ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **2**: Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μαθηματική αναπαράσταση σημάτων-συστημάτων

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Μαθηματική περιγραφή σημάτων

Είδη σημάτων

- Συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.): $x(t)$, όπου $t \in \mathbb{R}$ ο συνεχής χρόνος.
- Διακριτού χρόνου (Δ.Χ.): $x[n]$, όπου $n \in \mathbb{N}$ ένας ακέραιος δείκτης. Δηλαδή, τα σήματα Δ.Χ. είναι ακολουθίες.

Μαθηματική περιγραφή σημάτων

Είδη σημάτων

- Συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.): $x(t)$, όπου $t \in \mathbb{R}$ ο συνεχής χρόνος.
- Διακριτού χρόνου (Δ.Χ.): $x[n]$, όπου $n \in \mathbb{N}$ ένας ακέραιος δείκτης. Δηλαδή, τα σήματα Δ.Χ. είναι ακολουθίες.

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (1)

Ανάκλαση περί την αρχή

$$
\begin{aligned}
x(t) &\Rightarrow x(-t)\\
x[n] &\Rightarrow x[-n].
\end{aligned}
$$

- Σχήμα 2.2
- Φυσική σημασία: Αναστροφή (reverse.)

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (1)

Ανάκλαση περί την αρχή

$$
\begin{aligned}
x(t) &\Rightarrow x(-t) \\
x[n] &\Rightarrow x[-n].
\end{aligned}
$$

- Σχήμα 2.2
- Φυσική σημασία: Αναστροφή (reverse.)

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (2)

Γραμμική αλλαγή κλίμακας

$$x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t/2) \text{ ή } x(2t).$$

$$\text{Αν } x(t) \neq 0 \text{ για } |t| < t_0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0 \quad \text{εάν } \left|\tfrac{t}{2}\right| < t_0$$

Δηλαδή $x(\frac{t}{2}) \neq 0$ εάν $|t| < 2\,t_0$.

- Σχήμα 2.3
- Φυσική ερμηνεία $x(at)$: Αν $a > 1$ η διάρκεια του σήματος μικραίνει χρόνο, π.χ. όταν ένα pick up παίζει με μεγαλύτερη ταχύτητα στροφών. Αν $0 < a < 1$ η διάρκεια του σήματος μεγαλώνει, π.χ. όταν ένα pick up παίζει με μικρότερη ταχύτητα στροφών.

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (2)

Γραμμική αλλαγή κλίμακας

$$x(t) \Rightarrow x(t/2) \text{ ή } x(2t).$$

$$\text{Αν } x(t) \neq 0 \text{ για } |t| < t_0 \Rightarrow x(\frac{t}{2}) \neq 0 \quad \text{εάν } |\tfrac{t}{2}| < t_0$$

Δηλαδή $x(\frac{t}{2}) \neq 0$ εάν $|t| < 2\,t_0$.

- Σχήμα 2.3
- Φυσική ερμηνεία $x(at)$: Αν $a > 1$ η διάρκεια του σήματος μικραίνει χρόνο, π.χ. όταν ένα pick up παίζει με μεγαλύτερη ταχύτητα στροφών. Αν $0 < a < 1$ η διάρκεια του σήματος μεγαλώνει, π.χ. όταν ένα pick up παίζει με μικρότερη ταχύτητα στροφών.

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (3)

Μετατόπιση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x(t-t_0) \\ x[n] &\rightarrow x[n-n_0]. \end{aligned}$$

- Σχήμα 2.4
- Φυσική ερμηνεία $x(t-t_0)$: Αν $t_0 > 0$, συμβαίνει μετατόπιση προς τα "δεξιά", δηλαδή προώθηση (advance). Αν $t_0 < 0$, συμβαίνει μετατόπιση προς τα 'άριστερά", δηλαδή, καθυστέρηση (delay).

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (3)

Μετατόπιση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x(t-t_0) \\ x[n] &\rightarrow x[n-n_0]. \end{aligned}$$

- Σχήμα 2.4
- Φυσική ερμηνεία $x(t-t_0)$: Αν $t_0 > 0$, συμβαίνει μετατόπιση προς τα "δεξιά", δηλαδή προώθηση (advance). Αν $t_0 < 0$, συμβαίνει μετατόπιση προς τα 'άριστερά", δηλαδή, καθυστέρηση (delay).

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (4)

Γενίκευση

$$x(t) \to x(at + b).$$

- $|a| > 1$

$a > 1$	σμίκρυνση, μετατόπιση
$a < -1$	χρονική αναστροφή, σμίκρυνση και μετατόπιση

- $|a| < 1$

$0 < a < 1$	μεγένθυση, μετατόπιση
$-1 < a < 0$	χρονική αναστροφή, μεγένθυση και μετατόπιση

Μετασχηματισμοί ανεξάρτητης μεταβλητής (4)

Γενίκευση

$$x(t) \to x(at+b).$$

- $|a| > 1$

$$\begin{array}{ll} a > 1 & \text{σμίκρυνση, μετατόπιση} \\ a < -1 & \text{χρονική αναστροφή, σμίκρυνση και μετατόπιση} \end{array}$$

- $|a| < 1$

$$\begin{array}{ll} 0 < a < 1 & \text{μεγένθυση, μετατόπιση} \\ -1 < a < 0 & \text{χρονική αναστροφή, μεγένθυση και μετατόπιση} \end{array}$$

Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

- Σήμα άρτιας συμμετρίας: $x(-t) = x(t) \quad \forall t$.
- Σήμα περιττής συμμετρίας: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t$.
- Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος: $x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$.
- Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος: $x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$.
- Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$.

Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

- Σήμα άρτιας συμμετρίας: $x(-t) = x(t) \quad \forall t$.
- Σήμα περιττής συμμετρίας: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t$.
- Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος: $x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$.
- Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος: $x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$.
- Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$.

Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

- Σήμα άρτιας συμμετρίας: $x(-t) = x(t) \quad \forall t$.
- Σήμα περιττής συμμετρίας: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t$.
- Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος: $x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$.
- Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος: $x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$.
- Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$.

Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

- Σήμα άρτιας συμμετρίας: $x(-t) = x(t) \quad \forall t.$
- Σήμα περιττής συμμετρίας: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t.$
- Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος: $x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right].$
- Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος: $x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right].$
- Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του: $x(t) = x_e(t) + x_o(t).$

Ιδιότητες συμμετρίας των σημάτων

- Σήμα άρτιας συμμετρίας: $x(-t) = x(t) \quad \forall t.$
- Σήμα περιττής συμμετρίας: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t.$
- Συνιστώσα άρτιας συμμετρίας σήματος: $x_e(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right].$
- Συνιστώσα περιττής συμμετρίας σήματος: $x_o(t) \triangleq \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right].$
- Αποσύνθεση σήματος στις συνιστώσες του: $x(t) = x_e(t) + x_o(t).$

Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν

$$\exists T \neq 0 : \quad x(t) = x(t+T) \qquad \forall t. \tag{1}$$

- Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x(t) = x(t+mT) \qquad \forall t. \tag{2}$$

- Θεμελιώδης περίοδος T_0 είναι η μικρότερη τιμή της παραμέτρου T για την οποία ισχύει η (1).
- Ένα σταθερό σήμα είναι περιοδικό με απροσδιόριστη περίοδο.

Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν

$$\exists T \neq 0 : \quad x(t) = x(t+T) \quad \forall t. \tag{1}$$

- Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x(t) = x(t+mT) \quad \forall t. \tag{2}$$

- Θεμελιώδης περίοδος T_0 είναι η μικρότερη τιμή της παραμέτρου T για την οποία ισχύει η (1).
- Ένα σταθερό σήμα είναι περιοδικό με απροσδιόριστη περίοδο.

Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν

$$\exists T \neq 0 : \quad x(t) = x(t+T) \quad \forall t. \tag{1}$$

- Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x(t) = x(t+mT) \quad \forall t. \tag{2}$$

- Θεμελιώδης περίοδος T_0 είναι η μικρότερη τιμή της παραμέτρου T για την οποία ισχύει η (1).
- Ένα σταθερό σήμα είναι περιοδικό με απροσδιόριστη περίοδο.

Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό αν

$$\exists T \neq 0 : \quad x(t) = x(t+T) \quad \forall t. \tag{1}$$

- Εάν $x(t)$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \quad x(t) = x(t+mT) \quad \forall t. \tag{2}$$

- Θεμελιώδης περίοδος T_0 είναι η μικρότερη τιμή της παραμέτρου T για την οποία ισχύει η (1).
- Ένα σταθερό σήμα είναι περιοδικό με απροσδιόριστη περίοδο.

Πραγματικό εκθετικό

$$x(t) = C\,e^{a\,t} \quad a, C \in \mathbb{R}$$

- Σχήμα 2.5
- Η παράμετρος a έχει τη φυσική ερμηνεία ρυθμού αύξησης πληθυσμού, ρυθμού εξασθένισης της ραδιενέργειας. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RC η παράμετρος a ισούται με $\frac{1}{RC}$. Η ποσότητα RC είναι γνωστή και ως σταθερά χρόνου.
- Για $a > 0$ το εκθετικό σήμα αυξάνει.
- Για $a < 0$ το εκθετικό σήμα αποσβέννυται.

Πραγματικό εκθετικό

$$x(t) = C\,e^{a\,t} \qquad a, C \in \mathbb{R}$$

- Σχήμα 2.5
- Η παράμετρος a έχει τη φυσική ερμηνεία ρυθμού αύξησης πληθυσμού, ρυθμού εξασθένισης της ραδιενέργειας. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RC η παράμετρος a ισούται με $\frac{1}{RC}$. Η ποσότητα RC είναι γνωστή και ως σταθερά χρόνου.
- Για $a > 0$ το εκθετικό σήμα αυξάνει.
- Για $a < 0$ το εκθετικό σήμα αποσβέννυται.

Πραγματικό εκθετικό

$$x(t) = C\,e^{a\,t} \qquad a, C \in \mathbb{R}$$

- Σχήμα 2.5
- Η παράμετρος a έχει τη φυσική ερμηνεία ρυθμού αύξησης πληθυσμού, ρυθμού εξασθένισης της ραδιενέργειας. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RC η παράμετρος a ισούται με $\frac{1}{RC}$. Η ποσότητα RC είναι γνωστή και ως σταθερά χρόνου.
- Για $a > 0$ το εκθετικό σήμα αυξάνει.
- Για $a < 0$ το εκθετικό σήμα αποσβέννυται.

Πραγματικό εκθετικό

$$x(t) = C\,e^{a\,t} \qquad a, C \in \mathbb{R}$$

- Σχήμα 2.5
- Η παράμετρος a έχει τη φυσική ερμηνεία ρυθμού αύξησης πληθυσμού, ρυθμού εξασθένισης της ραδιενέργειας. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RC η παράμετρος a ισούται με $\frac{1}{RC}$. Η ποσότητα RC είναι γνωστή και ως σταθερά χρόνου.
- Για $a > 0$ το εκθετικό σήμα αυξάνει.
- Για $a < 0$ το εκθετικό σήμα αποσβέννυται.

