



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

**Σήματα-Συστήματα**  
**Δειγματοληψία -Λυμένες ασκήσεις**

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος  
Τμήμα Πληροφορικής

## Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Κεφάλαιο 9

## Δειγματοληψία

### 9.5 Λυμένες ασκήσεις

**9.5.1.** Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  πραγματικής τιμής είναι γνωστό ότι προσδιορίζεται πλήρως από τα δείγματά του, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 10000 \pi$ . Για ποιές τιμές του  $\omega$  είναι εγγυημένο ότι  $X(j\omega) = 0$ ;

**Λύση:**

Από την θεωρία είναι γνωστό ότι εάν  $X(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ , τότε το σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματά του. Άρα  $X(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > 5000 \pi$ .

**9.5.2.** Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου,  $x(t)$ , στην έξοδο ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c = 1000 \pi$ . Εάν το τρένο των παλμών δειγματοληψίας εφαρμοστεί στο  $x(t)$ , ποιές από τις ακόλουθες περιόδους δειγματοληψίας θα εγγυώνταν ότι το  $x(t)$  μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας κατάλληλο κατωδιαβατό φίλτρο;

(α)  $T = 0.5 \times 10^{-3}$

(β)  $T = 2 \times 10^{-3}$

(γ)  $T = 10^{-4}$ .

**Λύση:**

Το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο περιορίζει την ανώτερη συχνότητα του σήματος σε  $\omega_c$ , δηλαδή  $\omega_M = \omega_c$ . Από το Θεώρημα δειγματοληψίας, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι εκείνη

του Nyquist , δηλαδή

$$\omega_s = 2 \omega_M = 2 \times 10^3 \pi \iff \frac{2\pi}{T_s} = 2 \times 10^3 \pi \iff T_s = 10^{-3} \text{ sec.} \quad (9.5.1)$$

Άρα  $T < T_s$ , οπότε αποδεκτές είναι οι επιλογές (α) και (γ).

**9.5.3.** Να προσδιορίσετε τη συχνότητα Nyquist για τα ακόλουθα σήματα

$$(\alpha) \quad x(t) = 1 + \cos 2000\pi t + \sin 4000\pi t$$

$$(\beta) \quad x(t) = \frac{\sin(4000 \pi t)}{\pi t}$$

$$(\gamma) \quad x(t) = \left( \frac{\sin(4000 \pi t)}{\pi t} \right)^2.$$

**Λύση:**

(α) Παρατηρούμε ότι η ανώτερη (κυκλική) συχνότητα του σήματος είναι  $4000\pi$ . Επομένως  $\omega_s = 2 \times 4000 \pi = 8000\pi$  ή  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 4000$  Hz.

(β) Από τις ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου είναι γνωστό ότι

$$x(t) = \frac{\sin(4000 \pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4000\pi \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (9.5.2)$$

Επομένως  $\omega_s = 2 \times 4000 \pi = 8000\pi$  ή  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 4000$  Hz.

(γ) Ας συμβολίσουμε με  $y(t) = \frac{\sin(4000 \pi t)}{\pi t}$ . Τότε,  $x(t) = y^2(t)$ . Επομένως,  $X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(Y * Y)(j\omega)$ . Αλλά από την (9.5.2),  $Y(j\omega)$  είναι ορθογώνιος παλμός εύρους ζώνης  $4000 \pi$ , οπότε η συνέλιξη δύο ορθογωνίων παλμών θα είναι τρίγωνο με διπλάσιο εύρος ζώνης, οπότε η ανώτερη συχνότητα του  $X(j\omega)$  θα είναι  $8000 \pi$  και κατά συνέπεια η συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι

$$2 \pi f_s = 2 \times 8000 \pi \iff f_s = 8000 \text{ Hz.} \quad (9.5.3)$$

**9.5.4.** Έστω σήμα  $x(t)$  με ρυθμό Nyquist  $\omega_0$ . Να προσδιορίσετε το ρυθμό Nyquist για καθένα από τα ακόλουθα σήματα

$$(\alpha) \quad y(t) = x(t) + x(t - 1)$$

$$(\beta) \quad y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(\gamma) \quad y(t) = x^2(t)$$

$$(\delta) \quad y(t) = x(t) \cos \omega_0 t.$$

**Λύση:**

(α) Από την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier,  $Y(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega} X(j\omega)$ . Εφόσον  $X(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \frac{\omega_0}{2}$ , τότε και  $Y(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \frac{\omega_0}{2}$ . Άρα, η συχνότητα Nyquist θα είναι  $\omega_0$ .

(β) Από την ιδιότητα της διαφορίσης του μετασχηματισμού Fourier,  $Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$  και  $X(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \frac{\omega_0}{2}$ . Επομένως,  $Y(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \frac{\omega_0}{2}$ , οπότε η συχνότητα Nyquist θα είναι  $\omega_0$ .

