



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σήματα-Συστήματα

Μετασχηματισμός Z - Άλυτα προβλήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Τμήμα Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Κεφάλαιο 8

Μετασχηματισμός \mathcal{Z}

8.8 Άλυτα προβλήματα

1. Έστω

$$y[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n].$$

Να προσδιορίσετε δύο ξεχωριστά σήματα τέτοια ώστε το καθένα να έχει μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $X(z)$, που να ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $\frac{X(z) + X(-z)}{2} = Y(z^2)$.

2. $X(z)$ έχει ένα μόνο πόλο και μόνο ένα μηδενικό στο z -επίπεδο.

(Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 2003)

2. Θεωρήστε τον ορθογώνιο παλμό

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Έστω $g[n] = x[n] - x[n - 1]$.

(α) Να βρείτε το σήμα $g[n]$ και να υπολογίσετε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} του $g[n]$.

(β) Αξιοποιώντας τη σχέση

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^n g[k]$$

να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} του σήματος $x[n]$ με τη χρήση των ιδιοτήτων. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2002)

3. Ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n - 1] + y[n - 2] + x[n - 2].$$

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συστήματος $H(z) = Y(z)/X(z)$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$ και να καθορίσετε την περιοχή σύγκλισης.

(β) Να βρείτε την κρουστική απόκριση (ή απόκριση μοναδιαίου δείγματος) του συστήματος.

(γ) Είναι το σύστημα ευσταθές ή ασταθές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2001)

4. Θεωρήστε ένα σήμα $y[n]$ το οποίο σχετίζεται με δύο σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$ δια της σχέσης

$$y[n] = x_1[n + 3] * x_2[-n + 1]$$

όπου

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{και} \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού \mathcal{Z} για να βρείτε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $Y(z)$, του σήματος $y[n]$. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2002)

5. (α) Θεωρήστε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $x[n]$ που έχει μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $X(z)$, ρητή συνάρτηση. Με τη χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού \mathcal{Z} να δείξετε ότι:

$$X(z) = X^*(z^*).$$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποδεικτέο του ερωτήματος (α) να δείξετε ότι αν υφίσταται πόλος (μηδενικό) του $X(z)$ για $z = z_0$, τότε πρέπει να υπάρχει πόλος (μηδενικό) του $X(z)$ για $z = z_0^*$.

(γ) Έστω μια ακολουθία άρτιας συμμετρίας $y[n]$ με μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $Y(z)$. Με τη χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού \mathcal{Z} να δείξετε ότι:

$$Y(z) = Y\left(\frac{1}{z}\right).$$

(δ) Χρησιμοποιώντας το αποδεικτέο του ερωτήματος (γ) να δείξετε ότι αν υφίσταται πόλος (μηδενικό) του $Y(z)$ για $z = z_0$, τότε πρέπει να υπάρχει πόλος (μηδενικό) του $Y(z)$ για $z = \frac{1}{z_0}$.

(ε) Χρησιμοποιώντας τα πορίσματα των ερωτημάτων (β) και (δ) να δείξετε ότι εάν μια πραγματική ακολουθία άρτιας συμμετρίας $h[n]$ έχει πόλο (μηδενικό) του μετασχηματισμού \mathcal{Z} , $H(z)$, για $z = \rho \exp(j\theta)$, τότε υπάρχουν απαραίτητως πόλοι (μηδενικά) του $H(z)$ και για τις ακόλουθες τιμές του z :

$$z = \rho \exp(-j\theta), \quad z = \frac{1}{\rho} \exp(j\theta), \quad z = \frac{1}{\rho} \exp(-j\theta).$$

(Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2002)

6. Έστω Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. \mathcal{S} με κρουστική απόκριση $h[n]$ και μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $H(z)$.

Για το σύστημα γνωρίζουμε ότι:

1. Η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική ακολουθία.
2. Η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς.
3. Ισχύει $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$.
4. Η συνάρτηση συστήματος $H(z)$ έχει δύο μηδενικά.
5. Η συνάρτηση συστήματος έχει έναν από τους πόλους της σε μη-πραγματική θέση επί του κύκλου $|z| = 3/4$.

Είναι το σύστημα αιτιατό; Είναι το σύστημα ευσταθές; (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 1999)

7. Έστω $x[n]$ ένα σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός \mathcal{Z} , $X(z)$, έχει ένα πόλο στο $z = 1/2$.

Δίνεται ότι:

1. Το σήμα $x_1[n] = (1/4)^n x[n]$ είναι απολύτως αθροίσιμο, ενώ
2. Το σήμα $x_2[n] = (1/8)^n x[n]$ δεν είναι απολύτως αθροίσιμο.

Να προσδιορίσετε αν η ακολουθία $x[n]$ είναι αριστερής πλευράς, δεξιάς πλευράς ή αμφίπλευρη.

(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 1999)

8. (α) Να δείξετε ότι $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$, αν $x[n]$ είναι μηδέν για $n < 0$. Ποιά είναι η αντίστοιχη σχέση αν η ακολουθία είναι μηδέν για $n > 0$.