Φανταστικό εκθετικό

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t.$$

- Άρα το φανταστικό εκθετικό αποτελείται από δύο συνημιτονοειδή σήματα που έχουν διαφορά φάσης 90°.
- Το φανταστικό εκθετικό είναι περιοδικό σήμα, διότι

$$\exists T: \; e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} \; \Leftrightarrow \; \exists T: \; e^{j\omega_0 T} = 1 \; \Leftrightarrow \; T = \rho \frac{2\pi}{|\omega_0|}, \; \rho \in \mathbb{Z}.$$

Για $\rho = 1$ παίρνουμε τη θεμελιώδη περίοδο:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

Φανταστικό εκθετικό

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\,\sin\omega_0 t.$$

- Άρα το φανταστικό εκθετικό αποτελείται από δύο συνημιτονοειδή σήματα που έχουν διαφορά φάσης 90°.
- Το φανταστικό εκθετικό είναι περιοδικό σήμα, διότι

$$\exists T:\ e^{j\,\omega_0\,t} = e^{j\,\omega_0\,(t+T)} \Leftrightarrow \exists T:\ e^{j\,\omega_0\,T} = 1 \Leftrightarrow$$
$$T = \rho\,\frac{2\,\pi}{|\omega_0|},\ \ \rho \in \mathbb{Z}.$$

Για $\rho = 1$ παίρνουμε τη θεμελιώδη περίοδο:

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{|\omega_0|}.$$

Μιγαδικό εκθετικό

- Είναι χρήσιμο για την περιγραφή ημιτονοειδών σημάτων με διαφορά φάσης.

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega_0\,t + \varphi\right) = A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j\,(\omega_0\,t + \varphi)}\right\}.$$

Ορίζεται ως $x(t) = C\,e^{a\,t} \qquad a, C \in \mathbb{C}$.

- Αν $C = |C|\,e^{j\,\varphi}$ και $a = r + j\,\omega_0$, τότε

$$C\,e^{a\,t} = |C|e^{rt}\,e^{j\,(\omega_0\,t + \varphi)} = |C|e^{rt}\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + j|C|e^{rt}\,\cos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3)$$

- Καθένας όρος στο δεξί μέρος της (3) είναι ένα αποσβεννύμενο για $r < 0$ ή αυξανόμενο για $r > 0$ ημιτονοειδές σήμα. Όπως στο Σχήμα 2.6
- Το σήμα $\pm|C|\,e^{rt}$ καλείται περιβάλλουσα (envelope) του σήματος.

Μιγαδικό εκθετικό

- Είναι χρήσιμο για την περιγραφή ημιτονοειδών σημάτων με διαφορά φάσης.

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j\,(\omega_0\,t + \varphi)}\right\}.$$

  Ορίζεται ως $x(t) = C\,e^{a\,t} \qquad a, C \in \mathbb{C}$.

- Αν $C = |C|\,e^{j\,\varphi}$ και $a = r + j\,\omega_0$, τότε

$$\begin{aligned} &C\,e^{a\,t} = |C|e^{rt}\,e^{j\,(\omega_0\,t + \varphi)} = \\ &|C|e^{rt}\,\cos(\omega_0 t + \varphi) + j|C|e^{rt}\,\cos\Big(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\Big). \end{aligned} \tag{3}$$

- Καθένας όρος στο δεξί μέρος της (3) είναι ένα αποσβεννύμενο για $r < 0$ ή αυξανόμενο για $r > 0$ ημιτονοειδές σήμα. Όπως στο Σχήμα 2.6
- Το σήμα $\pm|C|\,e^{rt}$ καλείται περιβάλλουσα (envelope) του σήματος.

Μιγαδικό εκθετικό

- Είναι χρήσιμο για την περιγραφή ημιτονοειδών σημάτων με διαφορά φάσης.
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\}.$$
Ορίζεται ως $x(t) = C\,e^{a\,t} \quad a, C \in \mathbb{C}$.
- Αν $C = |C|\,e^{j\,\varphi}$ και $a = r + j\,\omega_0$, τότε
$$\begin{aligned} C\,e^{a\,t} &= |C| e^{rt}\,e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = \\ &|C| e^{rt}\cos(\omega_0 t + \varphi) + j|C| e^{rt}\cos(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \tag{3}$$
- Καθένας όρος στο δεξί μέρος της (3) είναι ένα αποσβεννύμενο για $r < 0$ ή αυξανόμενο για $r > 0$ ημιτονοειδές σήμα. Όπως στο Σχήμα 2.6
- Το σήμα $\pm|C|\,e^{rt}$ καλείται περιβάλλουσα (envelope) του σήματος.

Μιγαδικό εκθετικό

- Είναι χρήσιμο για την περιγραφή ημιτονοειδών σημάτων με διαφορά φάσης.

$$x(t) = A\ \cos(\omega_0\, t + \varphi) = A\, \mathrm{Re}\{e^{j\,(\omega_0\, t + \varphi)}\}.$$

Ορίζεται ως $x(t) = C\, e^{a\, t} \qquad a, C \in \mathbb{C}$.

- Αν $C = |C|\ e^{j\,\varphi}$ και $a = r + j\,\omega_0$, τότε

$$\begin{aligned} C\, e^{a\, t} &= |C| e^{rt}\ e^{j\,(\omega_0\, t + \varphi)} = \\ &|C| e^{rt}\ \cos(\omega_0 t + \varphi) + j|C| e^{rt}\ \cos(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \tag{3}$$

- Καθένας όρος στο δεξί μέρος της (3) είναι ένα αποσβεννύμενο για $r < 0$ ή αυξανόμενο για $r > 0$ ημιτονοειδές σήμα. ΄Οπως στο Σχήμα 2.6
- Το σήμα $\pm|C|\ e^{rt}$ καλείται περιβάλλουσα (envelope) του σήματος.

