεπώς

1. Η αναπαράσταση σειράς Fourier Δ.Χ. είναι πεπερασμένη και αποτελείται από N όρους.

2. Η (7.23) ορίζεται ως άθροισμα σε οποιοδήποτε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο N διαδοχικών τιμών του k.

Παράδειγμα 7.1. Έστω

$$x[n] = \sin \Omega_0 n. \tag{7.30}$$

Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι

- ακέραιος
- λόγος ακεραίων

- άρρητος αριθμός.

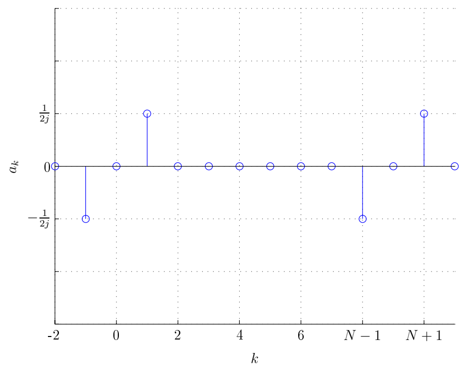
Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις. Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \tag{7.31}$$

το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}) \tag{7.32}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$ οπότε στην περίπτωσή μας οι συντελεστές θα είναι όπως στο Σχήμα 7.2. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.



Σχήμα 7.2: Συντελεστές διακριτής σειράς Fourier του σήματος $x[n] = \sin\frac{2\pi n}{N}$.

Για την περίπτωση που

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N} \tag{7.33}$$

όπου N και m δεν έχουν κοινούς παράγοντες, το σήμα είναι πάλι περιοδικό με περίοδο N, οπότε επεκτείνεται σε σειρά Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{jm\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.34}$$

Άρα $a_m = \frac{1}{2j}$, $a_{-m} = -\frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν. Λ.χ. για $N = 5$ και $m = 3$ έχουμε $a_0 = a_1 = 0$, $a_{5-3} = a_2 = -\frac{1}{2j}$, $a_3 = \frac{1}{2j}$, $a_4 = 0$.

Παράδειγμα 7.2. Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = 1 + \sin\frac{2\pi}{N}n + 3\cos\frac{2\pi}{N}n + \cos(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}). \tag{7.35}$$

Για να υπολογιστεί η διακριτή σειρά Fourier αρκεί να εφαρμοστεί η ταυτότητα του Euler

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + 3\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\frac{2\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\frac{2\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})}\right] \\ &= 1 + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2j})e^{j\frac{2\pi}{N}n} + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2j})e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + j\frac{1}{2}e^{j2\frac{2\pi}{N}n} - j\frac{1}{2}e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Αναγνωρίζουμε ότι

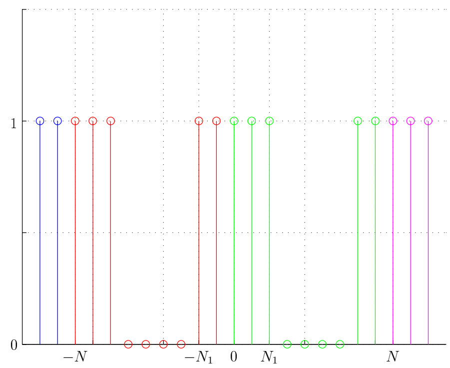
$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 1 & \\ a_1 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} & a_{-1} = a_1^* \\ a_2 = j\frac{1}{2} & a_{-2} = a_2^* \end{array}\right\} \tag{7.37}$$

ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Γενικότερα για κάθε **πραγματική** ακολουθία $x[n]$ ισχύει

$$a_{-k} = a_k^*. \tag{7.38}$$

Η διακριτή σειρά Fourier έχει τις ιδιότητες που παραλληλίζονται προς τις αντίστοιχες ιδιότητες της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου και συνοψίζονται στον Πίνακα 7.1.

Παράδειγμα 7.3. Έστω η περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά Δ.Χ. διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων του Σχήματος 7.3.



Σχήμα 7.3: Περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων και περιόδου N.

Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.39}$$

Πίνακας 7.1: Ιδιότητες της διακριτής σειράς Fourier.

Ιδιότητα	Περιοδικό Σήμα	Συντελεστές σειράς Fourier
$\left.\begin{array}{c} x[n] \\ y[n] \end{array}\right\}$	περιοδικά με περίοδο N και θεμελιώδη συχνότητα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	a_k b_k
Γραμμικότητα	$A\,x[n] + B\,y[n]$	$A\,a_k + B\,b_k$
Χρονική μετατόπιση	$x[n-n_0]$	$a_k\,e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}n_0}$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{j\,M\,\frac{2\pi}{N}\,n}\,x[n]$	a_{k-M}
Συζυγία	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Χρονική αναστροφή	$x[-n]$	a_{-k}
Χρονική κλιμάκωση	$x_{(m)}[n]$	$\frac{1}{m}a_k$ (περιοδικό με περίοδο mN)
Περιοδική συνέλιξη	$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]$	$N\,a_k\,b_k$
Πολλαπλασιασμός	$x[n]\,y[n]$	$\sum_{l=<N>} a_l\,b_{k-l}$
Πρώτη Διαφορά	$x[n]-x[n-1]$	$1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\,a_k$
Τρέχον Άθροισμα	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (πεπερασμένης τιμής και περιοδικό μόνο αν $a_0=0$)	$\left(\dfrac{1}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}\right)a_k$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x[n]\in\mathbb{R}$	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\} \\ \mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Πραγματικά σήματα άρτιας συμμετρίας	$x[n]\in\mathbb{R}$: $x[n]=x[-n]$	a_k πραγματικοί και άρτιας συμμετρίας
Πραγματικά σήματα περιττής συμμετρίας	$x[n]\in\mathbb{R}$: $x[n]=-x[-n]$	a_k καθαρώς φανταστικοί και περιττής συμμετρίας
Αποσύνθεση σε άρτιο και περιττό μέρος πραγματικού σήματος	$\begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n]+x[-n]) \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n]-x[-n]) \end{cases}$	$\mathrm{Re}\{a_k\}$ $j\mathrm{Im}\{a_k\}$

Ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $m = n + N_1$, οπότε αν $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N}\, e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \\
&= \frac{1}{N}\, e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\, \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \\
&= \frac{1}{N}\, e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\, \frac{e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} \left(e^{jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} - e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}}\right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\right)} \\
&= \frac{1}{N} \exp\left\{jk2\pi[\frac{N_1}{N} - \frac{2N_1+1}{2N} + \frac{1}{2N}]\right\} \frac{2j\sin(2\pi k\frac{2N_1+1}{2N})}{2j\sin(2\pi\frac{k}{2N})} \\
&= \frac{1}{N}\, \frac{\sin(2\pi k\frac{2N_1+1}{2N})}{\sin(\frac{2\pi k}{2N})}. \qquad (7.40)
\end{aligned}$$

Αν $k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ τότε

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}. \qquad (7.41)$$

Η έκφραση (7.40) για τους συντελεστές της σειράς Fourier γράφεται πιο συνοπτικά

$$N a_k = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}\,\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad (7.42)$$

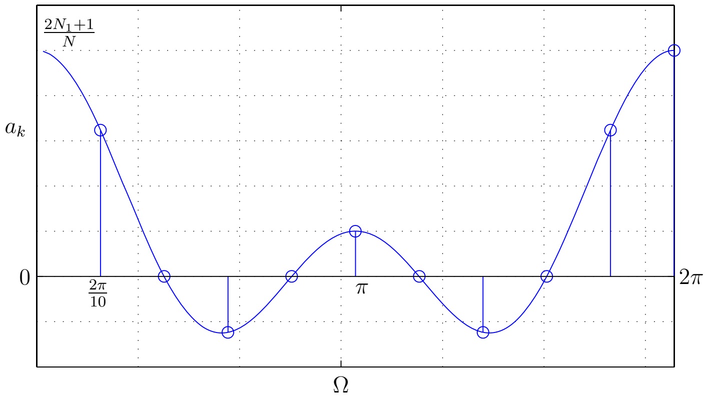
οπότε οι συντελεστές της σειράς Fourier αναγνωρίζονται ως N δείγματα της περιβάλλουσας της συνάρτησης συνεχούς μεταβλητης Ω

$$\frac{1}{N}\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \qquad (7.43)$$

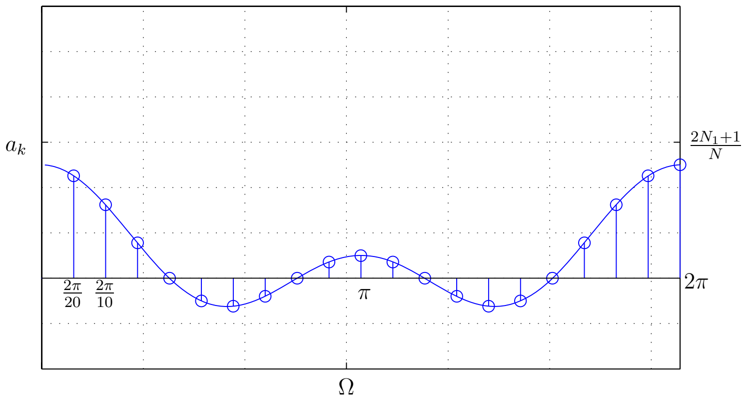
που λαμβάνονται με ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος τιμών $[0, 2\pi)$ της μεταβλητής Ω. Το Σχήμα 7.4 δείχνει παραστατικά τους συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικό τετραγωνικό παλμό 5 μη-μηδενικών δειγμάτων και περιόδου 10. Αν η περίοδος του τετραγωνικού παλμού αυξηθεί σε $N = 20$, τότε θα προκύψει πιό πυκνή δειγματοληψία της περιβάλλουσας (7.43), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.5. Η περιβάλλουσα του Σχήματος 7.5 έχει την ίδια μορφή μ' αυτή του Σχήματος 7.4, αλλά το μισό ύψος εκείνης. Ας συγκρίνουμε τη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου με την αντίστοιχη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού συνεχούς χρόνου. Οι συντελεστές της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου ήταν

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1), \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \qquad (7.44)$$

Παρατηρούμε ότι:



Σχήμα 7.4: Συντελεστές a_k από τη δειγματοληψία της περιβάλλουσας (7.43) για $N = 10$ και $2N_1 + 1 = 5$.



