



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

**Σήματα-Συστήματα**  
**Δειγματοληψία**

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος  
Τμήμα Πληροφορικής

## Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Κεφάλαιο 9

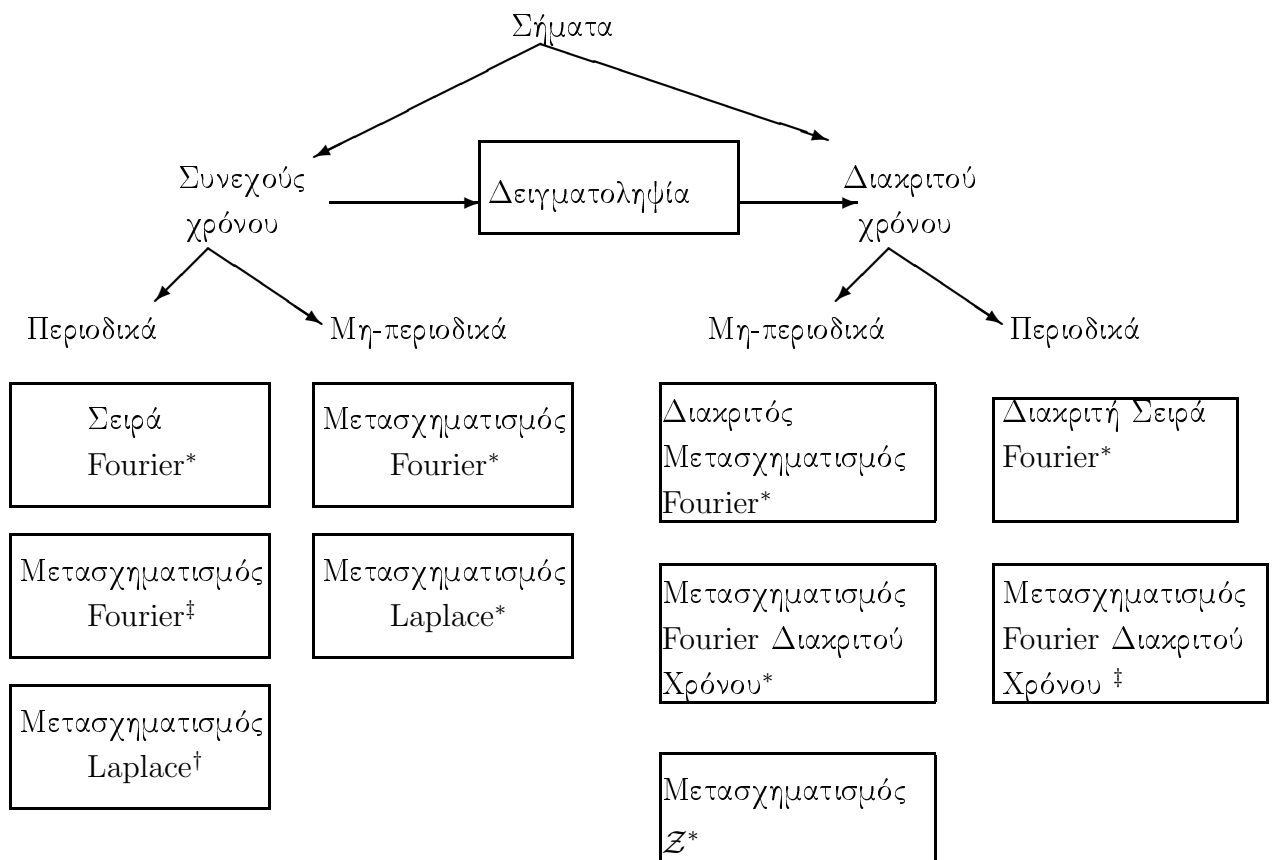
## Δειγματοληψία

### 9.1 Ανασκόπηση

Το διάγραμμα του Σχήματος 9.1 συνοψίζει τα αναλυτικά εργαλεία που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για την επεξεργασία των σημάτων  $\Sigma.X.$  και  $\Delta.X.$