Βηματική Συνάρτηση-Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης

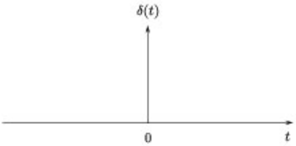
Η βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside ορίζεται ως εξής:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η $u(t)$ είναι ασυνεχής για $t = 0$. Ισχύει:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

όπου $\delta(t)$ η συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή συνάρτηση δέλτα-Dirac. Η $\delta(t)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής (distribution function).



Σχήμα 2.7: Η συνάρτηση δέλτα-Dirac.

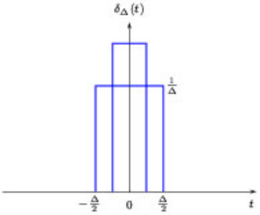
Δεύτερος ορισμός της συνάρτησης $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

όπου

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & |t| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δύο μέλη από τη σειρά συναρτήσεων $\delta_\Delta(t)$ σχεδιάζονται στο επόμενο σχήμα:



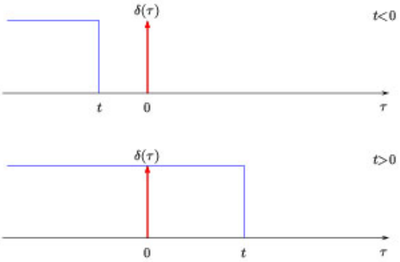
Σχήμα 2.8: Σειρά συναρτήσεων $\delta_\Delta(t)$.

Ολοκλήρωση όταν η $\delta(t)$ παρίσταται στην υπό-ολοκλήρωση συνάρτηση (1)

Ας ξεκινήσουμε από τον ορισμό της συνάρτησης $u(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

Ανάλυση της (4):



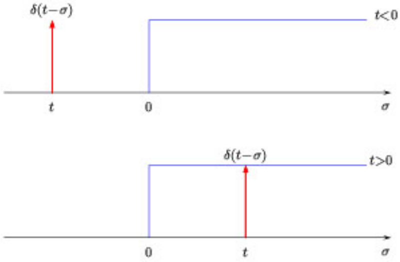
Σχήμα 2.9: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$.

Ολοκλήρωση όταν η $\delta(t)$ παρίσταται στην υπό-ολοκλήρωση συνάρτηση (2)

Αν γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\sigma = t - \tau$ στην (4) παίρνουμε

$$u(t) = -\int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)\, d\sigma = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)\, d\sigma. \tag{5}$$

Ανάλυση της (5):



Σχήμα 2.10: Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^{\infty} \delta(t-\sigma)\, d\sigma$.

Πράξεις με τη $\delta(t)$

Ολοκλήρωμα παρουσία της $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

όπου t είναι η τιμή του τ για την οποία μηδενίζεται το όρισμα της συνάρτησης $\delta(t-\tau)$.

Γινόμενο συναρτήσεων όταν παράγοντας είναι η $\delta(t)$

$$\begin{aligned} x(t)\,\delta(t) &= x(0)\,\delta(t) \\ x(t)\,\delta(t-t_0) &= x(t_0)\,\delta(t-t_0). \end{aligned}$$

Πράξεις με τη $\delta(t)$

Ολοκλήρωμα παρουσία της $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

όπου t είναι η τιμή του τ για την οποία μηδενίζεται το όρισμα της συνάρτησης $\delta(t-\tau)$.

Γινόμενο συναρτήσεων όταν παράγοντας είναι η $\delta(t)$

$$\begin{aligned} x(t)\ \delta(t) &= x(0)\ \delta(t) \\ x(t)\ \delta(t-t_0) &= x(t_0)\ \delta(t-t_0). \end{aligned}$$

Συνάρτηση βήματος $u[n]$

Ορίζεται ως εξής:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0. \end{cases}$$

Σχήμα 2.11

Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0. \end{cases}$$

Σχήμα 2.12

- $x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$.
- Η $\delta[n]$ υπολογίζεται ως διαφορά πρώτης τάξης από τη $u[n]$:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \overset{k=n-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$.

Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta[n] \;=\; \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0. \end{cases}$$

Σχήμα 2.12

- $x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$.
- Η $\delta[n]$ υπολογίζεται ως διαφορά πρώτης τάξης από τη $u[n]$:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \overset{k=n-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$.

Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης ή μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0. \end{cases}$$

Σχήμα 2.12

- $x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$.
- Η $\delta[n]$ υπολογίζεται ως διαφορά πρώτης τάξης από τη $u[n]$:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \overset{k=n-m}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$.

Πραγματικό εκθετικό σήμα

Το πραγματικό εκθετικό σήμα Δ.Χ. ορίζεται ως

$$x[n] = C\,a^n\,|_{a=e^{\beta}} = C\,e^{\beta\,n} \qquad C, a \in \mathbb{R}.$$

Η παράσταση Ca^n είναι πιό εύχρηστη, γι᾽ αυτό και θα βασιστούμε σ᾽ αυτήν. Ως προς τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a παρατηρούμε ότι:

$\lvert a\rvert < 1$	αποσβεννύμενο εκθετικό
$\lvert a\rvert > 1$	αυξανόμενο εκθετικό
$a > 0$	ομόσημα δείγματα
$a < 0$	ετερόσημα δείγματα
$a = 1$	σταθερό σήμα $x[n] = C$
$a = -1$	$x[n] = \pm C$.