Σχήμα 7.5: Συντελεστές a_k από τη δειγματοληψία της περιβάλλουσας (7.43) για $N = 20$.

- Στη διακριτή σειρά Fourier η συναρτησιακή μορφή της περιβάλλουσας είναι, με την ευρεία έννοια, πάλι τύπου sinc, αλλά με κάπως διαφορετικά ορισμένη τη συνάρτηση $\text{sinc}(x)$ αυτή τη φορά. Η απαίτηση για περιοδική σειρά συντελεστών οδηγεί στην τροποποίηση του ορισμού της συνάρτησης $\text{sinc}(x)$ σε
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \beta x}{\sin x}. \tag{7.45}$$
- Η σειρά Fourier Σ.Χ. εγγυάται τη βέλτιστη ανακατασκευή του περιοδικού σήματος Σ.Χ. αν πάρουμε άπειρους όρους στην επέκταση. Για να μειώσουμε τα λάθη ανακατασκευής, και επομένως να συγκλίνει η σειρά, αρκούσε να παίρνουμε ολοένα και περισσότερους όρους στην επέκταση. Αλλά με την αύξηση του αριθμού των όρων παρατηρούσαμε το φαινόμενο Gibbs στις ασυνέχειες. Η μελέτη της αντίστοιχης περίπτωσης στα σήματα Δ.Χ. καταδεικνύει ότι δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης ούτε φαινόμενο Gibbs.

Πράγματι· για περιοδικό σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με περίοδο N έστω το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.46}$$

για αρκετές τιμές του M.

- Ας θεωρηθεί ότι N είναι περιττός αριθμός, λ.χ. $N = 9$. Τότε μπορεί να δειχτεί ότι για $M = 4$ η ανακατασκευή είναι **τέλεια**. Άρα **δεν** υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης **ούτε** φαινόμενο Gibbs. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η περιοδική ακολουθία Δ.Χ. προσδιορίζεται από πεπερασμένο αριθμό, N παραμέτρων, τις τιμές της ακολουθίας στο διάστημα μιας περιόδου. Η εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier μετασχηματίζει αυτό το σύνολο των N παραμέτρων σε ένα **ισοδύναμο** σύνολο, τις τιμές των N συντελεστών Fourier και η εξίσωση σύνθεσης μας λέει **πώς** να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα διακριτού χρόνου. Επομένως για N περιττό, αν πάρουμε $M = \frac{N-1}{2}$ όρους, τότε το άθροισμα περιέχει ακριβώς N όρους και $\hat{x}[n] = x[n]$.

- Αν N είναι άρτιος, αρκεί να υπολογίσουμε το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ. μέσω της

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.47}$$

  για $M = \frac{N}{2}$, οπότε πάλι $\hat{x}[n] = x[n]$.

Παράδειγμα 7.4. Έστω η ακόλουθη πληροφορία για την ακολουθία $x[n]$:

1. Η $x[n]$ είναι περιοδική με περίοδο $N = 6$.
2. $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$.
3. $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$.
4. Η $x[n]$ έχει την ελάχιστη ισχύ (ενέργεια ανά περίοδο), όταν ικανοποιούνται οι σχέσεις 1-3.

Να προσδιορίσετε την ακολουθία $x[n]$.

Από την ταυτότητα του Parseval η ισχύς της ακολουθίας είναι

$$P = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2. \tag{7.48}$$

Από την πληροφορία 2 έχουμε

$$\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \mid_{N=6,k=0} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{7.49}$$

Από την πληροφορία 3 αντλούμε ότι

$$\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = \sum_{n=0}^{5} (-1)^n x[n]$$

οπότε

$$a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-j3\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n](e^{-j\pi})^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} (-1)^n x[n] = \frac{1}{6}. \tag{7.50}$$

Άρα από τις σχέσεις (7.49) και (7.50) προσδιορίστηκαν οι συντελεστές a_0 και a_3. Η ισχύς καθίσταται ελάχιστη μόνο όταν οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί, δηλαδή $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$. Οπότε

$$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n. \tag{7.51}$$

7.2.2 Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Αν το περιοδικό σήμα Δ.Χ. που διεγείρει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα αναλυθεί σε σειρά Fourier Δ.Χ. τότε

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.52}$$

τότε η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} y[n] = (x*h)[n] &= \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-\xi)} \\ &= \sum_{k=<N>} \Big\{ a_k \underbrace{\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}\xi}}_{H(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = H(\frac{2\pi k}{N})} \Big\} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \, H(\frac{2\pi k}{N}) \, e^{jk\,\frac{2\pi}{N}\,n} \end{aligned} \tag{7.53}$$

όπου

$$H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,\xi} \tag{7.54}$$

είναι η τιμή της **απόκρισης συχνότητας** για $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$. Ως απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. ορίζουμε τη συνάρτηση

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \, e^{-j\Omega n}. \tag{7.55}$$

Επομένως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι επίσης περιοδική με περίοδο αυτήν της διεγέρσεως $x[n]$. Από την (7.53) συνάγεται ότι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier της εξόδου είναι

$$b_k = a_k\, H(\frac{2\pi k}{N}). \tag{7.56}$$

Η έκφραση (7.53) έχει νόημα όταν η απόκριση συχνότητας είναι καλά ορισμένη και φραγμένη. Τέτοιες καλώς συμπεριφερόμενες αποκρίσεις συχνότητας έχουν τα **ευσταθή** συστήματα π.χ. $h[n] = a^n\, u[n]$ με $|a| < 1$. Αν $|a| > 1$, τότε το σύστημα καθίσταται ασταθές και δεν ορίζεται απόκριση συχνότητας.

Παράδειγμα 7.5. Έστω

$$\begin{aligned} h[n] &= a^n\, u[n] \qquad -1 < a < 1 & (7.57)\\ x[n] &= \cos\frac{2\pi n}{N} = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} & (7.58)\end{aligned}$$

τότε

$$H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}. \tag{7.59}$$

Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}H(\frac{2\pi}{N})\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}H(-\frac{2\pi}{N})\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - a\, e^{j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}. & (7.60)\end{aligned}$$

Αν εκφράσουμε τον παράγοντα $\frac{1}{1-a\,e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$ σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$\frac{1}{1 - a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = r\, e^{j\theta} \tag{7.61}$$

τότε προκύπτει ότι

$$y[n] = r\, \cos(\frac{2\pi}{N}n + \theta). \tag{7.62}$$

7.2.3 Φιλτράρισμα

Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρει να μεταβάλλουμε εκουσίως τα σχετικά πλάτη των συχνοτικών συνιστωσών ενός σήματος, δηλαδή τα πλάτη των φασματικών συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier του σήματος, απαλείφοντας κάποιες συχνοτικές συνιστώσες ή ενισχύοντας κάποιες άλλες. Τα Γ.Χ.Α. συστήματα που αλλάζουν τη μορφή του φάσματος ενός σήματος καλούνται Γ.Χ.Α. **φίλτρα**. Στο Δ.Χ., τα Γ.Χ.Α. φίλτρα βρίσκουν ευρείες εφαρμογές. Συνήθως υλοποιούνται με επεξεργαστές γενικού ή ειδικού σκοπού για να επεξεργαστούν σήματα Σ.Χ. που έχουν υποστεί δειγματοληψία (π.χ., ομιλία) ή χρονοσειρές, όπως δημογραφικά δεδομένα, τιμές χρηματιστηριακών δεικτών κ.ο.κ.

Το απλούστερο φίλτρο Δ.Χ. είναι το Γ.Χ.Α. σύστημα που υπολογίζει τον *αριθμητικό μέσο* των N δειγμάτων της εισόδου

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]. \tag{7.63}$$

Δεν είναι δύσκολο να εξάγουμε την κρουστική απόκριση του αριθμητικού μέσου

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k]. \tag{7.64}$$

Η απόκριση συχνότητας του αριθμητικού μέσου μπορεί να δειχθεί ότι είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\, e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}\, \frac{\sin N\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}. \tag{7.65}$$

7.3 Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

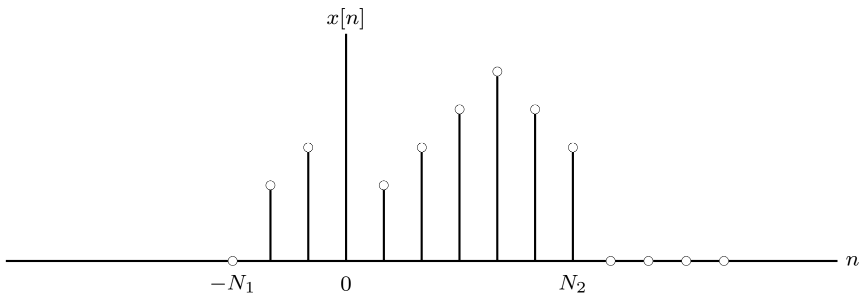
Οι συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικά σήματα είναι δείγματα μιας περιβάλλουσας και καθώς η περίοδος της ακολουθίας αυξάνει, τότε τα δείγματα πυκνώνουν και το διάστημα μεταξύ τους σμικρύνεται. Για τα σήματα Σ.Χ. ο μετασχηματισμός Fourier ενός μη-περιοδικού σήματος $x(t)$ προέκυψε από το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ που έχει ως πρώτη περίοδο το δοσμένο σήμα. Στο όριο καθώς $T \to \infty$ προκύπτει ότι $\tilde{x}(t) \to x(t)$, ενώ η σειρά Fourier Σ.Χ. τείνει στο μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.