Μέχρι το σημείο αυτό, για καθαρώς παιδευτικούς λόγους, θεωρήσαμε τόσο τα σήματα  $\Sigma.X.$  και  $\Delta.X.$  όσο και τα αναλυτικά εργαλεία ως λειτουργικώς ανεξάρτητα. Ωστόσο τούτο δεν αληθεύει. Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι **αναλογικός**. Έτσι η πλειοψηφία των σημάτων  $\Delta.X.$  προέρχεται από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων  $\Sigma.X.$  Συνεπώς επιβάλλεται να μελετηθεί η διαδικασία της **δειγματοληψίας**. Επιπροσθέτως, “φυσική σημασία” διαθέτει λ.χ. ο μετασχηματισμός Fourier  $\Sigma.X.$  που αναδεικνύει τις φασματικές ιδιότητες του σήματος. Η ανεξάρτητη μεταβλητή στο μετασχηματισμό Fourier  $\Delta.X.$  είναι η κυκλική συχνότητα  $\omega$ , που μετριέται σε rad/sec ή η συχνότητα  $f$  που μετριέται σε Hz. Ο μετασχηματισμός Fourier  $\Delta.X.$  και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier πρέπει μάλλον να αντιμετωπίζονται σαν αλγόριθμοι **αριθμητικής ανάλυσης** για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier  $\Sigma.X.$

Παρομοίως ένα δυναμικό σύστημα, λ.χ. το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής ομιλίας που αποκαλείται φωνητικός σωλήνας (vocal tract) όπου διαδίδονται ηχητικά κύματα, μοντελοποιείται από διαφορικές εξισώσεις. Για την περίπτωση του φωνητικού σωλήνα, όπου συντελείται διάδοση κύματος (ταχύτητας όγκου αέρα), απαιτούνται μερικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Ωστόσο αυτό που θέλουμε είναι να παράξουμε ένα αριθμητικό μοντέλο του συστήματος κατάλληλο για επεξεργασία με τον υπολογιστή και πολύ περισσότερο θέλουμε να αναπτύξουμε αλγορίθμους επεξεργασίας των δειγμάτων που προέρχονται από τη δειγματοληψία του σήματος



\* Ορίζονται αναλυτικώς.

† Ορίζεται για τα ημιπεριοδικά σήματα.

‡ Απόδοση μετασχηματισμού συνεπεία των ιδιοτήτων.

Σχήμα 9.1: Αναλυτικά εργαλεία για τις διάφορες κατηγορίες σημάτων.

της ομιλίας και ειδικότερα αλγορίθμους εξαγωγής (περιγραφικών) χαρακτηριστικών γνωρισμάτων για να αναγνωρίζουμε αυτόματα λέξεις, για να επαληθεύουμε την ταυτότητα του ομιλητή, ή να αναγνωρίζουμε συναισθήματα από το σήμα ομιλίας, όπως θα μελετήσουμε στο σχετικό μάθημα που προσφέρεται στο 7ο εξάμηνο. Οι προηγούμενοι στόχοι μπορούν να επιτευχθούν αν από τις διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου μεταβούμε στο  $s$ -επίπεδο (μετασχηματισμός Laplace) και στη συνέχεια **απεικονίσουμε** το  $s$ -επίπεδο στο  $z$ -επίπεδο (μετασχηματισμός  $Z$ ). Μέθοδοι απεικόνισης ενός επιθυμητού μετασχηματισμού Laplace σε μετασχηματισμό  $Z$  απαντούνται επίσης στο πρόβλημα της **σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων**, όπου το ζητούμενο είναι να σχεδιάσουμε ένα επιθυμητό ψηφιακό φίλτρο που έχει δοσμένα φασματικά χαρακτηριστικά που προδιαγράφονται με όρους συχνότητας σε Hz, όπως θα μελετήσουμε στο μάθημα της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος που θα διαδεχθεί το παρόν στο επόμενο εξάμηνο.