Σχήμα 2.13

Φανταστικό εκθετικό σήμα Δ.Χ. (1)

Ορίζεται ως $x[n] \;=\; e^{j\Omega_0 n} \;=\; \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n.$

- Το φανταστικό εκθετικό Δ.Χ. συχνότητας $(\Omega_0 + 2\pi)$:

  $$e^{j\,(\Omega_0+2\pi)n} \;=\; e^{j2\pi\,n}\,e^{j\,\Omega_0 n} \;=\; e^{j\,\Omega_0 n}$$

  είναι το ίδιο με εκείνο που έχει συχνότητα Ω_0. Άρα διαπιστώνεται διαφορά με τα φανταστικά εκθετικά Σ.Χ., όπου τα σήματα $e^{j\,\omega_0 t}$ είναι διαφορετικά για διαφορετικές τιμές του ω_0.

- Θεωρώντας φανταστικά εκθετικά χρειάζεται να καθορίσουμε ένα διάστημα μήκους 2π στο οποίο να εκλέξουμε την Ω_0: π.χ. $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$, $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$. Για $0 < \Omega_0 < \pi$, ο ρυθμός ταλάντωσης αυξάνει. Αντιθέτως, για $\pi < \Omega_0 < 2\pi$, ο ρυθμός ταλάντωσης ελαττώνεται.

Φανταστικό εκθετικό σήμα Δ.Χ. (1)

Ορίζεται ως $x[n] \;=\; e^{j\Omega_0 n} \;=\; \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n$.

- Το φανταστικό εκθετικό Δ.Χ. συχνότητας $(\Omega_0 + 2\pi)$:

$$e^{j\,(\Omega_0+2\pi)n} \;=\; e^{j2\pi\,n}\,e^{j\,\Omega_0 n} \;=\; e^{j\,\Omega_0 n}$$

  είναι το ίδιο με εκείνο που έχει συχνότητα Ω_0. ΄Αρα διαπιστώνεται διαφορά με τα φανταστικά εκθετικά Σ.Χ., όπου τα σήματα $e^{j\,\omega_0 t}$ είναι διαφορετικά για διαφορετικές τιμές του ω_0.

- Θεωρώντας φανταστικά εκθετικά χρειάζεται να καθορίσουμε ένα διάστημα μήκους 2π στο οποίο να εκλέξουμε την Ω_0: π.χ. $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$, $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$. Για $0 < \Omega_0 < \pi$, ο ρυθμός ταλάντωσης αυξάνει. Αντιθέτως, για $\pi < \Omega_0 < 2\pi$, ο ρυθμός ταλάντωσης ελαττώνεται.

Φανταστικό εκθετικό σήμα Δ.Χ. (2)

Έλεγχος περιοδικότητας:

$$e^{j\,\Omega_0(n+N)} = e^{j\,\Omega_0 n} \Leftrightarrow e^{j\,\Omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \Omega_0\,N = 2\pi\,m\,,\;\; m \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}.$$

Το σήμα $e^{j\,\Omega_0 n}$ δεν είναι περιοδικό για αυθαίρετες τιμές του Ω_0, αλλά μόνο αν $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός. Εάν $x[n]$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N, η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\frac{2\pi}{N}$. Εάν $x[n] = e^{j\,\Omega_0 n}$, $\Omega_0 \neq 0$, τότε

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right).$$

Διαφορές μεταξύ των σημάτων $e^{j\omega_0 t}$ και $e^{j\Omega_0 n}$

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Διαφορετικά σήματα για διαφορετικά ω_0	Ταυτόσημα σήματα για εκθετικά σε συχνότητες που απέχουν 2π
Περιοδικά για οποιαδήποτε εκλογή ω_0	Περιοδικά μόνο εάν $\Omega_0 = \frac{2\pi\, m}{N}$, $N > 0, m \in \mathbb{Z}^{\dagger}$
Θεμελιώδης συχνότητα ω_0	Θεμελιώδης συχνότητα†: $\frac{\Omega_0}{m}$
Θεμελιώδης περίοδος: $\begin{array}{ll} \omega_0 = 0 & \text{απροσδιόριστη} \\ \omega_0 \neq 0 & \frac{2\pi}{\omega_0} \end{array}$	Θεμελιώδης περίοδος†: $\begin{array}{ll} \Omega_0 = 0 & \text{απροσδιόριστη} \\ \Omega_0 \neq 0 & m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \end{array}$

† N και m δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

Αρμονικές Σ.Χ. ονομάζονται τα φανταστικά εκθετικά που έχουν συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους, δηλαδή

$$\phi_k(t) = e^{j\,k\,\left(\frac{2\pi}{T}\right)\,t} \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Είναι σήματα διαφορετικά μεταξύ τους για διαφορετικές τιμές του k. Οι αρμονικές Δ.Χ., κατά αναλογία, είναι

$$\phi_k[n] = e^{j\,k\,\left(\frac{2\pi}{N}\right)\,n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j\,(k+N)\,\left(\frac{2\pi}{N}\right)\,n} = e^{j\,k\,\left(\frac{2\pi}{N}\right)\,n} = \phi_k[n].$$

Άρα μόνο N συνολικά αρμονικές Δ.Χ. είναι διαφορετικές: $\phi_0[n], \phi_1[n], \ldots, \phi_{N-1}[n]$.

Ομοιόμορφη δειγματοληψία

Είναι η δειγματοληψία που πραγματοποιείται σε ισαπέχοντα σημεία και παράγει τα σήματα Δ.Χ. από εκείνα του Σ.Χ. Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της δειγματοληψίας στα φανταστικά εκθετικά:

$$x[n] = e^{j\,\omega_0\,t}\,\big|_{t=n\,T_s} = e^{j\,(\omega_0\,T_s)\,n} = e^{j\,\Omega_0\,n}, \qquad \Omega_0 = \omega_0\,T_s.$$

Το σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό μόνο αν $\frac{\omega_0\,T_s}{2\pi}$ είναι ρητός αριθμός.