Θα ακολουθήσουμε ανάλογη προσέγγιση. Ξεκινούμε από μία μη-περιοδική ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή

$$\exists N_1, N_2 : x[n] = 0, \quad n \notin [-N_1, N_2] \tag{7.66}$$

όπως για το σήμα στο Σχήμα 7.6. Κατασκευάζουμε το σήμα $\tilde{x}[n]$ που έχει ως πρώτη περίοδο το σήμα $x[n]$ και κατάλληλη περίοδο N. Για $N \to \infty$, παρατηρούμε ότι $\tilde{x}[n] \to x[n]$ για κάθε πεπερασμένο n. Αλλά το $\tilde{x}[n]$ ως περιοδικό σήμα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Δ.Χ.:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.67}$$



Σχήμα 7.6: Μη-περιοδικό σήμα Δ.Χ. $x[n]$.

όπου οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.68}$$

Επειδή $\tilde{x}[n] = x[n]$ για $n \in [-N_1, N_2]$ και λόγω της (7.66) η (7.68) ξαναγράφεται ως

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{7.69}$$

Ορίζουμε την περιβάλλουσα

$$X(\Omega) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{7.70}$$

τότε οι συντελεστές a_k δίνονται από τη

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \ \text{ με } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \ \text{ και } k =< N > . \tag{7.71}$$

Επομένως, οι συντελεστές a_k είναι ανάλογοι προς ισαπέχοντα δείγματα της περιβάλλουσας. Αντικαθιστώντας στην (7.67) και κάνοντας χρήση της σχέσης

$$\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \tag{7.72}$$

παίρνουμε

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}\, \Omega_0. \tag{7.73}$$

Όταν $N \to \infty$, τότε

$$\tilde{x}[n] \;\to\; x[n] \quad \text{για } n \in [-N_1, N_2] \tag{7.74}$$

$$\Omega_0 \;\to\; d\Omega \tag{7.75}$$

$$k\Omega_0 \;\to\; \Omega \quad \text{συνεχής μεταβλητή} \tag{7.76}$$

$$\sum_{k=<N>} \;\to\; \int_{2\pi} d\Omega \tag{7.77}$$

και η (7.73) ερμηνεύεται ως αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος στην έκφραση

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{7.78}$$

με χρήση του κανόνα του τραπεζίου. Μένει να σχολιάσουμε γιατί η ολοκλήρωση στην (7.78) πρέπει να εκτείνεται σε διάστημα εύρους 2π. Προφανώς η περιβάλλουσα $X(\Omega)$ ως γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών είναι τριγωνομετρική συνάρτηση, άρα είναι περιοδική με περίοδο 2π. Το γινόμενο $X(\Omega)\, e^{j\Omega n}$ θα είναι επίσης περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Επομένως ορθώς το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους 2π.

Το ζεύγος των εξισώσεων που ορίζει το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. είναι

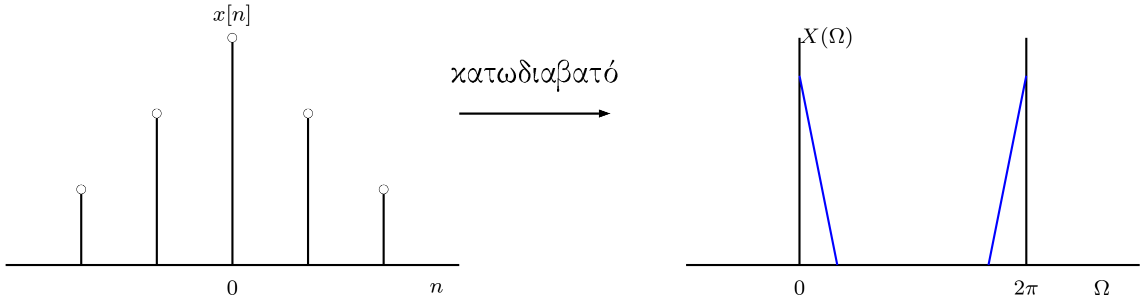
$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{7.79}$$

$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{7.80}$$

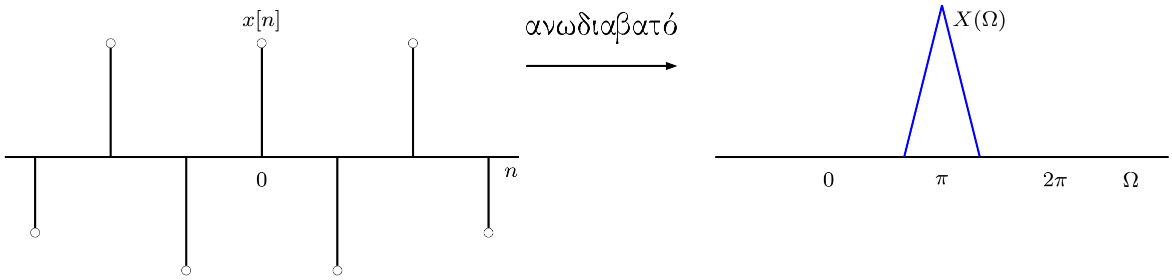
οπότε σημειώνουμε $x[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Συνεπώς τα μη-περιοδικά σήματα μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών που είναι απειροστά κοντά στη συχνότητα και έχουν πλάτη $X(\Omega)\,\frac{d\Omega}{2\pi}$. Η συνάρτηση $X(\Omega)$ λέγεται **φάσμα** του σήματος Δ.Χ. $x[n]$ και μας λέει πώς το σήμα $x[n]$ αποσυντίθεται στις διάφορες συχνότητες Ω. Ο περιορισμός για σήματα περιορισμένης διάρκειας μπορεί να αρθεί και οι εξισώσεις του μετασχηματισμού να ισχύουν. Οι συνθήκες σύγκλισης του αθροίσματος (7.79) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{7.81}$$

Μια ουσιώδης διαφορά με το μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ. είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι **περιοδική** συνάρτηση με περίοδο 2π. Παρατηρήστε ότι είναι συνάρτηση της **συνεχούς** ανεξάρτητης μεταβλητής Ω. Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$, οι χαμηλές συχνότητες στο



Σχήμα 7.7: Εντοπισμός χαμηλών συχνοτήτων στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$.



Σχήμα 7.8: Εντοπισμός υψηλών συχνοτήτων στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$.

μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. εμφανίζονται περί το 0 (Σχήμα 7.7), ενώ οι υψηλές συχνότητες περί το π (Σχήμα 7.8).

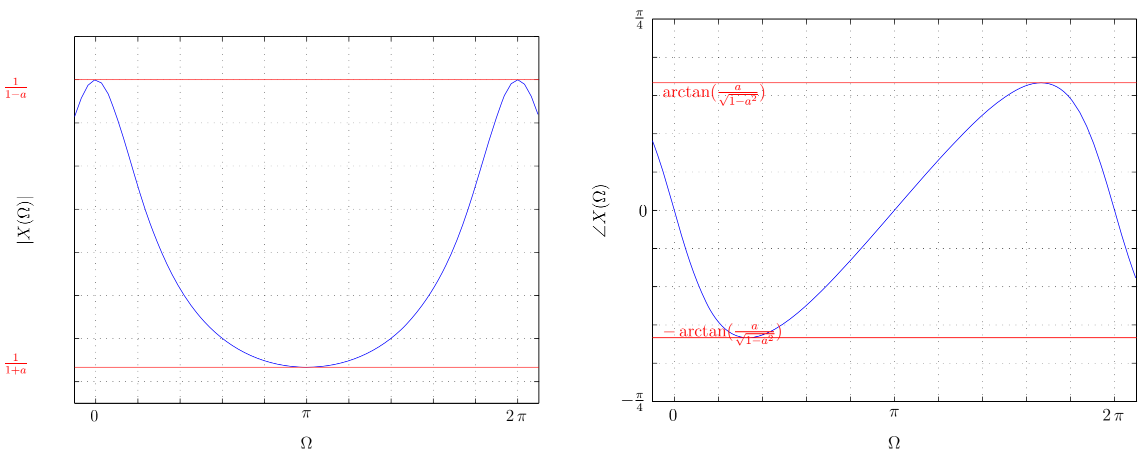
Παράδειγμα 7.6. Για το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^n \, u[n], \quad |a| < 1 \tag{7.82}$$

ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] \, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a \, e^{-j\Omega}}. \tag{7.83}$$

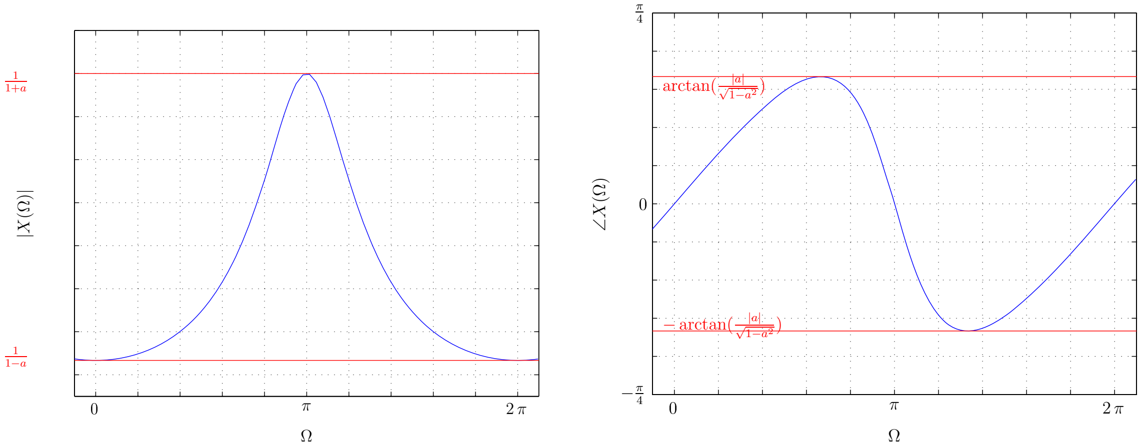
Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.9(α), ενώ η φάση του μετασχηματισμού Fourier παρατίθεται στο Σχήμα 7.9(β) για $0 < a < 1$. Αν $-1 < a < 0$ τότε το



(α) Μέτρο (β) Φάση

Σχήμα 7.9: Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος $x[n] = a^n u[n]$ για $0 < a < 1$.

μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι όπως στο Σχήμα 7.10.



(α) Μέτρο (β) Φάση

Σχήμα 7.10: Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος $x[n] = a^n u[n]$ για $-1 < a < 0$.

Παράδειγμα 7.7. Έστω το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1. \tag{7.84}$$

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}\, e^{-j\Omega n} \\
&\overset{m=-n}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, e^{-j\Omega n} + \sum_{m=+\infty}^{1} a^m\, e^{j\Omega m} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, e^{-j\Omega n} + \sum_{m=1}^{+\infty} a^m\, e^{j\Omega m} \\
&= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \left(\frac{1}{1-ae^{j\Omega}} - 1\right) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega + a^2}.
\end{aligned} \tag{7.85}$$

Παρατηρούμε ότι

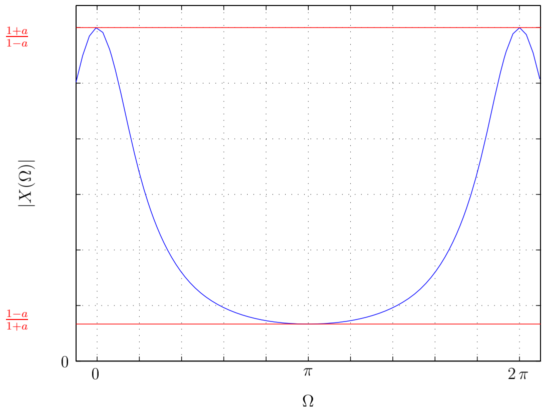
$$\lim_{\Omega\to 0} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} \tag{7.86}$$

$$\lim_{\Omega\to \pi} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1+a)^2} = \frac{1-a}{1+a}. \tag{7.87}$$

Επομένως για $0 < a < 1$ το σήμα $x[n]$ είναι κατωδιαβατό. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. είναι όπως αυτό του Σχήματος 7.11.

Παράδειγμα 7.8. Έστω τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1. \end{cases} \tag{7.88}$$

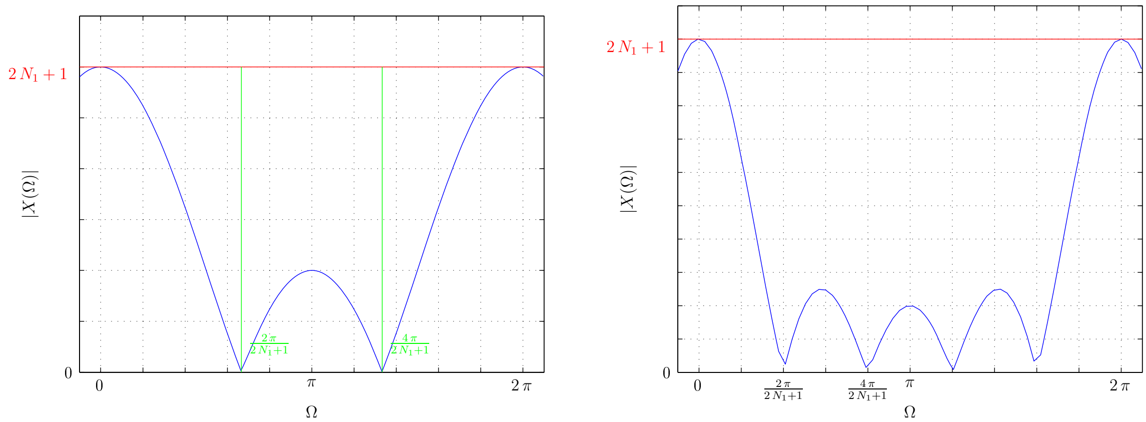


Σχήμα 7.11: Μέτρο μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ του σήματος $x[n] = a^{|n|}$, για $0 < a < 1$.

Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \tag{7.89}$$

που αποτελεί το διακριτό ανάλογο της sinc. Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.12(α) για $N_1 = 1$ και στο Σχήμα 7.12(β) για $N_1 = 2$.



(α) $N_1 = 1$ (β) $N_1 = 2$

Σχήμα 7.12: Μέτρο μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ του τετραγωνικού παλμού διάρκειας $2N_1+1$ δειγμάτων.

Δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης στην εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, γιατί η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα. Παρομοίως δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs.

Παράδειγμα 7.9. Για το σήμα $x[n] = \delta[n]$ ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1. \tag{7.90}$$

Αν ορίσουμε ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \tag{7.91}$$

τότε για $W \to \pi$ παίρνουμε:

$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \to \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]. \tag{7.92}$$

7.4 Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μπορούν να καθιερωθούν σημαντικές σχέσεις μεταξύ της αναπαράστασης σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων και του μετασχηματισμού Fourier μη-περιοδικών σημάτων που αποβλέπουν στην αντιμετώπιση των ακόλουθων ερωτημάτων:

1. **Πώς** η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να αποκτηθεί από το μετασχηματισμό Fourier της πρώτης περιόδου της ακολουθίας;

2. **Πώς** η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να συμπεριληφθεί στο πλαίσιο του μετασχηματισμού Fourier ερμηνεύοντας το μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος σαν τρένο ώσεων στο πεδίο της συχνότητας;

7.4.1 Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της πρώτης περιόδου

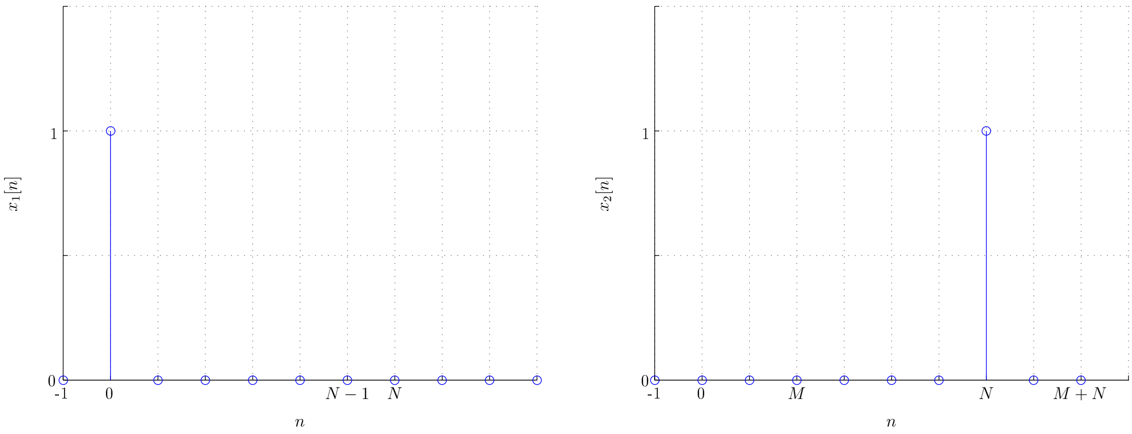
Έστω $\tilde{x}[n]$ περιοδικό σήμα με περίοδο N. Ας θεωρήσουμε ότι το σήμα $x[n]$ αναπαριστά μια περίοδο του $\tilde{x}[n]$. Τότε για αυθαίρετο M

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{αν } M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{7.93}$$

Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier του $\tilde{x}[n]$ είναι

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\, X(\frac{2\pi k}{N}) \tag{7.94}$$

όπου $x[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$ εξαρτάται από την επιλογή του M στη (7.93), ενώ τα δείγματά του, $X(\frac{2\pi k}{N})$, δεν εξαρτώνται από το M. Τούτο φαίνεται στο Παράδειγμα 7.10.



(α) $x_1[n]$ (β) $x_2[n]$

Σχήμα 7.13: Σήματα $x_1[n]$ για N=6 και $x_2[n]$ για N=6 και M=2 στο Παράδειγμα 7.10.

Παράδειγμα 7.10. Έστω ένα περιοδικό τρένο ώσεων Δ.Χ. με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]. \tag{7.95}$$

Τότε

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=M}^{M+N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \stackrel{n=0}{=} \frac{1}{N}. \end{aligned} \tag{7.96}$$

Αν επιλεχθεί $M=0$, τότε το σήμα της πρώτης περιόδου έχει μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$x_1[n] = \delta[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) = 1 \tag{7.97}$$

ενώ αν $0 < M < N$ παίρνουμε

$$x_2[n] = \delta[n-N] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N}. \tag{7.98}$$

Στα δείγματα συχνότητας $\Omega = 2\pi k/N$ έχουμε:

$$X_1(\frac{2\pi k}{N}) = 1 \tag{7.99}$$

$$X_2(\frac{2\pi k}{N}) = e^{-j\frac{2\pi k}{N}N} = 1 \tag{7.100}$$

δηλαδή οι δυο μετασχηματισμοί παίρνουν τις ίδιες τιμές στα δείγματα συχνότητας ανεξαρτήτως της επιλογής του M.