(γ) Από την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier,  $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * X)(j\omega)$ . Άρα, το εύρος ζώνης του  $Y(j\omega)$  θα είναι  $2 \times \frac{\omega_0}{2} = \omega_0$ , οπότε η συχνότητα Nyquist θα είναι  $2 \times \omega_0$ .

(δ) Από την ιδιότητα της διαμόρφωσης, έχουμε

$$x(t) \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))]. \quad (9.5.4)$$

Η ανώτερη συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος θα είναι  $\omega_M = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} = \frac{3}{2} \omega_0$ . Άρα η συχνότητα Nyquist θα είναι  $\omega_N = 3 \omega_0$ .

**9.5.5.** Ποιά συχνότητα δειγματοληψίας θα επιλέγατε για το σήμα  $x(t) = 3 \cos(4\pi t) - 6 \sin(10\pi t)$ ;

**Λύση:**

Παρατηρούμε ότι η ανώτερη συχνότητα του σήματος είναι  $\omega_M = 10\pi$ . Άρα  $\omega_s \geq 2 \omega_M = 2 \times 10 \pi$  ή  $f_s \geq 10 \text{ Hz}$ . Μια εύλογη επιλογή είναι  $f_s \approx 30 \text{ Hz}$ .

**9.5.6.** Έστω σήμα  $x(t)$  με συχνότητα Nyquist  $\omega_0$  και  $y(t) = x(t) p(t - 1)$ , όπου

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad T < \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (9.5.5)$$

Να προσδιορίσετε τις συνθήκες για το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας ενός φίλτρου που δίνει το  $x(t)$  ως έξοδο, όταν είσοδος είναι το σήμα  $y(t)$ .

**Λύση:**

Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier του σήματος  $p(t)$ . Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για τα περιοδικά σήματα προκύπτει

$$p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \quad (9.5.6)$$

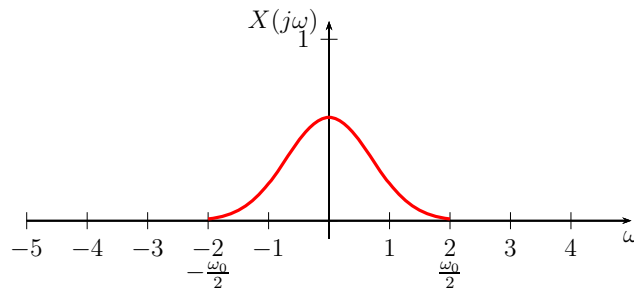
οπότε

$$\begin{aligned} p(t-1) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\frac{2\pi k}{T}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}). \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

Από την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο πεδίο του χρόνου προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) = x(t)p(t-1) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left\{ \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\frac{2\pi k}{T}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \right\} \\ Y(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\frac{2\pi k}{T}) X(j(\omega - \frac{2\pi k}{T})). \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

Έστω φάσμα  $X(j\omega)$  που σχεδιάζεται στο Σχήμα 9.5.1. Είναι φανερό ότι η ανώτερη συχνότητα του σήματος είναι  $\frac{\omega_0}{2}$ .



Σχήμα 9.5.1: Φάσμα  $X(j\omega)$ .

Το φάσμα  $Y(j\omega)$  θα είναι περιοδική επανάληψη του φάσματος του  $X(j\omega)$  με ανάτυπα να εμφανίζονται κεντραρισμένα στις συχνότητες  $k\frac{2\pi}{T}$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.5.2. Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα δειγματοληψίας

$$\omega_s \geq 2 \frac{\omega_0}{2} \iff T \leq \frac{2\pi}{\omega_0} \iff \frac{1}{T} \geq \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (9.5.9)$$

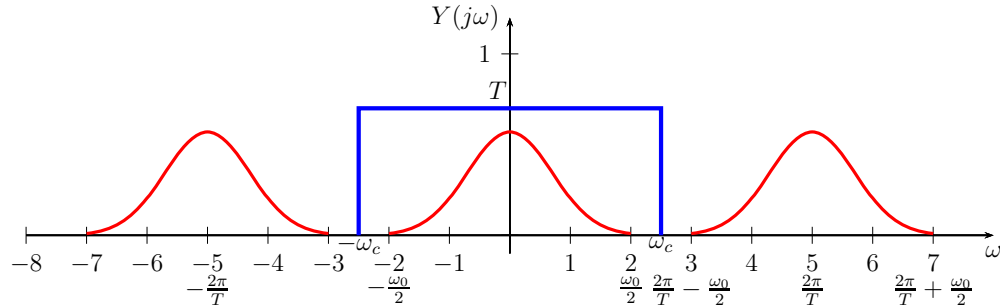
Ζητείται να προσδιοριστεί η συχνότητα αποκοπής ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας

$$H(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.5.10)$$

που σχεδιάζεται με μπλέ χρώμα στο Σχήμα 9.5.2. Το πλάτος  $T$  εξουδετερώνει τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$  στη (9.5.8) και εγγυάται ότι το  $X(j\omega)$  απομονώνεται κατά μέτρο αλώβητο. Προφανώς η εύλογη επιλογή για το  $\omega_c$  ικανοποιεί τις ανισότητες