Λυμένο παράδειγμα 2.1

Έστω $x(t) = \cos(2\pi\, t)$. Αν T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας, τότε προκύπτει το σήμα Δ.Χ. $x[n] = x(n\,T_s) = \cos(2\pi\, T_s\, n)$. Για τρείς επιλογές της παραμέτρου T_s διερευνούμε αν το σήμα Δ.Χ. που προκύπτει είναι περιοδικό.

α. $T_s = \frac{1}{12}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{1}{12}\, n\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{1}{12}$ είναι ρητός αριθμός.

β. $T_s = \frac{4}{31}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{4}{31}\, n\right) = \cos\left(\frac{8\pi\, n}{31}\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{4}{31}$ είναι ρητός αριθμός.

γ. $T_s = \frac{1}{12\pi}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{12\pi}\right) n\right) = \cos\left(\frac{n}{6}\right)$ δεν είναι περιοδικό, γιατί $\frac{1}{12\pi}$ είναι άρρητος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή περιοδική είναι μόνο η περιβάλλουσα, δηλαδή το σήμα Σ.Χ. που υποβάλλεται σε δειγματοληψία.

Σχήμα 2.14

Λυμένο παράδειγμα 2.1

Έστω $x(t) = \cos(2\pi\, t)$. Αν T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας, τότε προκύπτει το σήμα Δ.Χ. $x[n] = x(n\,T_s) = \cos(2\pi\, T_s\, n)$. Για τρείς επιλογές της παραμέτρου T_s διερευνούμε αν το σήμα Δ.Χ. που προκύπτει είναι περιοδικό.

α. $T_s = \frac{1}{12}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{1}{12}\, n\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{1}{12}$ είναι ρητός αριθμός.

β. $T_s = \frac{4}{31}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{4}{31}\, n\right) = \cos\left(\frac{8\pi\, n}{31}\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{4}{31}$ είναι ρητός αριθμός.

γ. $T_s = \frac{1}{12\pi}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi \left(\frac{1}{12\pi}\right) n\right) = \cos\left(\frac{n}{6}\right)$ δεν είναι περιοδικό, γιατί $\frac{1}{12\pi}$ είναι άρρητος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή περιοδική είναι μόνο η περιβάλλουσα, δηλαδή το σήμα Σ.Χ. που υποβάλλεται σε δειγματοληψία.

Σχήμα 2.14

Λυμένο παράδειγμα 2.1

Έστω $x(t) = \cos(2\pi\, t)$. Αν T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας, τότε προκύπτει το σήμα Δ.Χ. $x[n] = x(n\,T_s) = \cos(2\pi\, T_s\, n)$. Για τρείς επιλογές της παραμέτρου T_s διερευνούμε αν το σήμα Δ.Χ. που προκύπτει είναι περιοδικό.

α. $T_s = \frac{1}{12}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{1}{12}\, n\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{1}{12}$ είναι ρητός αριθμός.

β. $T_s = \frac{4}{31}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\, \frac{4}{31}\, n\right) = \cos\left(\frac{8\pi\, n}{31}\right)$ περιοδικό, επειδή $\frac{4}{31}$ είναι ρητός αριθμός.

γ. $T_s = \frac{1}{12\pi}$: $\quad x[n] = \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{12\pi}\right) n\right) = \cos\left(\frac{n}{6}\right)$ δεν είναι περιοδικό, γιατί $\frac{1}{12\pi}$ είναι άρρητος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή περιοδική είναι μόνο η περιβάλλουσα, δηλαδή το σήμα Σ.Χ. που υποβάλλεται σε δειγματοληψία.

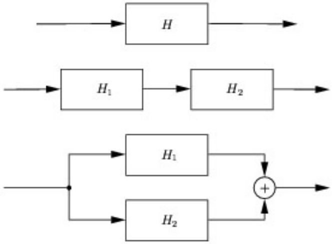
Σχήμα 2.14

Ορισμός

Είναι διαδικασία που επιφέρει το μετασχηματισμό ενός σήματος. Συμβολικά λέμε:

$$x(t) \longrightarrow y(t) \qquad x[n] \longrightarrow y[n]$$
$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} \qquad y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\}.$$

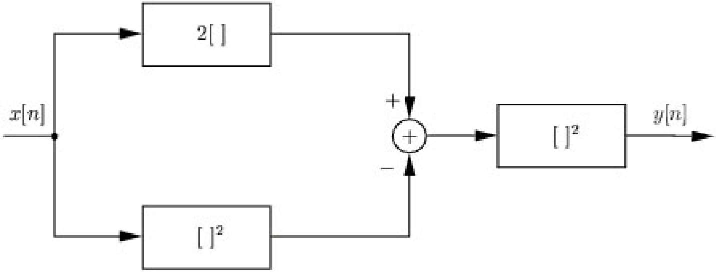
Τα συστήματα μπορούν να συνδεθούν σε σειρά ή παράλληλα:



Σχήμα 2.15: Διασυνδέσεις συστημάτων.

Λυμένο παράδειγμα 2.2

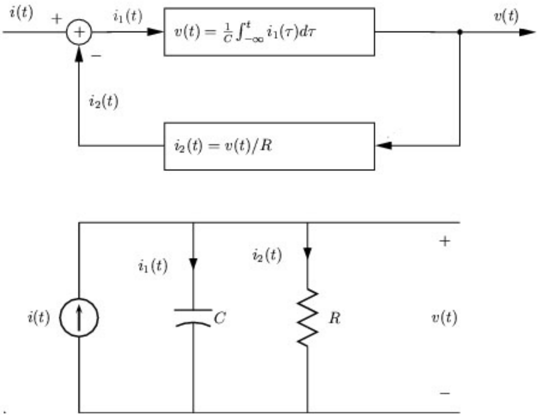
Να αναπαραστήσετε σχηματικά το σύστημα που ορίζεται από την σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = (2\,x[n] - x^2[n])^2$.