## 9.2 Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

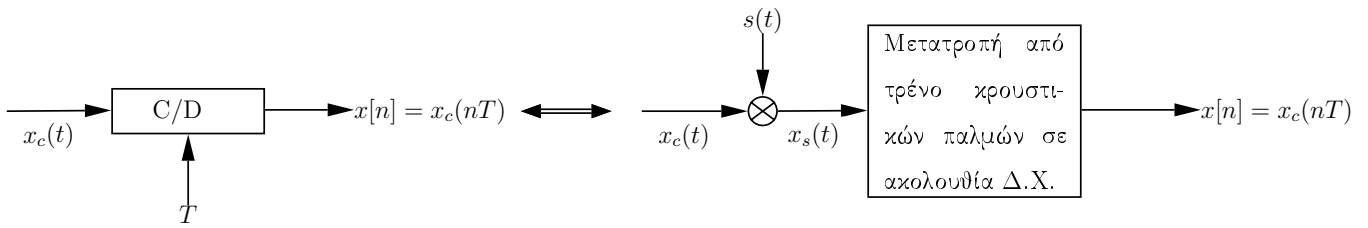
Η δειγματοληψία ενός σήματος  $\Sigma.X.$  εισάγει **επικάλυψη** (aliasing) στο φάσμα. Τούτο είναι απότοκο της ιδιότητας της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier. Το τεχνικό πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε είναι **πώς θα εκλέξουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = \frac{1}{T}$** , όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας που υπονοείται στη σχέση παραγωγής των δειγμάτων από το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$ :

$$x[n] = x(nT). \quad (9.1)$$

Με μαθηματικούς όρους το πρόβλημα αυτό αναδιατυπώνεται ως εξής: Ποιές είναι οι συνθήκες που εγγυώνται την τέλεια ανακατασκευή του σήματος  $x(t)$  από τα δείγματά του  $x[n]$ ; Οι συνθήκες αυτές προβλέπονται από το διάσημο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon. Πέρα από τα ενδεχόμενα σφάλματα επικάλυψης, όταν δεν γίνει βέλτιστη εκλογή της συχνότητας δειγματοληψίας, ενδεχομένως υπεισέρχονται και σφάλματα αποκοπής, όταν το σήμα  $\Sigma.X.$  δεν είναι χρονοπερατό και πρέπει να αποκοπεί πολλαπλασιάζοντάς το μ' ένα παράθυρο στο πεδίο του χρόνου. Ήδη η χρήση των όρων σφάλματα επικάλυψης και αποκοπής μας παραπέμπει σε μελέτη ανάλυσης λαθών αλγορίθμων αριθμητικής ανάλυσης. Πράγματι: σε μιά τέτοια θεώρηση η περίοδος δειγματοληψίας δεν είναι τίποτε άλλο από το βήμα ενός αλγορίθμου αριθμητικής ανάλυσης, λ.χ. παρεμβολής.

Το Σχήμα 9.2 περιγράφει με όρους block διαγράμματος τη διαδικασία της δειγματοληψίας.

Στο Σχήμα 9.2 αποφεύγουμε τον όρο μετατροπείας αναλογικού σε ψηφιακό (A/D converter),



Σχήμα 9.2: Σύστημα μετατροπής σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ.

επειδή δεν θα μας απασχολήσουν σε πρώτη φάση δομικά μέρη ενός τέτοιου μετατροπείας, όπως τα κυκλώματα κράτησης δείγματος (sample and hold) ή ο τελεστικός ενισχυτής που υλοποιεί τη χβάντιση του δείγματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, το σύστημα μετατροπής σήματος Σ.Χ. σε Δ.Χ. (C/D) υλοποιεί πολλαπλασιασμό με τρένο κρουστικών παλμών και μετατροπή από τρένο κρουστικών παλμών σε ακολουθία διακριτού χρόνου. Παράμετρος του συστήματος είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T$ .

Το τρένο κρουστικών παλμών  $s(t)$  και ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $x(t)$  με το τρένο κρουστικών παλμών παίρνουμε

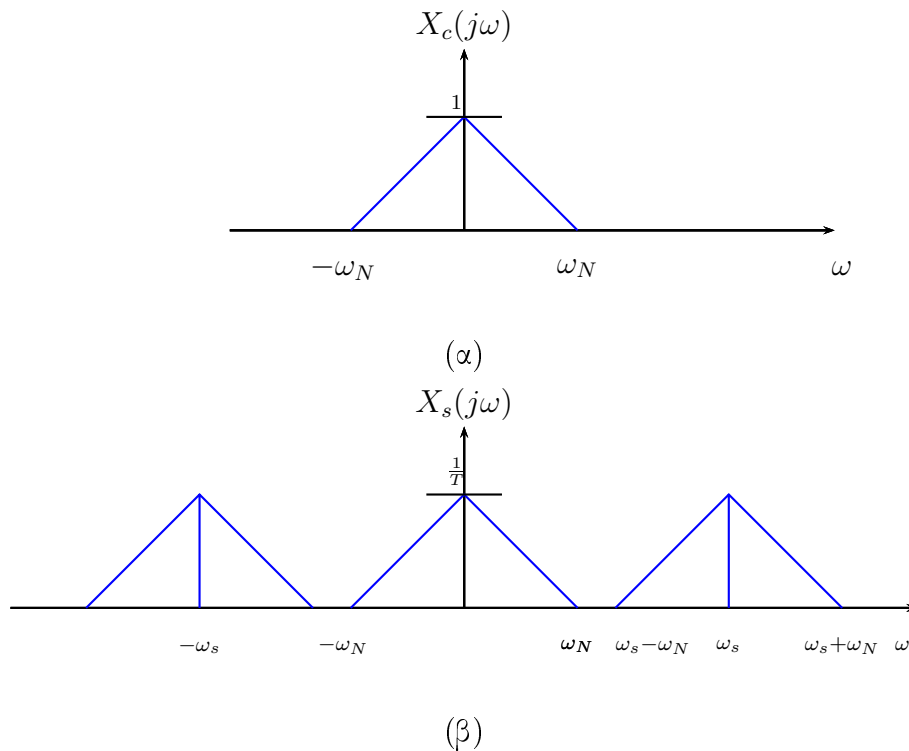
$$x_s(t) = x_c(t) s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT). \quad (9.3)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_c * S](j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s). \quad (9.4)$$

Αν το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  ήταν κατωδιαβατό με φάσμα, όπως στο Σχήμα 9.3(α), με ανώτερη συχνότητα  $\omega_N$ , τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μετά τη δειγματοληψία, που σχεδιάζεται στο Σχήμα 9.3(β), είναι περιοδική επανάληψη του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος με περίοδο  $\omega_s$  κλιμακώμενος κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$ . Για να αποφευχθεί επικάλυψη μεταξύ δύο επαναλήψεων του αρχικού φάσματος αρκεί

$$\omega_N \leq \omega_s - \omega_N \iff \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (9.5)$$



Σχήμα 9.3: Μετασχηματισμοί Fourier: (α)  $X(j\omega)$ , (β)  $X_s(j\omega)$ .

Η μικρότερη επιτρεπτή συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 2\omega_N$  καλείται **συχνότητα Nyquist**. Όταν ισχύει η (9.5) το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  μπορεί να ανακτηθεί, επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των φασματικών συνιστωσών.

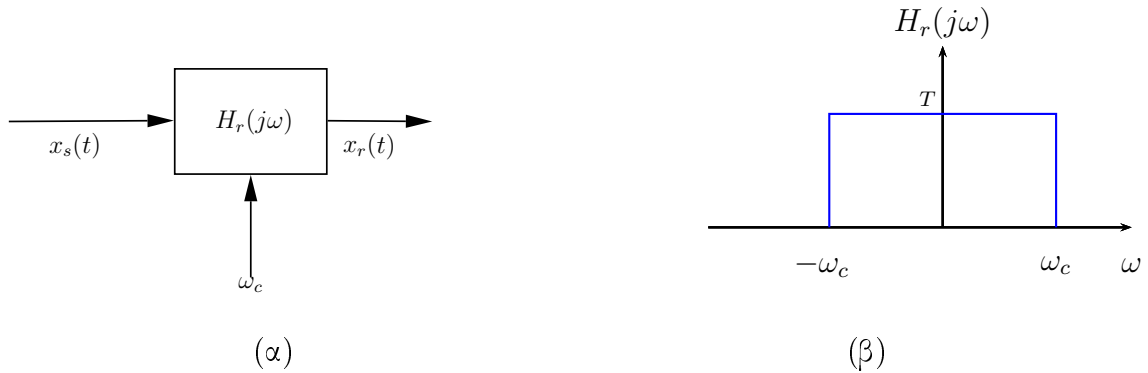
Για την ανάκτηση του σήματος  $\Sigma.X.$  από το τρένο των χροστικών παλμών  $x_s(t)$  αρκεί να τροφοδοτήσουμε το  $x_s(t)$  σ' ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο  $H_r(j\omega)$  με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$ , όπως δείχνει το Σχήμα 9.4. Για να αντισταθμίσουμε τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$  που είναι εγγενής στη διαδικασία της δειγματοληψίας αρκεί το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο να έχει αντί μοναδιαίου πλάτους, πλάτος  $T$  στη ζώνη διάβασης στο πεδίο της συχνότητας. Επιθυμούμε