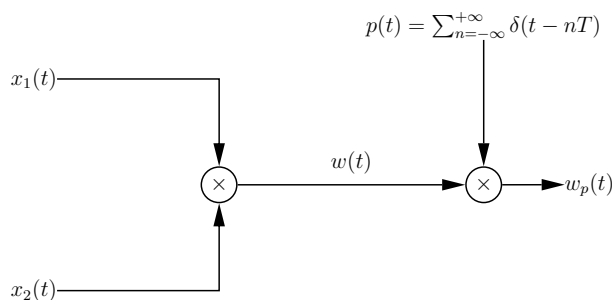
$$\frac{\omega_0}{2} < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{\omega_0}{2}. \quad (9.5.11)$$

Επειδή απομονώνεται ο όρος για  $k = 0$  στην (9.5.8), κατά συνέπεια η φάση που εισάγει το φανταστικό εκθετικό μηδενίζεται, άρα εξασφαλίζεται και η απαίτηση για τη φάση.



Σχήμα 9.5.2: Φάσμα  $Y(j\omega)$ .

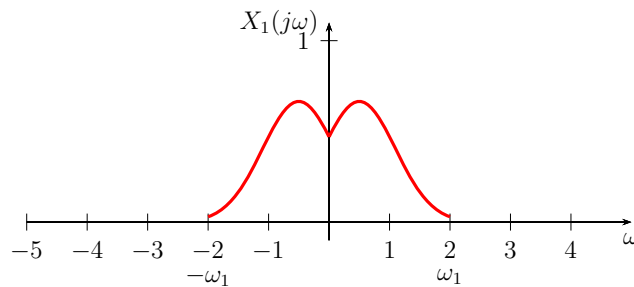
**9.5.7.** Για το σύστημα του Σχηματος 9.5.3 τα σήματα  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  πολλαπλασιάζονται και το γινόμενο  $w(t)$  υποβάλλεται σε δειγματοληψία με τρένο περιοδικών κρουστικών παλμών παράγοντας το σήμα  $w_p(t)$ . Το εύρος βασικής ζώνης των σημάτων  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  εικονίζεται



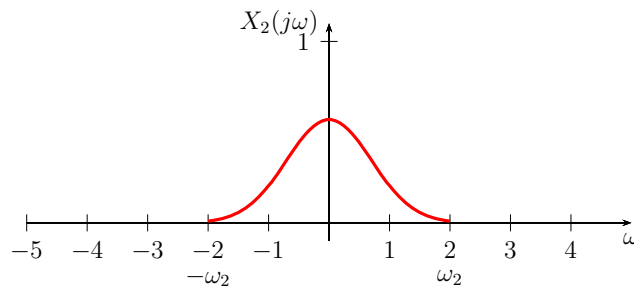
Σχήμα 9.5.3: Σύστημα της Άσκησης 9.5.7.

στα Σχήματα 9.5.4 και 9.5.5, αντιστοίχως. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη περίοδο δειγματοληψίας

$T$  έτσι ώστε το  $w(t)$  να μπορεί να αποκτηθεί από το  $w_p(t)$  με τη χρήση ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου.



Σχήμα 9.5.4: Φάσμα  $X_1(j\omega)$ .



Σχήμα 9.5.5: Φάσμα  $X_2(j\omega)$ .

**Λύση:**

Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για το γινόμενο στο χρόνο έχουμε

$$w(t) = x_1(t) x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_1(j\omega) * X_2(j\omega)]. \quad (9.5.12)$$

Εφόσον το  $W(j\omega)$  προκύπτει ως συνέλιξη των δύο φασμάτων, θα έχει πεδίο ορισμού  $|\omega| \leq \omega_1 + \omega_2$ . Για το  $w_p(t) = w(t) p(t)$ , από την απόδοση μετασχηματισμού Fourier στο περιοδικό σήμα  $w(t)$  έχουμε

$$w_p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} W_p(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [W(j\omega) * \delta(\omega - 2\pi \frac{k}{T})] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(j(\omega - 2\pi \frac{k}{T})). \quad (9.5.13)$$

Για να μην επικαλύπτονται τα διαδοχικά ανάτυπα του  $W(j\omega)$  στο φάσμα του  $W_p(j\omega)$  αρκεί