7.4.2 Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων

Φανταστικά εκθετικά

Έστω $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$. Στο Σ.Χ. έχουμε

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0). \tag{7.101}$$

Στο Δ.Χ. περιμένουμε ανάλογο αποτέλεσμα, αλλά επειδή

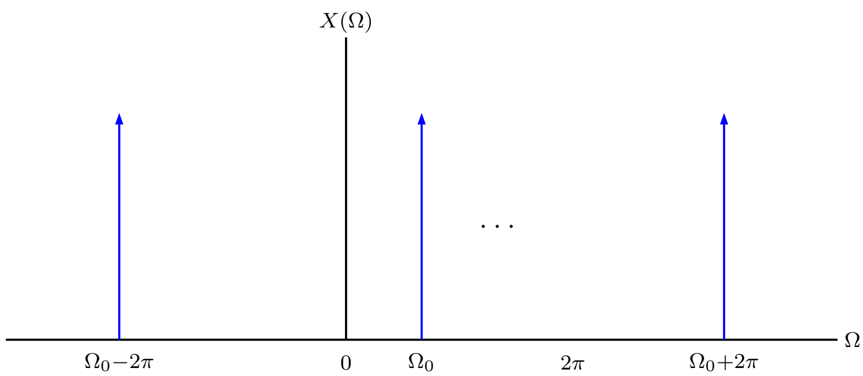
$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0+2\pi r)n}, \quad \forall r \in \mathbb{Z} \tag{7.102}$$

προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell). \tag{7.103}$$

Το Σχήμα 7.14 δείχνει το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. ενός φανταστικού εκθετικού. Θα επαληθεύσουμε την ορθότητα της (7.103). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)e^{j\Omega n}\,d\Omega \\
&= \int_{2\pi}\Big[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{j(\Omega_0+2\pi\,\ell)n}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\Big]\,d\Omega \\
&= e^{j\Omega_0 n}\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi}\delta(\Omega-\Omega_0)\,d\Omega}_{1} + \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{+\infty}\underbrace{\int_0^{2\pi}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\,d\Omega}_{0}\Big] \\
&= e^{j\Omega_0 n}.
\end{aligned} \tag{7.104}$$



Σχήμα 7.14: Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του φανταστικού εκθετικού $e^{j\Omega_0 n}$.

Αυθαίρετο περιοδικό σήμα

Γενικότερα ένα περιοδικό σήμα μπορεί να αναλυθεί ως

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \cdots + b_M e^{j\Omega_M n} \tag{7.105}$$

οπότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του περιοδικού σήματος $x[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= b_1 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi\ell) + b_2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi\ell) + \cdots + \\ & + b_M \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi\ell). \end{aligned} \tag{7.106}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Ο $X(\Omega)$ είναι ένα περιοδικό τρένο παλμών με πρώτη περίοδο που συγκροτείται από κρουστικούς παλμούς στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$.
- Ο $X(\Omega)$ δεν προκύπτει από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού (θυμηθείτε ότι τα περιοδικά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα), αλλά είναι **απόδοση** μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ως συνέπεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.
- Ο $X(\Omega)$ είναι έγκυρος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ακόμα και αν Ω_0 δεν είναι της μορφής $\frac{2\pi m}{N}$.
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. (7.105) είναι έγκυρος μόνο όταν $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$.

Έστω

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.107}$$

περιοδικό σήμα με περίοδο N. Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. αρκεί να εκτελέσουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Επέλεξε $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
2. Θέσε $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \frac{2\pi}{N}$, $\Omega_3 = 2(\frac{2\pi}{N})$,..., $\Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N}$ στην (7.106)
3. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}). \tag{7.108}$$

Παράδειγμα 7.11. Έστω

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \tag{7.109}$$

τότε

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{7.110}$$

επειδή $a_k = \frac{1}{N}$. Παρατηρούμε ότι ενώ δύο διαδοχικοί παλμοί στο χρόνο απέχουν N δείγματα, στη συχνότητα απέχουν $\frac{2\pi}{N}$.

7.4.3 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας

Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω γεγονός που τον καθιστά δύσχρηστο στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για να θεραπεύσουμε αυτή την εγγενή αδυναμία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ορίζουμε εκ κατασκευής το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) DFT για σήματα πεπερασμένης διάρκειας ως εξής:

α. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.

β. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε

$$\tilde{x}[n] = x[n] \qquad 0 \leq n \leq N-1. \tag{7.111}$$

γ. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.112}$$

οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{7.113}$$

Το ζεύγος των εξισώσεων (7.112) και (7.113) συγκροτεί το **διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT)**.

Οι γρήγοροι μετασχηματισμοί Fourier (FFT) είναι αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT. Ο DFT κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Εξαρτάται από την επιλογή του N. Θα μελετηθεί σε βάθος στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων.

7.5 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Υπάρχουν πολλές ομοιότητες και αρκετές διαφορές με την περίπτωση συνεχούς χρόνου. Όταν η εξαγωγή και η ερμηνεία μιας ιδιότητας είναι ταυτόσημη με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, παραθέτουμε απλώς την ιδιότητα.

Επιπροσθέτως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. διατηρεί στενή σχέση με τη διακριτή σειρά Fourier. Πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού ανάγονται στις ιδιότητες της σειράς Fourier.

Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \quad \text{αντί} \quad x[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega). \end{aligned} \tag{7.114}$$

7.5.1 Περιοδικότητα

Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ είναι **περιοδική συνάρτηση** ως προς Ω με περίοδο 2π. Τούτο **δεν** ισχύει στον μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.

7.5.2 Γραμμικότητα

$$\left.\begin{aligned} x_1[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) \\ x_2[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow a\, x_1[n] + b\, x_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a\, X_1(\Omega) + b\, X_2(\Omega) \tag{7.115}$$

7.5.3 Μιγαδική συζυγία

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Leftrightarrow x^*[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-\Omega) \tag{7.116}$$

Απόδειξη

Ξεκινώντας από τον ορισμό

$$\mathcal{F}\Big\{x^*[n]\Big\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, e^{-j\Omega n} = \Bigg\{ \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j\Omega n}}_{X(-\Omega)} \Bigg\}^* = X^*(-\Omega).$$

7.5.4 Χρονική αναστροφή

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Leftrightarrow x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega). \tag{7.117}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big\{x[-n]\Big\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{-j\Omega n} \overset{n=-m}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{j\Omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega). \end{aligned}$$

7.5.5 Ιδιότητες συμμετρίας

Αν $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}. \end{cases} \tag{7.118}$$

Ισχύει επίσης ότι $|X(\Omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς Ω, ενώ $\angle X(\Omega)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς Ω και

$$x_e[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} \tag{7.119}$$

$$x_o[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}. \tag{7.120}$$

Απόδειξη

Επειδή $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία έπεται

$$x[n] = x^*[n] \overset{(7.116)}{\Rightarrow} X(\Omega) = X^*(-\Omega). \tag{7.121}$$

Αν $X(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$ αναλύοντας την (7.121) παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} - j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \tag{7.122}$$

οπότε προκύπτει η σχέση (7.118).

Χρησιμοποιώντας τις (7.117) και (7.118) ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της άρτιας συνιστώσας του $x[n]$, $x_e[n]$, προκύπτει ως

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{F}\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}\Big[X(\Omega)+X(-\Omega)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} + \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}\Big] \\ &\overset{(7.118)}{=} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{7.123}$$

Ομοίως αποδεικνύεται η (7.120).

7.5.6 Χρονική μετατόπιση και μετατόπιση συχνότητας

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Rightarrow x[n-n_0] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) && (7.124)\\ e^{j\Omega_0 n} x[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega-\Omega_0). && (7.125) \end{aligned}$$

7.5.7 Διαφόριση και Άθροιση

Για το σήμα της πρώτης διαφοράς $x[n]-x[n-1]$ προκύπτει με εφαρμογή της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης ότι

$$x[n]-x[n-1] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (1-e^{-j\Omega})\, X(\Omega). \tag{7.126}$$

Έστω $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. Παρατηρούμε ότι

$$y[n]-y[n-1]=x[n] \Rightarrow Y(\Omega)-e^{-j\Omega}\, Y(\Omega)=X(\Omega) \Rightarrow Y(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega). \tag{7.127}$$

Η (7.127) **δεν** είναι ακριβής, γιατί δεν εγγυάται την περιοδικότητα του $Y(\Omega)$. Πρέπει να προστεθεί ένας όρος που αντικατροπτίζει τη μέση τιμή που προκύπτει από το άθροισμα, όπως στην περίπτωση συνεχούς χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega).$$

Η ακριβής σχέση είναι

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k). \tag{7.128}$$

Παράδειγμα 7.12. Αν εφαρμόσουμε την (7.128) για το σήμα $u[n]$ παίρνουμε

$$u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k). \tag{7.129}$$

Επειδή ως γνωστό

$$x[n]=\delta[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)=1 \tag{7.130}$$

θα επαληθεύσουμε ότι όντως καταλήγουμε στην (7.130) αν ξεκινήσουμε από την (7.129) και εφαρμόσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. Πράγματι

$$\begin{aligned} x[n] = \delta[n] &= u[n] - u[n-1] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \\ X(\Omega) &= \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \\ & -\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} - \pi e^{-j\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \Rightarrow \\ X(\Omega) &= 1 + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi k} \delta(\Omega - 2\pi k) = 1. \end{aligned} \tag{7.131}$$

7.5.8 Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Έστω

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega). \tag{7.132}$$

Αν $y[n] = x[-n]$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής $Y(\Omega) = X(-\Omega)$. Ενώ στο συνεχή χρόνο ισχύει

$$x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a}) \tag{7.133}$$

στις ακολουθίες δεν ορίζονται δείγματα $x[an]$ αν $a < 1$, δηλαδή, για μη-ακέραιες τιμές του a. Λ.χ. το σήμα $x[2n]$ υπονοεί ότι παίρνουμε υπόψη κάθε δεύτερο δείγμα του $x[n]$, δηλαδή τα άρτια δείγματα του $x[n]$. Έστω k θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε το σήμα