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) = X_c(j\omega) \tag{9.6}$$

άρα πρέπει να εκλέξουμε τη συχνότητα αποκοπής έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\begin{aligned} \omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N \\ \omega_s &\geq 2\omega_N. \end{aligned} \tag{9.7}$$

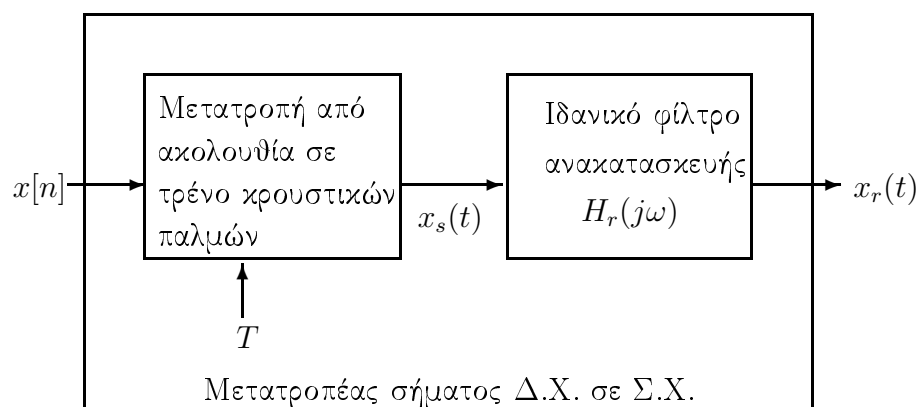
Το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο, γιατί έχει απότομη μετάβαση από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη αποκοπής. Τα υλοποιήσιμα κατωδιαβατά φίλτρα παρεμβάλλουν



Σχήμα 9.4: (α) Ανάκτηση σήματος Σ.Χ. από το τρένο κρουστικών παλμών. (β) Απόκριση συχνότητας ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$ .

μια ζώνη μετάβασης μεταξύ των δύο προηγούμενων ζωνών επιτυγχάνοντας μια ομαλή βαθμιαία μετάβαση. Αν  $\omega_s > 2\omega_N$ , τότε έχουμε ευελιξία να επιλέξουμε μια συχνότητα αποκοπής με μη-μηδενικό εύρος ζώνης μετάβασης.

Ας μελετήσουμε το πρόβλημα της ανακατασκευής του σήματος Σ.Χ. από τα δείγματα του στο πεδίο του χρόνου, όπως σχηματικά επιδεικνύεται στο Σχήμα 9.5. Το θεώρημα του Shannon εγγυάται την ανακατασκευή ενός **ζωνοπερατού** (bandlimited) σήματος από τα δείγματα του. Προφανώς, ζωνοπερατά σήματα είναι τα κατωδιαβατά και τα ζωνοδιαβατά σήματα. Στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ένα κατωδιαβατό σήμα, επειδή ένα οποιοδήποτε ζωνοδιαβατό σήμα μπορεί να αναχθεί σε κατωδιαβατό (ή σήμα βασικής ζώνης) με μιά απλή αποδιαμόρφωση. Επειδή  $x[n] = x_s(nT)$ , από την (9.3) προκύπτει



Σχήμα 9.5: Ανακατασκευή ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του.



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (9.8)$$

και

$$\begin{aligned} x_r(t) &= [x_s * h_r](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\lambda) h_r(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(\lambda - nT) \right] h_r(t - \lambda) d\lambda \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} h_r(t - \lambda) \delta(\lambda - nT) d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h_r(t - nT). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Αλλά το ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής μελετήθηκε προηγουμένως και είναι το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$  και μέτρο  $T$ . Αν εκλέξω ως  $\omega_s$ , τη συχνότητα Nyquist και  $\omega_c = \omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$ , τότε η κρουστική απόκριση του ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου είναι

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \cos \omega t d\omega \\ &= \frac{2T}{2\pi t} \int_0^{\frac{\pi t}{T}} \cos \psi d\psi = \frac{1}{\frac{\pi t}{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Αντικαθιστώντας την (9.10) στην (9.9) προκύπτει

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}{\pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)} \quad (9.11)$$

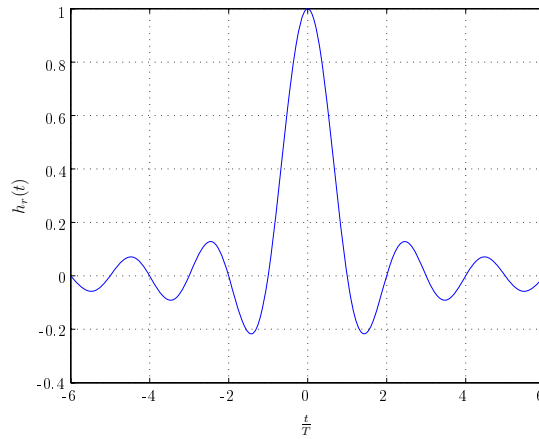
που ολοκληρώνει το θεώρημα του Shannon. Παρατηρούμε ότι η σχέση ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του δεν είναι παρά μια σχέση **παρεμβολής** (interpolation). Η συνάρτηση  $h_r(t)$  (που είναι μια συνάρτηση  $\text{sinc}()$ ) συχνά αποκαλείται **πυρήνας (kernel) Dirichlet** και σχεδιάζεται στο Σχήμα 9.6. Παρατηρούμε ότι  $h_r(0) = 1$ , ενώ  $h_r(nT) = 0$  για  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Άρα  $x_r(mT) = x_c(mT)$ .

Αν το σήμα  $x_c(t)$  δεν είναι ζωνοπερατό, μπορεί να γίνει τέτοιο αν φιλτραριστεί με ένα κατωδιαβατό φίλτρο, που θα διατηρήσει το συχνοτικό περιεχόμενο ως τη συχνότητα  $\omega_N$ .

### 9.3 Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

Τα δείγματα  $x_c(nT)$  συγκροτούν μια ακολουθία  $x[n]$ , οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. αυτής της ακολουθίας

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}, \quad x[n] = x_c(nT). \quad (9.12)$$

Σχήμα 9.6: Συνάρτηση  $h_r(t)$ .

Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}
 X_s(j\omega) &= \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega(nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\omega T)n}. \tag{9.13}
 \end{aligned}$$

Από τις (9.12) και (9.13) αναγνωρίζουμε ότι

$$X_s(j\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T} = X(e^{j\omega T}) \tag{9.14}$$

ή ισοδύναμα

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s) \tag{9.15}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}). \tag{9.16}$$

Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier  $\Delta.X.$  είναι απλώς μια κλιμακωμένη ως προς τη συχνότητα παραλλαγή του μετασχηματισμού Fourier  $\Sigma.X.$  Η σχέση κλιμάκωσης (δηλαδή, ένας μετασχηματισμός ανεξάρτητης μεταβλητής) είναι

$$\Omega = \omega T. \tag{9.17}$$

2. Η (9.17) μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση του

$$\omega : [0, \omega_s) \longrightarrow \Omega [0, 2\pi) \quad (9.18)$$

3. Από την (9.15) αν εκλέξουμε διάστημα μιας περιόδου  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ , τότε

$$X_c(j\omega) = T X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (9.19)$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η ακολουθία  $x[n] = x_c(nT)$  είναι **χρονοπερατή**, δηλαδή έχει πεπερασμένο πλήθος δειγμάτων που δεικτοδοτούνται από τα  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Τότε

$$X_c(j\omega) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\omega T n}. \quad (9.20)$$

Υποβάλλουμε σε ομοιόμορφη δειγματοληψία ως προς  $\omega$  το διάστημα  $[0, \omega_s)$  παίρνοντας  $N$  δείγματα αντικαθιστώντας όπου  $\omega$  το  $\omega_k = k \Delta\omega_s = k (2\pi \Delta f_s) = k 2\pi \frac{f_s}{N}$ , με  $f_s = \frac{1}{T}$ . Τότε

$$\begin{aligned} X_c(j\omega_k) &= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j(k\Delta\omega_s)Tn} \\ &= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} nT} \\ &= T \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}}_{N \times DFT\{x[n]\}_k} \\ &= N T X[k] \end{aligned} \quad (9.21)$$

όπου  $N T$  είναι η συνολική χρονική διάρκεια του σήματος. Οι σχέσεις (9.19) και (9.21) θεμελιώνουν την ισοδυναμία μεταξύ του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ. και του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ή διακριτού μετασχηματισμού Fourier αντιστοίχως. Επομένως δικαιολογείται η αρχική ρήση περί μεθόδου (μετασχηματισμός Fourier) S.Q. και αλγορίθμων (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και διακριτός μετασχηματισμός Fourier).

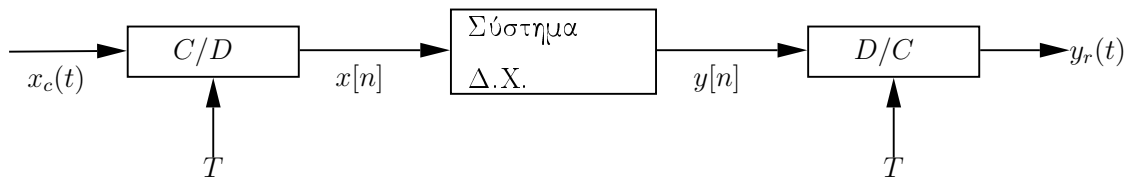
**Παράδειγμα 9.1.** Ας εφαρμόσουμε την ανάλυση της ενότητας 9.3 στην περίπτωση της ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του. Στο φάσμα έχουμε:

$$\begin{aligned} X_r(j\omega) &= H_r(j\omega) X_s(j\omega) = H_r(j\omega) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega T n} \right] = H_r(j\omega) X(e^{j\omega T}) = T X_s(j\omega) \\ &= T \frac{1}{T} X_c(j\omega) \end{aligned} \quad (9.22)$$

όπου  $X(e^{j\omega T})$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της ακολουθίας  $x[n]$  που ισοδυναμεί με  $X_s(j\omega)$  σύμφωνα με την (9.14) και η σχέση μεταξύ  $X_s(j\omega)$  και  $X_c(j\omega)$  δίνεται από την (9.4).

## 9.4 Επεξεργασία Δ.Χ. των σημάτων Σ.Χ.

Το διάγραμμα του Σχήματος 9.7 δείχνει παραστατικά την επεξεργασία σημάτων Σ.Χ. με χρήση ενός συστήματος Δ.Χ. (π.χ. υπολογιστής γενικού σκοπού). Στο σύστημα του Σχήματος 9.7



Σχήμα 9.7: Επεξεργασία σημάτων Σ.Χ. με χρήση συστήματος Δ.Χ.

γνωρίζουμε τη μαθηματική περιγραφή των σημάτων στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας στην είσοδο (μετατροπή σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ.)

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (9.23)$$

και την έξοδο (ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του)

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(\frac{t-nT}{T})]}{\pi(\frac{t-nT}{T})} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad (9.24)$$

$$Y_r(j\omega) = H_r(j\omega)Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} T Y(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου  $Y_r(j\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_r(t)$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ.) και  $Y(e^{j\omega T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.).

Ας προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε τα  $y[n]$  και  $x[n]$ . Επειδή το  $x_c(t)$  είναι ζωνοπερατό, κατ' απαίτηση του θεωρήματος δειγματοληψίας, έχουμε

$$X_c(j\omega) = 0 \quad \text{για } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \quad (9.25)$$

Για ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. ισχύει

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega}) \quad (9.26)$$

άρα

$$\begin{aligned}
 Y_r(j\omega) &= H_r(j\omega) \underbrace{H(e^{j\omega T}) X(e^{j\omega T})}_{Y(e^{j\omega T})} \\
 &= H_r(j\omega) H(e^{j\omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}) \\
 &= \begin{cases} H(e^{j\omega T}) X_c(j\omega) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (9.27)
 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$Y_r(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega) X_c(j\omega) \quad (9.28)$$

όπου  $H_{\text{eff}}(j\omega)$  το ισοδύναμο σύστημα Σ.Χ. που ορίζεται ως

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (9.29)$$

Η (9.29) υποδεικνύει μία μέθοδο για τη μετατροπή μιας αναλογικής σχεδίασης σε ψηφιακή, τη μέθοδο της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης** (impulse-invariance).