(β) Θεωρήστε την ακολουθία $x[n]$ της οποίας ο μετασχηματισμός \mathcal{Z} είναι

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}.$$

Είναι γνωστό επίσης ότι η περιοχή σύγκλισης συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στο ερώτημα (α) να προσδιορίσετε την τιμή της ακολουθίας $x[0]$. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2000)

9. Η είσοδος σ' ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι:

$$x[n] = u[-n - 1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Ο μετασχηματισμός Z της εξόδου του συστήματος αυτού είναι:

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) (1 + z^{-1})}.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση συστήματος. Ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης συστήματος;

(β) Ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης του $Y(z)$;

(γ) Να προσδιορίσετε την έξοδο $y[n]$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1999)

10. Για ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n]$ γνωρίζουμε τα εξής:

1. Αν $x[n] = (-2)^n \forall n$, τότε $y[n] = 0 \forall n$.

2. Αν $x[n] = (1/2)^n u[n]$, τότε η έξοδος $y[n]$ δίνεται από τη σχέση

$$y[n] = \delta[n] + \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

όπου α είναι μια σταθερά.

(α) Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς α .

(β) Να προσδιορίσετε την απόκριση $y[n]$ σε είσοδο $x[n] = 1 \forall n$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1999)

11. (α) Να δείξετε ότι $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$, αν $x[n]$ είναι μηδέν για $n < 0$. Ποιά είναι η αντίστοιχη σχέση όταν η ακολουθία $x[n]$ είναι μηδέν για $n > 0$;

(β) Θεωρήστε την ακολουθία $x[n]$ της οποίας ο μετασχηματισμός Z είναι

$$X(z) = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - 3 z^{-1}}.$$

Είναι γνωστό επίσης ότι η περιοχή σύγκλισης συμπεριλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στο ερώτημα (α) να προσδιορίσετε την τιμή της ακολουθίας $x[0]$. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010)

12. (α) Να βρείτε τη συνάρτηση συστήματος για ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = 0.7y(n-1) + x(n).$$

Να προσδιορίσετε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης συστήματος.

(β) Τί είδους ακολουθία (δηλαδή αριστερής πλευράς, δεξιάς πλευράς ή αμφίπλευρη) πρέπει να είναι η κρουστική απόκριση, ώστε το σύστημα να διαθέτει μετασχηματισμό Fourier; Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας και να σχεδιαστεί χονδρικά το μέτρο της απόκρισης συχνότητας. (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 2010)

13. Η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. $y[n]$ σχετίζεται με την είσοδο $x[n]$ μέσω της εξίσωσης

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]).$$

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συστήματος, να προσδιορίσετε τους πόλους και τα μηδενικά της και να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

(β) Ποιό είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος;

(γ) Να σχεδιάσετε ένα σκαρίφημα του μέτρου της απόκρισης συχνότητας και να προσδιορίσετε τη συχνοτική συμπεριφορά του συστήματος. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010)

14. Έστω

$$y[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n u[n].$$

Να προσδιορίσετε δύο ξεχωριστά σήματα τέτοια ώστε το καθένα να έχει μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $X(z)$, που να ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $\frac{X(z) + X(-z)}{2} = Y(z^2).$

2. $X(z)$ έχει ένα μόνο πόλο και μόνο ένα μηδενικό στο z - επίπεδο.

(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2010)

15. Θεωρήστε το τριγωνικό σήμα:

$$g[n] = \begin{cases} n-1 & \text{αν } 2 \leq n \leq 7 \\ 13-n & \text{αν } 8 \leq n \leq 12 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Έστω επίσης το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Να προσδιορίσετε την τιμή του n_0 που είναι τέτοια ώστε:

$$g[n] = x[n] * x[n - n_0].$$

(β) Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $X(z)$, του σήματος $x[n]$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού \mathcal{Z} για τη μετατόπιση και τη συνέλιξη καθώς και το μετασχηματισμό $X(z)$ να προσδιορίσετε τον $G(z)$. Να επαληθεύσετε ότι η απάντησή σας ικανοποιεί το θεώρημα της αρχικής τιμής. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2006)

16. Θεωρήστε ένα σήμα $y[n]$ το οποίο σχετίζεται με δύο σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$ δια της σχέσης

$$y[n] = x_1[-n+3] * x_2[n+5]$$

όπου

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad \text{και} \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού \mathcal{Z} για να βρείτε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} , $Y(z)$, του σήματος $y[n]$ και να προσδιορίσετε την περιοχή σύγκλισής του. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2007)

17. Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό \mathcal{Z} των ακόλουθων μετασχηματισμών

$$\begin{aligned} X(z) &= \log\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right), \quad |z| > |a| \\ X(z) &= \log\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right), \quad |z| < |a|. \end{aligned}$$

18. Η βηματική απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. χρόνου βρέθηκε ότι είναι $2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

(α) Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(β) Να βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν αυτό τροφοδοτείται με το σήμα $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

19. Ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συστήματος.

(β) Να βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(γ) Να βρείτε τη βηματική απόκριση του συστήματος.

20. Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. περιγράφεται από το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}q[n] &= x[n] + \frac{k}{2}q[n-1] \\y[n] &= q[n] + \frac{k}{3}q[n-1]\end{aligned}$$

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συστήματος.

(β) Να προσδιορίσετε για ποιές τιμές του k το σύστημα είναι ευσταθές.

(γ) Να σχεδιάσετε ένα block διάγραμμα του συστήματος.