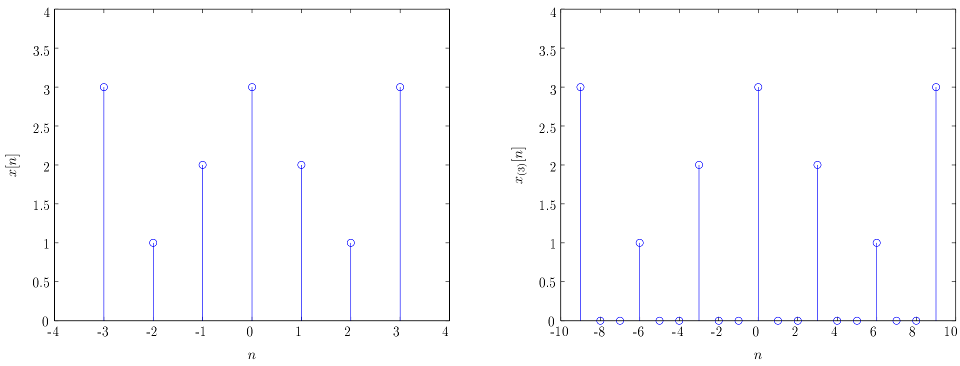
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{αν } n \bmod k = 0 \\ 0, & \text{αν } n \bmod k \neq 0 \end{cases} \tag{7.134}$$

όπου $n \bmod k = 0$ υποδηλοί ότι το n είναι πολλαπλάσιο του k, ενώ $n \bmod k \neq 0$ υποδηλοί ότι το n δεν είναι πολλαπλάσιο του k. Έστω $k = 3$ και $x[n]$ αυτό του Σχήματος 7.15(α). Το σήμα $x_{(3)}[n]$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.15(β). Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x_{(k)}[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]\, e^{-j\Omega n} \stackrel{n=rk}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]\, e^{-j\Omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\, e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega). \end{aligned} \tag{7.135}$$

Άρα

$$x_{(k)}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega). \tag{7.136}$$

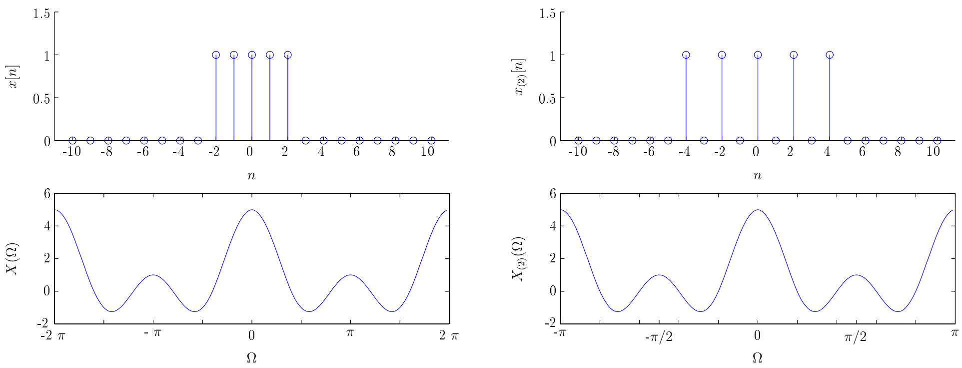


(α) (β)

Σχήμα 7.15: (α) Σήμα $x[n]$ (β) Σήμα $x_{(3)}[n]$.

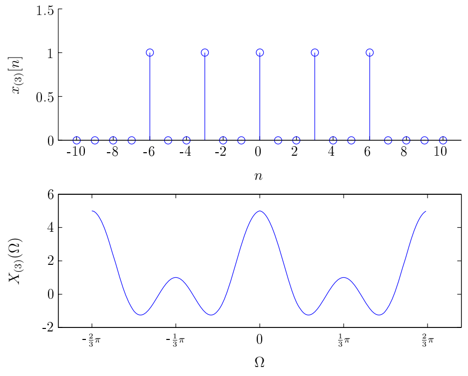
Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη σχέση μεταξύ διάρκειας στο χρόνο και εύρους στη συχνότητα ισχύει και πάλι. Αν απλώνει ένα σήμα και "επιβραδύνεται στο χρόνο", τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. συμπιέζεται. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ $X(k\Omega)$ είναι περιοδικό σήμα ως προς Ω με περίοδο $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

Τα Σχήματα 7.16 και 7.17 δείχνουν παραστατικά τα ζεύγη $x_{(2)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_{(2)}(k\Omega)$ και $x_{(3)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_{(3)}(k\Omega)$ για ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας πέντε δειγμάτων.



(α) (β)

Σχήμα 7.16: Ζεύγη: (α) $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$ και (β) $x_{(2)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_{(2)}(\Omega)$.



Σχήμα 7.17: Ζεύγος $x_{(3)}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_{(3)}(\Omega)$.

7.5.9 Διαφόριση στη συχνότητα

Αν $x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, jn\, e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{-jnx[n]\}. \tag{7.137}$$

Οπότε προκύπτει

$$nx[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}. \tag{7.138}$$

7.5.10 Ταυτότητα του Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega. \tag{7.139}$$

Το αριστερό μέρος της σχέσης (7.139) είναι η ενέργεια του σήματος $x[n]$. Η συνάρτηση $|X(\Omega)|^2$ καλείται **πυκνότητα φάσματος ενέργειας**. Για περιοδικά σήματα μας ενδιαφέρει η ισχύς (ενέργεια σε μια περίοδο). Τότε χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2. \tag{7.140}$$

7.5.11 Ιδιότητα της συνέλιξης

Εάν $y[n] = (x * h)[n]$, τότε

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{7.141}$$

όπου $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ και $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$.

Παράδειγμα 7.13. Έστω $h[n] = \delta[n - n_0]$, τότε

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}. \tag{7.142}$$

Αν $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε

$$y[n] = (x * h)[n] = x(n - n_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0}\, X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n - n_0]\}. \tag{7.143}$$

Παράδειγμα 7.14. Έστω

$$h[n] \;=\; a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(\Omega) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}} \tag{7.144}$$

$$x[n] \;=\; b^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{7.145}$$

τότε για $y[n] = (h * x)[n]$ παίρνουμε

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-\Omega})(1 - b\, e^{-j\Omega})}. \tag{7.146}$$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $a \neq b$, τότε

  $$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - a\, e^{-\Omega}} + \frac{B}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{7.147}$$

  όπου $A = \frac{a}{a - b}$ και $B = \frac{-b}{a - b}$. Άρα

  $$y[n] = \frac{a}{a - b}\, a^n\, u[n] - \frac{b}{a - b}\, b^n\, u[n] = \frac{1}{a - b}\Big[a^{n+1}\, u[n] - b^{n+1}\, u[n]\Big]. \tag{7.148}$$

- Αν $a = b$, τότε

  $$Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-j\Omega})^2} = \frac{j}{a} e^{j\Omega}\, \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}\right). \tag{7.149}$$

  Γνωρίζουμε ότι

  $$a^n\, u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - a\, e^{-\Omega}}. \tag{7.150}$$

  Οπότε από την ιδιότητα διαφόρισης στη συχνότητα

  $$n a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}\right) \tag{7.151}$$

  και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει

  $$(n + 1)\, \frac{1}{a}\, a^{n+1}\, u[n + 1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{1}{a}\, e^{j\Omega}\, \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}\right). \tag{7.152}$$

Άρα ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$y[n] = (n+1)a^n u[n] \tag{7.153}$$

διότι για $n = -1 \Leftrightarrow n+1 = 0$, μολονότι $u[n+1] \neq 0$.

Η απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ., $H(\Omega)$, παίζει τον ίδιο ρόλο με εκείνη του συστήματος Σ.Χ. Αξίζει να σημειωθεί ότι **δεν** έχει απόκριση συχνότητας οποιοδήποτε Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = 2^n u[n]$ δεν έχει απόκριση συχνότητας. Ένα σύστημα είναι **ευσταθές** φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου αν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{7.154}$$

γεγονός που εγγυάται σύγκλιση του $\mathcal{F}\{h[n]\}$. Επομένως τα ευσταθή Γ.Χ.Α. συστήματα Δ.Χ. έχουν καλώς ορισμένη $H(\Omega)$.