**Παράδειγμα 9.2.** Για να σχεδιάσουμε ένα ιδανικό ζωνοπερατό διαφοριστή ξεκινούμε από την ιδιότητα της διαφορίσης του μετασχηματισμού Fourier. Ένας διαφοριστής είναι σύστημα Σ.Χ. με σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c(t) \quad (9.30)$$

και απόκριση συχνότητας

$$H_c(j\omega) = j\omega. \quad (9.31)$$

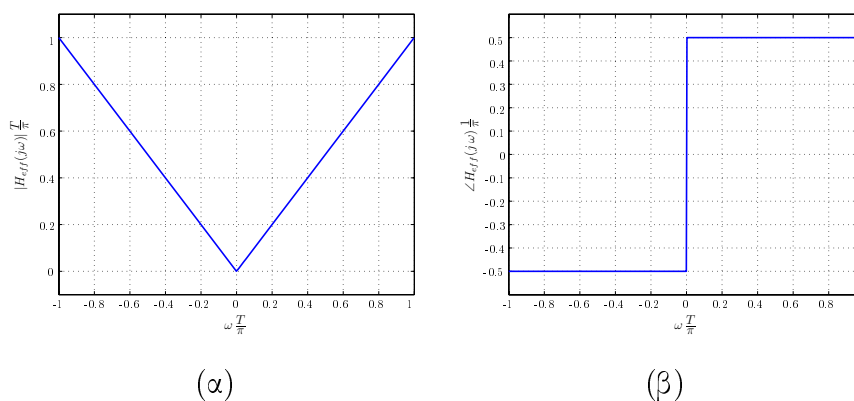
Για ζωνοπερατή είσοδο εφαρμόζοντας την (9.29) προκύπτει

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} j\omega & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (9.32)$$

Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του ισοδύναμου συστήματος Σ.Χ. σχεδιάζονται στο Σχήμα 9.8

Το αντίστοιχο σύστημα διακριτού χρόνου έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{j\Omega}{T}, \quad |\Omega| < \pi. \quad (9.33)$$



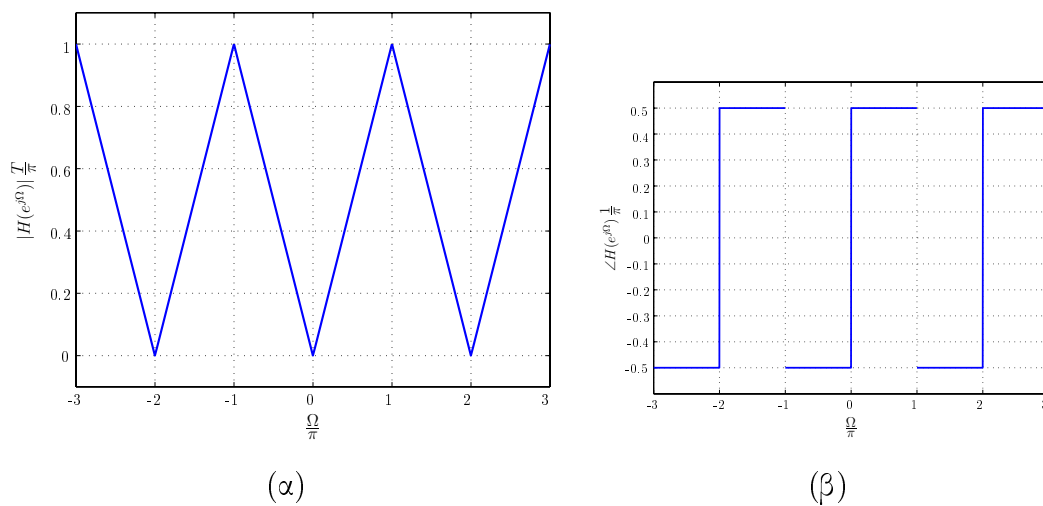
Σχήμα 9.8: Μέτρο και φάση της απόκρισης συχνότητας του ισοδύναμου ζωνοπερατού διαφοριστή Σ.Χ.: (α) Μέτρο, (β) Φάση.

Η απόκριση συχνότητας είναι τώρα περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$ . Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{αν } 0 < \Omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } -\pi < \Omega < 0. \end{cases} \quad (9.34)$$

Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του αντίστοιχου συστήματος διακριτού χρόνου σχεδιάζονται στο Σχήμα 9.9. Η κρουστική του απόκριση του διαφοριστή διακριτού χρόνου είναι:

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T} = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & \text{αν } n \neq 0. \end{cases} \quad (9.35)$$



Σχήμα 9.9: Μέτρο και φάση της απόκρισης συχνότητας του διαφοριστή Δ.Χ.: (α) Μέτρο, (β) Φάση.