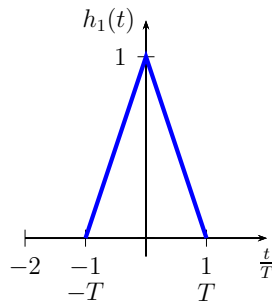
$$\frac{2\pi}{T} - \omega_1 - \omega_2 \geq \omega_1 + \omega_2 \iff \frac{2\pi}{T} \geq 2(\omega_1 + \omega_2) \iff T \leq \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (9.5.14)$$



**9.5.8.** Ένα σήμα υπόκειται σε πράξη διακράτησης (δείγματος) μηδενικής τάξης (zero-order hold) με ισοδύναμη περίοδο δειγματοληψίας  $T$  για να παραχθεί ένα σήμα  $x_0(t)$ . Έστω  $x_1(t)$  το αποτέλεσμα της διακράτησης δείγματος πρώτης τάξης στα δείγματα του σήματος  $x(t)$ , δηλαδή

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h_1(t - nT) \quad (9.5.15)$$

όπου  $h_1(t)$  η συνάρτηση που σχεδιάζεται στο Σχήμα 9.5.6. Να προσδιορίσετε την απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου που παράγει το  $x_1(t)$  ως έξοδο, όταν είσοδος είναι το  $x_0(t)$ .



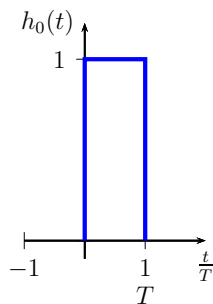
Σχήμα 9.5.6: Συνάρτηση  $h_1(t)$ .

**Λύση:**

Ισχύει  $x_1(t) = h_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$ . Η είσοδος  $x_0(t)$  μετά από τη διακράτηση δείγματος μηδενικής τάξης γράφεται αναλόγως

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (9.5.16)$$

όπου  $h_0(t)$  η συνάρτηση που σχεδιάζεται στο Σχήμα 9.5.7.



Σχήμα 9.5.7: Συνάρτηση  $h_0(t)$ .

Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των  $x_1(t)$  και  $x_0(t)$ :

$$X_1(j\omega) = H_1(j\omega) X_p(j\omega) \quad (9.5.17)$$

$$X_0(j\omega) = H_0(j\omega) X_p(j\omega) \quad (9.5.18)$$

όπου

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\omega). \quad (9.5.19)$$

Αναζητώ την απόκριση συχνότητας  $H_d(j\omega)$  ενός συστήματος που θα τροφοδοτηθεί με το  $x_0(t)$  και θα παράξει έξοδο  $x_1(t)$ . Οπότε

$$H_d(j\omega) = \frac{X_1(j\omega)}{X_0(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{H_0(j\omega)} \quad (9.5.20)$$

όπου αξιοποιήθηκαν οι (9.5.17) και(9.5.18). Ξεκινώντας από το μετασχηματισμό Fourier του τριγωνικού παλμού

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{\sin^2(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2} \quad (9.5.21)$$

και αναγνωρίζοντας ότι  $h_1(t) = g(\frac{t}{T})$ , η ιδιότητα της κλιμάκωσης του μετασχηματισμού Fourier μας δίνει

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{|a|} G(j\frac{\omega}{a}) \Big|_{a=\frac{1}{T}} = T G(j T \omega) = T \frac{\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega T}{2})^2}. \quad (9.5.22)$$

Αν μετατοπιστεί η συνάρτηση  $h_0(t)$  κάνοντας την αλλαγή  $t \leftarrow t + \frac{T}{2}$  προκύπτει συμμετρικός ορθογώνιος παλμός  $h_0(t + \frac{T}{2}) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$ , όπου  $u(t)$  η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (ή συνάρτηση Heaviside) για την οποία ο πίνακας των ζευγών μετασχηματισμών Fourier μας δίνει

$$h_0(t + \frac{T}{2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2T \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}. \quad (9.5.23)$$

Αλλά ισχύει επίσης ότι το δεξί μέρος της (9.5.23) ισούται με  $H_0(j\omega) \exp(j\omega \frac{T}{2})$  ως συνέπεια της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο. Άρα

$$H_0(j\omega) = \exp(-j\omega \frac{T}{2}) 2T \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}. \quad (9.5.24)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} h_0(t + \frac{T}{2}) * \frac{1}{\sqrt{T}} h_0(t + \frac{T}{2}) \quad (9.5.25)$$

που συνεπάγεται ότι

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{T} \exp(j\omega T) H_0^2(j\omega). \quad (9.5.26)$$

Αντικαθιστώντας την (9.5.26) στην (9.5.20) προκύπτει

$$H_d(j\omega) = \frac{1}{T} \exp(j\omega T) H_0(j\omega) = 2 \exp(j\omega \frac{T}{2}) \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}. \quad (9.5.27)$$