7.5.12 Περιοδική Συνέλιξη

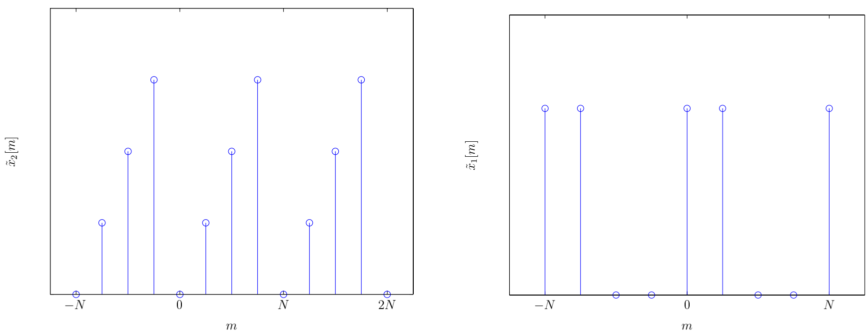
Για περιοδικές ακολουθίες το άθροισμα της συνέλιξης δεν συγκλίνει. Έτσι ορίζεται ένας νέος τελεστής η **περιοδική συνέλιξη** δύο ακολουθιών που είναι περιοδικές με κοινή περίοδο N

$$\tilde{y}[n] = (\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2)[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m]. \tag{7.155}$$

Παραστατικά έστω τα σήματα του Σχήματος 7.18. Το χρονικώς αντεστραμμένο σήμα $\tilde{x}_2[-m]$ και τα χρονικώς αντεστραμμένα και μετατοπισμένα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.19. Παρατηρούμε ότι τα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ προκύπτουν από **κυκλικές μετατοπίσεις** δειγμάτων της πρώτης περιόδου του σήματος $\tilde{x}_2[-m]$. Ισχύει $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$, επειδή πρόκειται για περιοδική ακολουθία με περίοδο N. Για την περιοδική συνέλιξη ισχύει ανάλογη ιδιότητα, όπως και για την μη-περιοδική, δηλαδή, αν $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, και $\{c_k\}$ είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier των $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ και $\tilde{y}[n]$ αντιστοίχως, τότε

$$c_k = N\, a_k\, b_k. \tag{7.156}$$

Η πιο σημαντική χρήση της ιδιότητας αυτής για τους συντελεστές της σειράς Fourier είναι η εφαρμογή της μαζί με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) στον υπολογισμό της



(α) $\tilde{x}_2[m]$ (β) $\tilde{x}_1[m]$

Σχήμα 7.18: Περιοδικά σήματα $\tilde{x}_2[m]$ και $\tilde{x}_1[m]$.

μη-περιοδικής (δηλαδή, γραμμικής) συνέλιξης δυο ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας. Έστω

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0 \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ x_2[n] &= 0 \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{7.157}$$

Έστω $y[n]$ η μη-περιοδική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$. Τότε:

$$y[n] = (x_1 * x_2)[n] = 0 \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1. \tag{7.158}$$

Αν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο $N \geq N_1 + N_2 - 1$, κατασκευάσουμε δυο σήματα με περίοδο N ως εξής

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= x_1[n] \quad 0 \leq n < N \\ \tilde{x}_2[n] &= x_2[n] \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \tag{7.159}$$

και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

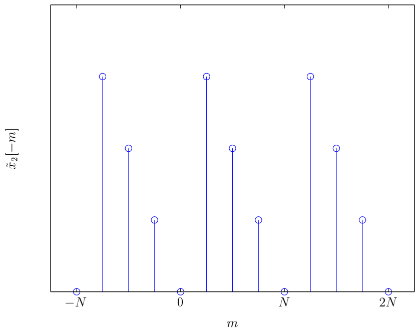
$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m] \tag{7.160}$$

τότε

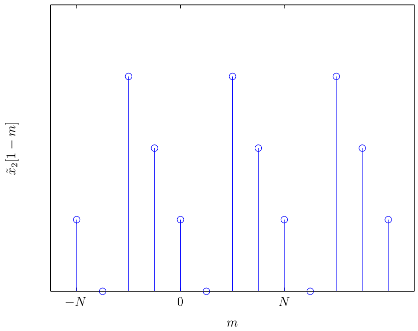
$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N - 1. \tag{7.161}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής **αλγόριθμο** υπολογισμού της μη-περιοδικής (γραμμικής) συνέλιξης.

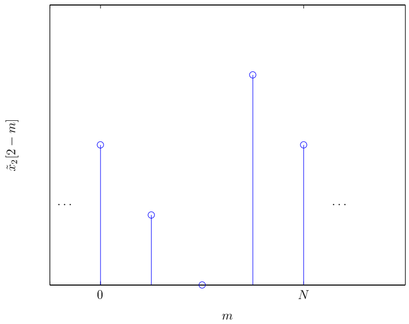
- Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά για να κατασκευάσουμε τις περιοδικές ακολουθίες $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.



(α) $\tilde{x}_2[-m]$



(β) $\tilde{x}_2[1-m]$



(γ) $\tilde{x}_2[2-m]$

Σχήμα 7.19: Το χρονικώς ανεστραμμένο σήμα $\tilde{x}_2[-m]$ και κυκλικές μετατοπίσεις των δειγμάτων της πρώτης περιόδου του.

- Για $N \geq N_1 + N_2 - 1$ η μη-περιοδική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισούται με την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$. Οπότε αρκεί:

  1. Υπολογισμός των DFTs $\tilde{X}_1[k]$ και $\tilde{X}_2[k]$ των $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

  2. Πολλαπλασιασμός των DFTs για τον υπολογισμό του DFT της $y[n]$

  $$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\,\tilde{X}_2[k]. \tag{7.162}$$

  3. Υπολογισμός του αντίστροφου DFT της $\tilde{Y}[k]$. Το αποτέλεσμα είναι η επιθυμητή συνέλιξη $y[n]$.

7.5.13 Ιδιότητα της διαμόρφωσης

Έστω $y[n] = x_1[n]x_2[n]$. Αν $x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$ και $x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος $y[n]$ δίνεται από την

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, x_2[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, e^{j\theta n}\, d\theta \right\} e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, e^{-j(\Omega-\theta)n} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta. \qquad (7.163) \end{aligned}$$

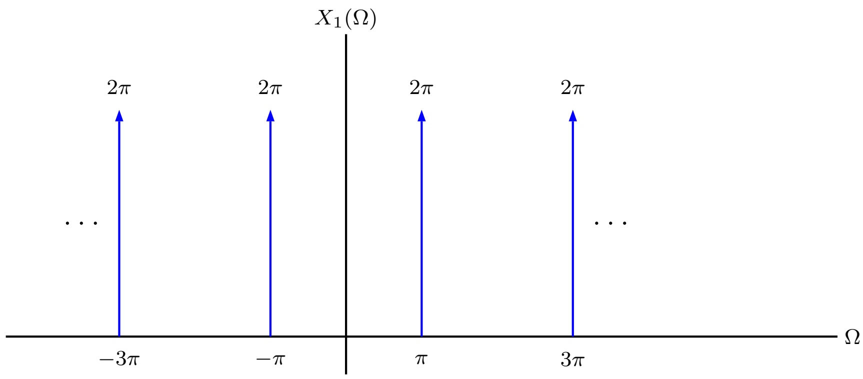
Παράδειγμα 7.15. Έστω

$$x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n. \qquad (7.164)$$

Τότε

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - (2r+1)\pi). \qquad (7.165)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $X_1(\Omega)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.20. Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$



Σχήμα 7.20: Μετασχηματισμός Fourier $X_1(\Omega)$.

έχουμε

$$X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta) = 2\pi\, X_2(\Omega-\theta)\, \delta(\theta-\pi) = 2\pi X_2(\Omega-\pi)\, \delta(\theta-\pi) \qquad (7.166)$$

οπότε

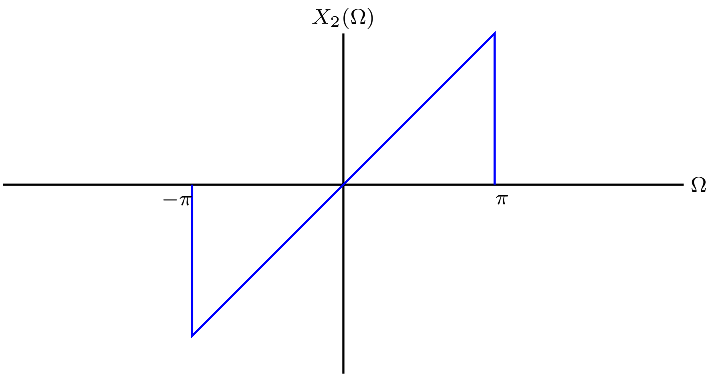
$$Y(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\pi)\, \delta(\theta-\pi)\, d\theta = X_2(\Omega-\pi). \qquad (7.167)$$

Πολλαπλασιασμός επί $(-1)^n$ έχει ως αποτέλεσμα την **εναλλαγή** χαμηλών και υψηλών φασματικών περιοχών στο φάσμα της ακολουθίας εισόδου. Πράγματι αν $X_2(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του Σχήματος 7.21, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $Y(\Omega)$ έχει τη μορφή του Σχήματος 7.22.

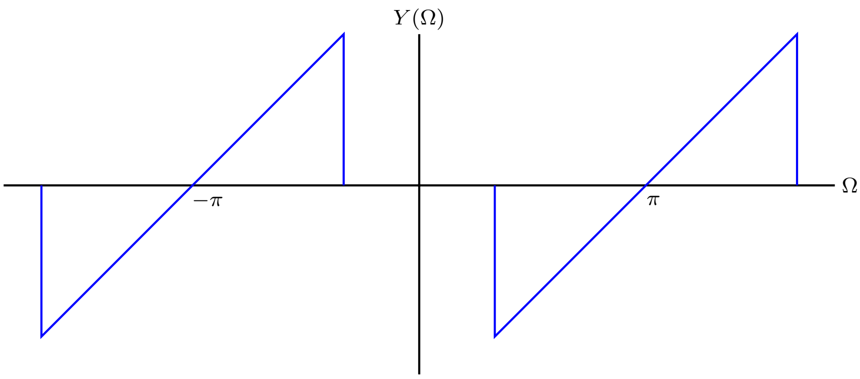
Ο Πίνακας 7.2 συνοψίζει τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ.

Πίνακας 7.2: Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ.

Ιδιότητα	Μη-περιοδικό Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x[n]$	$X(\Omega) = X(e^{j\Omega})$
	$y[n]$	$Y(\Omega) = Y(e^{j\Omega})$
Γραμμικότητα	$A\,x[n] + B\,y[n]$	$A\,X(e^{j\Omega}) + B\,Y(e^{j\Omega})$
Χρονική μετατόπιση	$x[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}\,X(e^{j\Omega})$
Μετατόπιση συχνότητας	$e^{j\,\Omega_0\,n}\,x[n]$	$X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$
Συζυγία	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\Omega})$
Χρονική αναστροφή	$x[-n]$	$X(e^{-j\Omega})$
Διαστολή στο χρόνο	$x_{(k)}[n]$	$X(e^{jk\Omega})$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\Omega})\,Y(e^{j\Omega})$
Πολλαπλασιασμός	$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\Omega-\theta)})d\theta$
Πρώτη διαφορά	$x[n] - x[n-1]$	$(1-e^{-j\Omega})Q(e^{j\Omega})$
Συσσώρευση	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}\,X(e^{j\Omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
Διαφόριση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\,\dfrac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x[n] \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega}) \\ \mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\Omega})\} \\ \mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\Omega})\} \\ \lvert X(e^{j\Omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\Omega})\rvert \\ \angle X(e^{j\Omega}) = -\angle X(e^{-j\Omega}) \end{cases}$
Πραγματικά σήματα άρτιας συμμετρίας	$x[n] \in \mathbb{R}$: $x[n] = x[-n]$	$X(e^{j\Omega})$ πραγματική και άρτιας συμμετρίας
Πραγματικά σήματα περιττής συμμετρίας	$x[n] \in \mathbb{R}$: $x[n] = -x[-n]$	$X(e^{j\Omega})$ καθαρώς φανταστική και περιττής συμμετρίας
Αποσύνθεση σε άρτιο και περιττό μέρος πραγματικού σήματος	$\begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}$ $j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\}$
Ταυτότητα Parseval για μη-περιοδικά σήματα		
$\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\Omega})\rvert^2\,d\Omega$		



Σχήμα 7.21: Μετασχηματισμός Fourier $X_2(\Omega)$.



Σχήμα 7.22: Μετασχηματισμός Fourier $Y(\Omega)$.

7.6 Δυαδικές Ιδιότητες

7.6.1 Διακριτή σειρά Fourier

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συμμετρία μεταξύ της εξίσωσης ανάλυσης και της εξίσωσης σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. Ωστόσο υπάρχει τέτοια συμμετρία στον ορισμό της διακριτής σειράς Fourier. Πράγματι, έστω μια ταυτότητα μεταξύ δύο περιοδικών ακολουθιών $f[m]$ και $g[m]$ της ίδιας περιόδου N

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=<N>} g[r]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}m}. \tag{7.168}$$

Αν αντικαταστήσουμε $k = m$ και $r = n$ τότε

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} g[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.169}$$

οπότε συνάγουμε ότι οι περιοδικές ακολουθίες $g[n]$ και $f[k]$ αποτελούν ένα ζεύγος διακριτής σειράς Fourier

$$g[n] \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} f[k]. \tag{7.170}$$

Αν θέσουμε στην (7.168) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{7.171}$$

οπότε

$$f[n] \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]. \tag{7.172}$$

Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

- Οι συντελεστές σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος $x[n]$, a_k, είναι περιοδική ακολουθία.
- Ως περιοδική ακολουθία μπορούν να επεκταθούν σε σειρά Fourier.
- Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής ακολουθίας a_k πρέπει να είναι οι τιμές $\frac{1}{N}x[-n]$, ανάλογες των αρχικών τιμών του σήματος, αλλά ανεστραμμένες στο χρόνο.

Πρακτικές συνέπειες της δυαδικής ιδιότητας είναι τα ζεύγη των ιδιοτήτων:

$$x[n-n_0] \quad \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad a_k\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} \tag{7.173}$$

$$e^{jM\frac{2\pi}{N}n}\, x[n] \quad \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad a_{k-M} \tag{7.174}$$

και

$$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \quad \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad N\, a_k\, b_k \tag{7.175}$$

$$x[n]y[n] \quad \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{\ell=<N>} a_\ell\, b_{k-\ell} \tag{7.176}$$

Έστω $x[n] \stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Η απόδειξη της (7.174) έχει ως εξής.

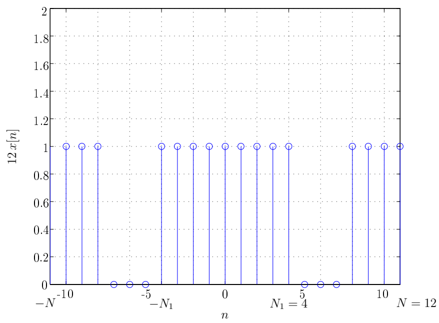
$$\begin{aligned}
a_k \quad &\stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{N}x[-n] \quad \text{δυαδική ιδιότητα} \\
a_{k-M} \quad &\stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{N}x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{ιδιότητα της μετατόπισης} \\
Na_{k-M} \quad &\stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{γραμμικότητα} \\
x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad &\stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad a_{(-k)-M} \quad \text{δυαδική ιδιότητα} \\
x[n]\, e^{jM\frac{2\pi}{N}n} \quad &\stackrel{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \quad a_{k-M} \quad \text{χρονική αναστροφή}
\end{aligned} \tag{7.177}$$

Γίνεται φανερό ότι αξιοποιώντας τη δυαδική ιδιότητα επιτυγχάνεται ελάττωση των υπολογισμών και διπλή αξιοποίηση του πίνακα των ιδιοτήτων της διακριτής σειράς Fourier.

Παράδειγμα 7.16. Έστω

$$x[n] = \frac{1}{N} \frac{\sin[(\frac{2\pi n}{N})(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{2\pi n}{2N})}. \tag{7.178}$$

Αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για την ακολουθία των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourierμιας περιοδικής τετραγωνικής παλμοσειράς διάρκειας $2N_1 + 1$ και περιόδου N. Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier της $x[n]$ θα είναι $\frac{1}{N}$ επί τα δείγματα της τετραγωνικής παλμοσειράς ανεστραμμένα στο χρόνο. Λόγω συμμετρίας δεν επέρχεται καμιά μεταβολή.



Σχήμα 7.23: Συντελεστές σειράς Fourier της ακολουθίας $x[n]$ που ορίζεται στην (7.178) για $N = 12$ και $N_1 = 4$.

7.6.2 Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ.

Υπάρχει επίσης δυαδικότητα μεταξύ μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. και της σειράς Fourier Σ.Χ., όπως προκύπτει από την αντιπαραβολή των εξισώσεων ορισμού των.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega & \qquad x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \\ X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} & a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \end{aligned}$$

Έστω $f(u)$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής με περίοδο 2π και μη-περιοδική ακολουθία $g[m]$ που σχετίζεται με την $f(u)$ δια της σχέσεως

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m]\, e^{-jum}. \tag{7.179}$$

Αν $u = \Omega$ και $m = n$, τότε $f(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της $g[n]$

$$g[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} f(\Omega) \tag{7.180}$$

οπότε

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u)\, e^{jum}\, du. \tag{7.181}$$

Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε η (7.179) ξαναγράφεται ως

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{7.182}$$

Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$

$$f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k] \tag{7.183}$$

Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

- Το $x[n]$ είναι σήμα διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$.
- Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π, άρα επεκτάσιμη σε σειρά Fourier Σ.Χ. με $\omega_0 = 1$.
- Οι συντελεστές Fourier Σ.Χ. της $X(\Omega)$ θα είναι η αρχική ακολουθία ανεστραμμένη στο χρόνο.

Πρακτική συνέπεια της δυαδικής ιδιότητας είναι τα ζεύγη των ιδιοτήτων για την περιοδική συνέλιξη στη σειρά Fourier Σ.Χ. και της διαμόρφωσης στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$\int_{2\pi} x_1(r)\, x_2(t-r)\, dr \quad \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi a_k b_k \tag{7.184}$$

$$a[n]b[n] \quad \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta. \tag{7.185}$$

Παράδειγμα 7.17. (α) Έστω περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο 2π και συντελεστές σειράς Fourier Σ.Χ.

$$a_k = \begin{cases} 1 & |k| \le N_1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{7.186}$$

Το σήμα διακριτού χρόνου a_k είναι ένας μη-περιοδικός τετραγωνικός παλμός. Από τον μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του τετραγωνικού παλμού συνάγουμε ότι το αρχικό σήμα δεν είναι άλλο από το

$$x(t) = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)} \tag{7.187}$$

συνεπεία της δυαδικότητας.

(β) Αν τώρα έχουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$ που ορίζεται στο διάστημα $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ως

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \tag{7.188}$$

τότε ο $X(\Omega)$ θα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Σ.Χ. ως περιοδικός τετραγωνικός παλμός Σ.Χ. Οι συντελεστές της σειράς Fourier θα δίνονται από την

$$\left.\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\right|_{\substack{T_1=W \\ \omega_0=1}} = \frac{\sin(kW)}{k\pi}. \tag{7.189}$$

Άρα ως αποτέλεσμα της δυαδικότητας το σήμα $x[n]$ που έχει το δοσμένο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (7.188) είναι

$$x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wn) \tag{7.190}$$

όπου $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Ο Πίνακας 7.3 συνοψίζει τις δυαδικές ιδιότητες.

Πίνακας 7.3: Δυαδικές ιδιότητες.

Εργαλείο	Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
Σειρά Fourier	$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής (1)	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$ μη-περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής (2)
Μετασχηματισμός Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ μη-περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής (3)	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-j\omega t} \, dt$ μη-περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής (4)

Συνεχής Χρόνος

Εργαλείο	Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
Σειρά Fourier	$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής (5)	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$ περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής (6)
Μετασχηματισμός Fourier	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \, e^{j\Omega n} \, d\Omega$ μη-περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής (7)	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, e^{-j\Omega n}$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής (8)

Διακριτός χρόνος

Ζεύγη δυαδικών ιδιοτήτων
(3) $\longleftrightarrow$ (4)
(5) $\longleftrightarrow$ (6)
(7) $\longleftrightarrow$ (2)
(1) $\longleftrightarrow$ (8)