Σχήμα 2.16: Σύστημα του Παραδείγματος 2.2.

Συνδεσμολογία ανάδρασης

Τα συστήματα μπορούν επίσης να διασυνδεθούν σε συνδεσμολογία ανάδρασης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνδεσμολογίας ανάδρασης μελετάται ακολούθως.



Σχήμα 2.17: Απλή συνδεσμολογία ανάδρασης.

Λυμένο παράδειγμα 2.3

Το παράλληλο RC κύκλωμα διεγείρεται από μιά πηγή ρεύματος $i(t)$. Προφανώς η αντίσταση R διαρρέεται από ρεύμα $i_2(t)$ που δίνεται από τη σχέση

$$i_2(t) = \frac{v(t)}{R}$$

ενώ η τάση $v(t)$ που αναπτύσσεται στα άκρα του πυκνωτή σχετίζεται με το ρεύμα που τον διαρρέει δια της

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)d\tau.$$

Αλλά $i_1(t) = i(t) - i_2(t)$, οπότε ενόσω αυξάνει η τάση στα άκρα του πυκνωτή, ολοένα και ισχυρότερο ρεύμα διαρρέει την αντίσταση και αναγκάζει τον πυκνωτή να εκφορτιστεί. Γραφικές παραστάσεις

Ιδιότητες συστημάτων (1)

Σύστημα χωρίς μνήμη

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την τιμή της εισόδου την ίδια στιγμή, π.χ.

$$y(t) = a\,x(t).$$

Σύστημα με μνήμη

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τις προγενέστερες τιμές της εισόδου, π.χ.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

η τάση στα άκρα του πυκνωτή.

Ιδιότητες συστημάτων (1)

Σύστημα χωρίς μνήμη

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την τιμή της εισόδου την ίδια στιγμή, π.χ.

$$y(t) = a\, x(t).$$

Σύστημα με μνήμη

Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τις προγενέστερες τιμές της εισόδου, π.χ.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

η τάση στα άκρα του πυκνωτή.

Ιδιότητες συστημάτων (2)

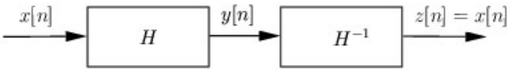
Αντιστρέψιμο σύστημα

Διακριτές είσοδοι οδηγούν σε διακριτές εξόδους, π.χ.

Ευθύ: $y(t) = 2\,x(t)$. Αντίστροφο: $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$.

Ευθύ: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$. Αντίστροφο: $z[n] = y[n] - y[n-1]$.

Αντικαθιστώντας μπορούμε να δείξουμε ότι $z(t) = x(t)$ και $z[n] = x[n]$.



Σχήμα 2.18: Διασύνδεση ευθέος και αντίστροφου συστήματος.

Ιδιότητες συστημάτων (3)

Αιτιατότητα (causality)

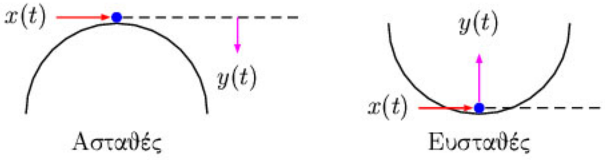
Ένα σύστημα λέγεται αιτιατό, εάν η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την είσοδο στην παρούσα στιγμή και το παρελθόν.

Παραδείγματα	
αιτιατών συστημάτων	μη αιτιατών συστημάτων
$y(t) = x(t-1)$	$y[n] = x[n] - x[n+1]$
$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$y(t) = x(t+1)$
Συστήματα χωρίς μνήμη	$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$

Ιδιότητες συστημάτων (4)

Ευστάθεια (stability)

Ευσταθές καλείται το σύστημα εκείνο για το οποίο μικρές μεταβολές της εισόδου οδηγούν σε φραγμένες μεταβολές της εξόδου, π.χ. η κατακόρυφη απομάκρυνση $y(t)$ της σφαίρας στο κοίλο του επόμενου Σχήματος μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη, ακόμη και για μικρή μεταβολή της δύναμης $x(t)$ που τη διεγείρει. Τούτο δεν συμβαίνει όταν η σφαίρα είναι μέσα στην κυρτή επιφάνεια.



Σχήμα 2.19: Ασταθή και ευσταθή συστήματα.

Ιδιότητες συστημάτων (5)

BIBO ευστάθεια

Εάν $|x[n]| < B$ συνεπάγεται $|y[n]| < C$, τότε το σύστημα λέγεται ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO: Bounded input-bounded output).

Χρονοαμεταβλητότητα (time-invariance)

Χρονική μετατόπιση της εισόδου προκαλεί χρονική μετατόπιση της εξόδου κατά το ίδιο ποσό, δηλαδή αν $y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\}$, τότε $y[n - n_0] = \mathrm{T}\{x[n - n_0]\}$.

Ιδιότητες συστημάτων (5)

BIBO ευστάθεια

Εάν $|x[n]| < B$ συνεπάγεται $|y[n]| < C$, τότε το σύστημα λέγεται ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO: Bounded input-bounded output).

Χρονοαμεταβλητότητα (time-invariance)

Χρονική μετατόπιση της εισόδου προκαλεί χρονική μετατόπιση της εξόδου κατά το ίδιο ποσό, δηλαδή αν $y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\}$, τότε $y[n - n_0] = \mathrm{T}\{x[n - n_0]\}$.

Ιδιότητες συστημάτων (6)

Γραμμικότητα

Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

1. Προσθετικότητα: Αν $x_1(t) \to y_1(t)$ και $x_2(t) \to y_2(t)$, τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t) \text{ ή } \mathrm{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathrm{T}\{x_1(t)\} + \mathrm{T}\{x_2(t)\}$$

2. Ομοιογένεια: Αν $x(t) \to y(t)$ και $a \neq 0$, τότε

$$ax(t) \to ay(t) \text{ ή } \mathrm{T}\{ax(t)\} = a\mathrm{T}\{x(t)\}.$$

Παραδείγματα μη γραμμικών συστημάτων: $y(t) = x^2(t)$, $y(t) = \sin[x(t)]$.

Ιδιότητες συστημάτων (7)

Υπέρθεση

Για τα γραμμικά συστήματα μόνο ισχύει η αρχή της υπέρθεσης (superposition), δηλαδή αν $x[n] = \sum_k a_k\, x_k[n]$ τότε

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = \mathrm{T}\{\sum_k a_k\, x_k[n]\} = \sum_k a_k\, \mathrm{T}\{x_k[n]\} = \sum_k a_k\, y_k[n].$$

Σημαντική παρατήρηση: Στα γραμμικά συστήματα ισχύει:

μηδενική είσοδος $\rightarrow$ μηδενική έξοδος.

Το σύστημα $y[n] = 2x[n] + 3$ δεν είναι γραμμικό, μολονότι η εξίσωση είναι γραμμική. Λέμε ότι είναι στοιχειωδώς γραμμικό σύστημα (incrementally linear system).

Ενέργεια και ισχύς (1)

Ας ξεκινήσουμε από το παράδειγμα μιας ηλεκτρικής αντίστασης R που τίθεται υπό τάση $v(t)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$. Τότε

- Στιγμιαία ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$.
- Ολική ενέργεια στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\, dt.$$

- Μέση ισχύς στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt.$$

Γενίκευση: ενέργεια σήματος $x(t)$ στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt \text{ ή } \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

Ενέργεια και ισχύς (1)

Ας ξεκινήσουμε από το παράδειγμα μιας ηλεκτρικής αντίστασης R που τίθεται υπό τάση $v(t)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$. Τότε

- Στιγμιαία ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$.
- Ολική ενέργεια στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\, dt.$$

- Μέση ισχύς στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt.$$

Γενίκευση: ενέργεια σήματος $x(t)$ στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt \text{ ή } \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

Ενέργεια και ισχύς (1)

Ας ξεκινήσουμε από το παράδειγμα μιας ηλεκτρικής αντίστασης R που τίθεται υπό τάση $v(t)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$. Τότε

- Στιγμιαία ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$.
- Ολική ενέργεια στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\, dt.$$

- Μέση ισχύς στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt.$$

Γενίκευση: ενέργεια σήματος $x(t)$ στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt \text{ ή } \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

Ενέργεια και ισχύς (1)

Ας ξεκινήσουμε από το παράδειγμα μιας ηλεκτρικής αντίστασης R που τίθεται υπό τάση $v(t)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i(t)$. Τότε

- Στιγμιαία ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$.
- Ολική ενέργεια στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\, dt.$$

- Μέση ισχύς στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt.$$

Γενίκευση: ενέργεια σήματος $x(t)$ στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt \text{ ή } \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

Ενέργεια και ισχύς (2)

- Γενικότερα ορίζουμε ως ενέργεια:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- και ως μέση ισχύ:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt.$$

Ενέργεια και ισχύς (2)

- Γενικότερα ορίζουμε ως ενέργεια:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- και ως μέση ισχύ:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt.$$

Ενέργεια και ισχύς (3)

Σήματα ενέργειας και ισχύος

- Σήματα ενέργειας: Έχουν φραγμένη E_∞.
- Για περιοδικά σήματα η E_∞ είναι άπειρη, αλλά η ενέργεια ανά περίοδο (δηλαδή, η ισχύς) είναι φραγμένη π.χ.

$$
\begin{aligned}
E_p &= \int_0^{T_0} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = \int_0^{T_0} dt = T_0 \\
P_p &= \frac{E_p}{T_0} = 1
\end{aligned}
$$

όπως και η μέση ισχύς

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = 1.$$

- Σήματα ισχύος: Έχουν φραγμένη P_∞.

Ενέργεια και ισχύς (3)

Σήματα ενέργειας και ισχύος

- Σήματα ενέργειας: Έχουν φραγμένη E_∞.
- Για περιοδικά σήματα η E_∞ είναι άπειρη, αλλά η ενέργεια ανά περίοδο (δηλαδή, η ισχύς) είναι φραγμένη π.χ.

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^{T_0} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = \int_0^{T_0} dt = T_0 \\ P_p &= \frac{E_p}{T_0} = 1 \end{aligned}$$

όπως και η μέση ισχύς

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = 1.$$

- Σήματα ισχύος: Έχουν φραγμένη P_∞.

Ενέργεια και ισχύς (3)

Σήματα ενέργειας και ισχύος

- Σήματα ενέργειας: Έχουν φραγμένη E_∞.
- Για περιοδικά σήματα η E_∞ είναι άπειρη, αλλά η ενέργεια ανά περίοδο (δηλαδή, η ισχύς) είναι φραγμένη π.χ.

$$
\begin{aligned}
E_p &= \int_0^{T_0} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = \int_0^{T_0} dt = T_0 \\
P_p &= \frac{E_p}{T_0} = 1
\end{aligned}
$$

όπως και η μέση ισχύς

$$
P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\exp(j\omega_0 t)|^2 \, dt = 1.
$$

- Σήματα ισχύος: Έχουν φραγμένη P_∞.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης