ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **3**: Γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Γραμμικά Χρονοαμετάβλητα Συστήματα

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Βασικές ιδιότητες συστημάτων

- Γραμμικότητα
- Χρονοαμετάβλητο

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας

- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Εισαγωγή

Βασικές ιδιότητες συστημάτων

- Γραμμικότητα
- Χρονοαμετάβλητο

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας

- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Βασικές ιδιότητες συστημάτων

- Γραμμικότητα
- Χρονοαμετάβλητο

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας

- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Εισαγωγή

Βασικές ιδιότητες συστημάτων

- Γραμμικότητα
- Χρονοαμετάβλητο

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας

- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Εισαγωγή

Βασικές ιδιότητες συστημάτων

- Γραμμικότητα
- Χρονοαμετάβλητο

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας

- Πολλές φυσικές διεργασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν γραμμικά χρονοαμετάβλητα (Γ.Χ.Α.) συστήματα.
- Να αναπτύξουμε και να κατανοήσουμε τις ιδιότητες και τα εργαλεία για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Να εξετάσουμε μερικές από τις πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών των εργαλείων στην αναπαράσταση των Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Υπέρθεση-Βασικά σήματα

Αρχή υπέρθεσης

Εάν

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots, \tag{1}$$

και $y_i(t) = \mathrm{T}\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots \tag{2}$$

Ποιά είναι τα βασικά σήματα $x_i(t)$ στα οποία πρέπει να αναλύσουμε ένα δοσμένο σήμα $x(t)$ στην (1);

Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης

- Δομικό στοιχείο για την αποσύνθεση γενικών σημάτων τόσο στο συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο.
- Πλήρης χαρακτηρισμός ενός Γ.Χ.Α. συστήματος με όρους της απόκρισής του σε σήμα μοναδιαίας ώσης (αλλιώς γνωστής και ως κρουστικού παλμού). Η απόκριση αυτή είναι γνωστή ως κρουστική απόκριση.

Υπέρθεση-Βασικά σήματα

Αρχή υπέρθεσης

Εάν

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots, \tag{1}$$

και $y_i(t) = \mathrm{T}\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \ldots \tag{2}$$

Ποιά είναι τα βασικά σήματα $x_i(t)$ στα οποία πρέπει να αναλύσουμε ένα δοσμένο σήμα $x(t)$ στην (1);

Συνάρτηση μοναδιαίας ώσης

- Δομικό στοιχείο για την αποσύνθεση γενικών σημάτων τόσο στο συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο.
- Πλήρης χαρακτηρισμός ενός Γ.Χ.Α. συστήματος με όρους της απόκρισής του σε σήμα μοναδιαίας ώσης (αλλιώς γνωστής και ως κρουστικού παλμού). Η απόκριση αυτή είναι γνωστή ως κρουστική απόκριση.

Κρουστική απόκριση

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος

$$\text{σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος} \left\langle \begin{array}{l} \text{άθροισμα συνέλιξης στο Δ.Χ.} \\ \\ \text{ολοκλήρωμα συνέλιξης στο Σ.Χ.} \end{array} \right.$$

Γ.Χ.Α. συστήματα

- Με χρήση της συνέλιξης οι ιδιότητες των Γ.Χ.Α. συστημάτων εξειδικεύονται σε ιδιότητες που πρέπει να πληροί η κρουστική απόκριση.
- Τάξη δυναμικών συστημάτων που είναι Γ.Χ.Α.:
  - Υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές στο Σ.Χ.
  - Στο Δ.Χ. αντιστοιχούν σε υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.

Κρουστική απόκριση

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος

σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος ⟨ άθροισμα συνέλιξης στο Δ.Χ. / ολοκλήρωμα συνέλιξης στο Σ.Χ.

Γ.Χ.Α. συστήματα

- Με χρήση της συνέλιξης οι ιδιότητες των Γ.Χ.Α. συστημάτων εξειδικεύονται σε ιδιότητες που πρέπει να πληροί η κρουστική απόκριση.
- Τάξη δυναμικών συστημάτων που είναι Γ.Χ.Α.:
    1. Υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές στο Σ.Χ.
    2. Στο Δ.Χ. αντιστοιχούν σε υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος

$$\text{σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος} \left\langle \begin{array}{l} \text{άθροισμα συνέλιξης στο Δ.Χ.} \\[1em] \text{ολοκλήρωμα συνέλιξης στο Σ.Χ.} \end{array} \right.$$

Γ.Χ.Α. συστήματα

- Με χρήση της συνέλιξης οι ιδιότητες των Γ.Χ.Α. συστημάτων εξειδικεύονται σε ιδιότητες που πρέπει να πληροί η κρουστική απόκριση.
- Τάξη δυναμικών συστημάτων που είναι Γ.Χ.Α.:
  1. Υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές στο Σ.Χ.
  2. Στο Δ.Χ. αντιστοιχούν σε υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.

Κρουστική απόκριση

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος

$$\text{σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος} \left\langle \begin{array}{l} \text{άθροισμα συνέλιξης στο Δ.Χ.} \\ \\ \text{ολοκλήρωμα συνέλιξης στο Σ.Χ.} \end{array} \right.$$

Γ.Χ.Α. συστήματα

- Με χρήση της συνέλιξης οι ιδιότητες των Γ.Χ.Α. συστημάτων εξειδικεύονται σε ιδιότητες που πρέπει να πληροί η κρουστική απόκριση.
- Τάξη δυναμικών συστημάτων που είναι Γ.Χ.Α.:
  1. Υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές στο Σ.Χ.
  2. Στο Δ.Χ. αντιστοιχούν σε υποσύνολο των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.

Αντίδοτα στον υπολογισμό της συνέλιξης

Μετασχηματισμοί

1. Ο υπολογισμός της εξόδου ενός Γ.Χ.Α. δια της συνέλιξης είναι σχετικώς πολύπλοκος.
2. Από την εμπειρία μας, η επίλυση Γ.Δ.Ε. στο πεδίο του χρόνου είναι επίσης πολύπλοκη.
3. Υπάρχουν τεχνικές που μπορούν να μας διευκολύνουν; Τέτοιες τεχνικές εδράζονται σε πεδία μετασχηματισμών, όπως οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace στο Σ.Χ. και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier Δ.Χ. και $\mathcal{Z}$.

Αντίδοτα στον υπολογισμό της συνέλιξης

Μετασχηματισμοί

1. Ο υπολογισμός της εξόδου ενός Γ.Χ.Α. δια της συνέλιξης είναι σχετικώς πολύπλοκος.
2. Από την εμπειρία μας, η επίλυση Γ.Δ.Ε. στο πεδίο του χρόνου είναι επίσης πολύπλοκη.
3. Υπάρχουν τεχνικές που μπορούν να μας διευκολύνουν; Τέτοιες τεχνικές εδράζονται σε πεδία μετασχηματισμών, όπως οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace στο Σ.Χ. και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier Δ.Χ. και $\mathbb{Z}$.

Αντίδοτα στον υπολογισμό της συνέλιξης

Μετασχηματισμοί

1. Ο υπολογισμός της εξόδου ενός Γ.Χ.Α. δια της συνέλιξης είναι σχετικώς πολύπλοκος.
2. Από την εμπειρία μας, η επίλυση Γ.Δ.Ε. στο πεδίο του χρόνου είναι επίσης πολύπλοκη.
3. Υπάρχουν τεχνικές που μπορούν να μας διευκολύνουν; Τέτοιες τεχνικές εδράζονται σε πεδία μετασχηματισμών, όπως οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace στο Σ.Χ. και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier Δ.Χ. και $\mathcal{Z}$.

Αναπαράσταση σημάτων Δ.Χ. με κρουστικούς παλμούς (1)

Ιδιότητα της ολίσθησης της $\delta[n]$

Είναι γνωστό ότι:

$$\begin{aligned} x[-1]\delta[n+1] &= \begin{cases} x[-1] & \text{αν } n=-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \\ x[0]\delta[n] &= \begin{cases} x[0] & \text{αν } n=0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \end{aligned}$$

Γενικότερα:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{3}$$

δηλαδή, κάθε ακολουθία $x[n]$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων συναρτήσεων μοναδιαίας ώσης $\delta[n-k]$, όπου οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού είναι οι τιμές της ακολουθίας.

Αποσύνθεση σήματος Δ.Χ.

Αναπαράσταση σημάτων Δ.Χ. με κρουστικούς παλμούς (2)

Παράδειγμα 3.1

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε το κύρος της (3) αν ανακαλέσουμε από τη μνήμη μας τον ορισμό της συνάρτησης βήματος $u[n]$. Έχουμε:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{αν } n < 0 \\ 1 & \text{αν } n \geq 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]. \tag{4}$$

Προφανώς η (4) επαληθεύει την αποσύνθεση (3).

Αναπαράσταση σημάτων Σ.Χ. με κρουστικούς παλμούς (1)

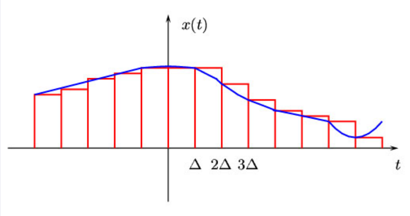
Ιδιότητα της ολίσθησης της $\delta(t)$

Ας ξαναθυμηθούμε τη συνάρτηση $\delta_\Delta(t)$ ελαφρώς παραλλαγμένη:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{αν } 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ προσεγγίζεται με "σκαλοπάτια" (staircases) δια της $\widehat{x}(t)$:

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta. \quad (5)$$



Αναπαράσταση σημάτων Σ.Χ. με κρουστικούς παλμούς (2)

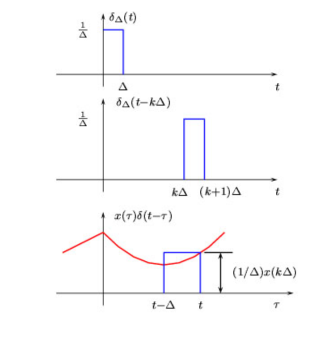
Στο όριο για $\Delta \to 0$

παίρνουμε $k\Delta \to \tau$, $x(k\Delta) \to x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - k\Delta) \to \delta(t-\tau)$, $\Delta \to d\tau$ και το άθροισμα (5) αντικαθίσταται με ολοκλήρωμα, ενώ $\widehat{x}(t) \to x(t)$. Οπότε:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (6)$$

μπορεί να ερμηνεύσει Η (5) μπορεί να ερμηνευτεί ως αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος (6) με τη μέθοδο του τραπεζίου.

Υπολογισμός εμβαδών



Αξίζει να προσεχθεί είναι η μετάβαση από τη συνάρτηση $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ στη $\delta(t-\tau)$. Ενώ η πρώτη συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ως συνάρτηση του t, η δεύτερη συνάρτηση είναι συνάρτηση του τ. Η $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ λαμβάνει την τιμή 1 για $k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta$. Η $\delta(t-\tau)$ λαμβάνει την τιμή 1 για $t-\Delta \leq \tau \leq t$.

Παράδειγμα 3.2

Θα επαληθεύσουμε την ισχύ της (6) στην περίπτωση της συνάρτησης βήματος $u(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\delta(t-\tau)d\tau = u(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u(t)$$

όπου κάναμε χρήση των δύο ταυτοτήτων που ισχύουν για τις συναρτήσεις δέλτα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} u(\tau)\delta(t-\tau) &= u(t)\delta(t-\tau) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau &\equiv 1. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{αν } t<0 \\ 1 & \text{αν } t>0 \end{cases} = u(t).$$

Αναπαράσταση σημάτων με κρουστικούς παλμούς

Συμπέρασμα

Οποιοδήποτε σήμα μπορεί να αποσυντεθεί χρησιμοποιώντας τρένο κρουστικών παλμών που έχουν πλάτος τις τιμές του σήματος στις χρονικές στιγμές που συμβαίνουν οι συναρτήσεις δέλτα, δηλαδή

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{7}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

ʼΑθροισμα συνέλιξης (1)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

Έστω $h_k[n]$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta[n-k]$. Λόγω υπέρθεσης

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n]. \tag{9}$$

Εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σ΄ ένα σύνολο μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την έξοδο σε οποιαδήποτε είσοδο:

1. Διέγερση (Σχήμα 3.3α).
2. Αποκρίσεις σε $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ και $\delta[n+1]$ (Σχήμα 3.3β).
3. Ζεύγη μη-μηδενικών συνιστωσών της διέγερσης και αντιστοίχων αποκρίσεων καθώς και τα αθροίσματά τους (Σχήμα 3.3γ).

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] \triangleq T\{\delta[n]\} = h_0[n]. \tag{10}$$

Άθροισμα συνέλιξης (1)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

Έστω $h_k[n]$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta[n-k]$. Λόγω υπέρθεσης

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n]. \tag{9}$$

Εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σ' ένα σύνολο μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την έξοδο σε οποιαδήποτε είσοδο:

1. Διέγερση (Σχήμα 3.3α).
2. Αποκρίσεις σε $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ και $\delta[n+1]$ (Σχήμα 3.3β).
3. Ζεύγη μη-μηδενικών συνιστωσών της διέγερσης και αντιστοίχων αποκρίσεων καθώς και τα αθροίσματά τους (Σχήμα 3.3γ).

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] \triangleq T\{\delta[n]\} = h_0[n]. \tag{10}$$

Άθροισμα συνέλιξης (1)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

Έστω $h_k[n]$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta[n-k]$. Λόγω υπέρθεσης

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n]. \tag{9}$$

Εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σ' ένα σύνολο μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την έξοδο σε οποιαδήποτε είσοδο:

1. Διέγερση (Σχήμα 3.3α).
2. Αποκρίσεις σε $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ και $\delta[n+1]$ (Σχήμα 3.3β).
3. Ζεύγη μη-μηδενικών συνιστωσών της διέγερσης και αντιστοίχων αποκρίσεων καθώς και τα αθροίσματά τους (Σχήμα 3.3γ).

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] \triangleq T\{\delta[n]\} = h_0[n]. \tag{10}$$

Άθροισμα συνέλιξης (1)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

Έστω $h_k[n]$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta[n-k]$. Λόγω υπέρθεσης

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n]. \tag{9}$$

Εάν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σ' ένα σύνολο μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε την έξοδο σε οποιαδήποτε είσοδο:

1. Διέγερση (Σχήμα 3.3α).
2. Αποκρίσεις σε $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ και $\delta[n+1]$ (Σχήμα 3.3β).
3. Ζεύγη μη-μηδενικών συνιστωσών της διέγερσης και αντιστοίχων αποκρίσεων καθώς και τα αθροίσματά τους (Σχήμα 3.3γ).

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] \triangleq \mathrm{T}\{\delta[n]\} = h_0[n]. \tag{10}$$

ʼΑθροισμα συνέλιξης (2)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

- Αν το σύστημα είναι επιπλέον χρονοαμετάβλητο ($h_k[n] = h[n-k]$), τότε η (9) παίρνει τη μορφή του αθροίσματος της συνέλιξης:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \triangleq (x * h)[n]. \tag{11}$$

- Η (11) προσδιορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. είναι γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων και ανεστραμμένων κρουστικών αποκρίσεων με συντελεστές τις τιμές της διεγέρσεως στις διάφορες χρονικές στιγμές, όπως στο Σχήμα 3.4.
- Ας ξαναγράψουμε με τη χρήση της συνέλιξης την (7). ʼΕχουμε $x[n] = (x * \delta)[n]$. ʼΑρα η συνάρτηση $\delta[n]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης.

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

- Αν το σύστημα είναι επιπλέον χρονοαμετάβλητο ($h_k[n] = h[n-k]$), τότε η (9) παίρνει τη μορφή του αθροίσματος της συνέλιξης:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \triangleq (x * h)[n]. \tag{11}$$

- Η (11) προσδιορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. είναι γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων και ανεστραμμένων κρουστικών αποκρίσεων με συντελεστές τις τιμές της διεγέρσεως στις διάφορες χρονικές στιγμές, όπως στο Σχήμα 3.4.
- Ας ξαναγράψουμε με τη χρήση της συνέλιξης την (7). Έχουμε $x[n] = (x * \delta)[n]$. Άρα η συνάρτηση $\delta[n]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης.

Άθροισμα συνέλιξης (2)

Σχέση εισόδου-εξόδου Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ.

- Αν το σύστημα είναι επιπλέον χρονοαμετάβλητο ($h_k[n] = h[n-k]$), τότε η (9) παίρνει τη μορφή του αθροίσματος της συνέλιξης:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \triangleq (x * h)[n]. \tag{11}$$

- Η (11) προσδιορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. είναι γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων και ανεστραμμένων κρουστικών αποκρίσεων με συντελεστές τις τιμές της διεγέρσεως στις διάφορες χρονικές στιγμές, όπως στο Σχήμα 3.4.
- Ας ξαναγράψουμε με τη χρήση της συνέλιξης την (7). Έχουμε $x[n] = (x * \delta)[n]$. Άρα η συνάρτηση $\delta[n]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης.

Άθροισμα συνέλιξης (3)

Βασικές ιδιότητες της συνέλιξης

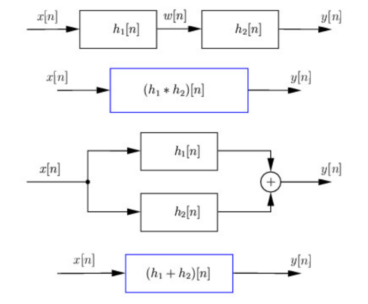
1. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $(x * h)[n] = (h * x)[n]$. Πράγματι

$$(x * h)[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \overset{n-k=l}{=} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n-l]\, h[l] \triangleq (h * x)[n].$$

2. Προσεταιριστική ιδιότητα: $[x * (h_1 * h_2)][n] = [(x * h_1) * h_2][n]$. Αξιοποιείται στον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του Γ.Χ.Α. συστήματος που ισοδυναμεί με τη σειριακή διασύνδεση ή συνδεσμολογία αλυσίδας δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων. Η συνδεσμολογία αλυσίδας Γ.Χ.Α. συστημάτων είναι ανεξάρτητη της σειράς με την οποία συνδέονται τα συστήματα.
3. Επιμεριστική ιδιότητα: $[x * (h_1 + h_2)][n] = (x * h_1)[n] + (x * h_2)[n]$. Αξιοποιείται στον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του Γ.Χ.Α. συστήματος που ισοδυναμεί με την παράλληλη συνδεσμολογία δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων.

Άθροισμα συνέλιξης (4)

Βασικές ιδιότητες της συνέλιξης



Ό,τι ειπώθηκε ισχύει μόνο για Γ.Χ.Α. συστήματα. Η απόκριση μοναδιαίου δείγματος δεν χαρακτηρίζει πλήρως τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος.

Άθροισμα συνέλιξης (5)

Παράδειγμα 3.3

Έστω η απόκριση μοναδιαίου δείγματος

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Το μοναδικό Γ.Χ.Α. σύστημα που έχει τέτοια κρουστική απόκριση είναι μόνο το:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]. \tag{12}$$

Υπάρχουν **πολλά** μη γραμμικά συστήματα που έχουν αυτή την απόκριση σε είσοδο $\delta[n]$ π.χ.

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2 \tag{13}$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1]) \tag{14}$$

όπου $\max(a, b)$ ο μέγιστος των a και b.

Άθροισμα συνέλιξης (6)

Λύση

Για το Γ.Χ.Α. σύστημα (12) έχουμε

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Για το μη γραμμικό σύστημα (13) προκύπτει ότι η απόκριση σε είσοδο $\delta[n]$ είναι

$$h_1[n] = (\delta[n] + \delta[n-1])^2 = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

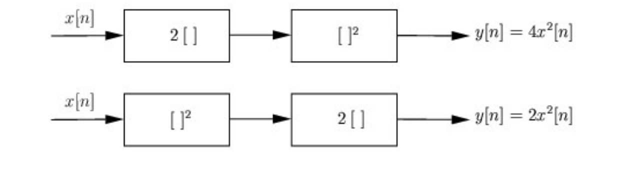
Παρομοίως για το σύστημα (14) ισχύει

$$h_2[n] = \max(\delta[n], \delta[n-1]) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0, 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Εξάλλου στα μη γραμμικά συστήματα οι τελεστές δεν αντιμετατίθενται, όπως εύγλωττα υποδεικνύει το Σχήμα 3.6.

Άθροισμα συνέλιξης (7)

Σχήμα 3.6



Ολοκλήρωμα συνέλιξης (1)

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ.

Έστω ένα Γ.Χ.Α. σύστημα που διεγείρεται από σήμα $x(t)$ και παράγει απόκριση $y(t)$. Είδαμε ότι η διέγερση μπορεί να αποσυντεθεί ως

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, \delta_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta.$$

Έστω $h_{k\Delta}(t)$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε είσοδο $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ τότε:

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\, h_{k\Delta}(t)\, \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau \qquad (15)$$

όπου $h_\tau(t)$ είναι η απόκριση του συστήματος σε είσοδο $\delta(t - \tau)$. Το ίδιο θα μπορούσε να επιτευχθεί και με εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης στην $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau$. Για την (15) μοναδική απαίτηση είναι το σύστημα να είναι γραμμικό.

Ολοκλήρωμα συνέλιξης (2)

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ.

Αν επιπλέον είναι και χρονοαμετάβλητο τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \triangleq (x * h)(t). \qquad (16)$$

Η (16) ορίζει ότι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος συνεχούς χρόνου δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης της διέγερσης με την κρουστική απόκριση. Για το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ισχύουν οι ιδιότητες που είδαμε και στην περίπτωση Δ.Χ.:

1. Αντιμεταθετικότητα
2. Προσεταιριστικότητα
3. Επιμεριστικότητα.

Αναγνωρίζουμε πάλι ότι η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (1)

Γ.Χ.Α. συστήματα με ή χωρίς μνήμη

Ένα σύστημα είναι αμνήμον, εάν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό συμβαίνει μόνο αν:

$$h[n] = 0 \quad \forall n \neq 0 \Leftrightarrow \exists K : \quad h[n] = K\,\delta[n]$$

όπου $K = h[0]$. Το σύστημα προσδιορίζεται από την $y[n] = K\,x[n]$. Πράγματι,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]h[0] + \sum_{n \neq k} x[k]h[n-k] = Kx[n]$$

όπου κάναμε χρήση των

$$\begin{aligned} h[0] &= K && \text{αν } k = n \\ h[n-k] &= 0 && \text{αν } k \neq n. \end{aligned}$$

Κατ' αναλογία τα ίδια ισχύουν και για συστήματα συνεχούς χρόνου.

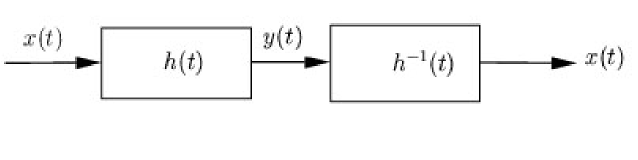
Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (2)

Αντιστρεψιμότητα Γ.Χ.Α. συστημάτων

Έστω Γ.Χ.Α. Σ.Χ. με κρουστική απόκριση $h(t)$. Εάν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι αντιστρέψιμο, τότε έχει Γ.Χ.Α. αντίστροφο σύστημα $h^{-1}(t)$ τέτοιο ώστε

$$(h * h^{-1})(t) = \delta(t). \tag{17}$$

Για συστήματα Δ.Χ. έχουμε $(h * h^{-1})[n] = \delta[n]$. Το Σχήμα 3.7 επεξηγεί την εξίσωση (17).



Παράδειγμα 3.4

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{18}$$

Αν $t_0 > 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα καθυστέρησης (delay), ενώ αν $t_0 < 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα προώθησης (advance). Βλέπε Σχήμα 3.8

- Προφανώς, η κρουστική απόκριση του συστήματος (18) είναι $h(t) = \delta(t - t_0)$, γιατί
- $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0)$.
- Το αντίστροφο σύστημα της βαθμίδας καθυστέρησης είναι η βαθμίδα προώθησης, δηλαδή $h^{-1}(t) = \delta(t + t_0)$. Πράγματι
-

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0)\delta(t - \tau + t_0)d\tau = x(\tau - t_0)\big|_{\tau = t + t_0} = x(t).$$

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (3)

Παράδειγμα 3.4

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{18}$$

Αν $t_0 > 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα καθυστέρησης (delay), ενώ αν $t_0 < 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα προώθησης (advance). Βλέπε Σχήμα 3.8

- Προφανώς, η κρουστική απόκριση του συστήματος (18) είναι $h(t) = \delta(t - t_0)$, γιατί
- $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0)$.
- Το αντίστροφο σύστημα της βαθμίδας καθυστέρησης είναι η βαθμίδα προώθησης, δηλαδή $h^{-1}(t) = \delta(t + t_0)$. Πράγματι
-

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0)\delta(t - \tau + t_0)d\tau = x(\tau - t_0)\,|_{\tau=t+t_0} = x(t).$$

Παράδειγμα 3.4

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{18}$$

Αν $t_0 > 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα καθυστέρησης (delay), ενώ αν $t_0 < 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα προώθησης (advance). Βλέπε Σχήμα 3.8

- Προφανώς, η κρουστική απόκριση του συστήματος (18) είναι $h(t) = \delta(t - t_0)$, γιατί
- $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0)$.
- Το αντίστροφο σύστημα της βαθμίδας καθυστέρησης είναι η βαθμίδα προώθησης, δηλαδή $h^{-1}(t) = \delta(t + t_0)$. Πράγματι
- $$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0)\delta(t - \tau + t_0)d\tau = x(\tau - t_0)\mid_{\tau = t + t_0} = x(t).$$

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (3)

Παράδειγμα 3.4

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{18}$$

Αν $t_0 > 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα καθυστέρησης (delay), ενώ αν $t_0 < 0$ το σύστημα λέγεται βαθμίδα προώθησης (advance). Βλέπε Σχήμα 3.8

- Προφανώς, η κρουστική απόκριση του συστήματος (18) είναι $h(t) = \delta(t - t_0)$, γιατί
- $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = x(t - t_0)$.
- Το αντίστροφο σύστημα της βαθμίδας καθυστέρησης είναι η βαθμίδα προώθησης, δηλαδή $h^{-1}(t) = \delta(t + t_0)$. Πράγματι
- $$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t_0)\delta(t - \tau + t_0)d\tau = x(\tau - t_0)\,|_{\tau=t+t_0} = x(t).$$

Παράδειγμα 3.5

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = u[n]$.

- Η έξοδος του συστήματος αυτού σε αυθαίρετη είσοδο είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \overset{n-k\geq 0}{=} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}_{\text{συσσωρευτής ή αθροιστής}}. \qquad (19)$$

- Το σύστημα αυτό είναι αντιστρέψιμο και το αντίστροφό του δίνεται από την

$$z[n] = \underbrace{x[n] - x[n-1]}_{\text{διαφορά πρώτης τάξης}}. \qquad (20)$$

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (4)

Παράδειγμα 3.5

Θεωρήστε το Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = u[n]$.

- Η έξοδος του συστήματος αυτού σε αυθαίρετη είσοδο είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \overset{n-k\geq 0}{=} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k].}_{\text{συσσωρευτής ή αθροιστής}} \tag{19}$$

- Το σύστημα αυτό είναι αντιστρέψιμο και το αντίστροφό του δίνεται από την

$$z[n] = \underbrace{x[n] - x[n-1].}_{\text{διαφορά πρώτης τάξης}} \tag{20}$$

Παράδειγμα 3.5

- Αν τροφοδοτήσουμε το σύστημα (20) με την έξοδο του συσσωρευτή, δηλαδή αντικαταστήσουμε στη (20) όπου $x[n]$ το $y[n]$ από τη (19), τότε $z[n] = x[n]$.
- Η κρουστική απόκριση του συστήματος (20) είναι $h^{-1}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
- Διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}(h * h^{-1})[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = (u * \delta)[n] - (u * \delta)[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n]\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου της συνέλιξης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (5)

Παράδειγμα 3.5

- Αν τροφοδοτήσουμε το σύστημα (20) με την έξοδο του συσσωρευτή, δηλαδή αντικαταστήσουμε στη (20) όπου $x[n]$ το $y[n]$ από τη (19), τότε $z[n] = x[n]$.
- Η κρουστική απόκριση του συστήματος (20) είναι $h^{-1}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
- Διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}(h * h^{-1})[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = (u * \delta)[n] - (u * \delta)[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n]\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου της συνέλιξης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (5)

Παράδειγμα 3.5

- Αν τροφοδοτήσουμε το σύστημα (20) με την έξοδο του συσσωρευτή, δηλαδή αντικαταστήσουμε στη (20) όπου $x[n]$ το $y[n]$ από τη (19), τότε $z[n] = x[n]$.
- Η κρουστική απόκριση του συστήματος (20) είναι $h^{-1}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
- Διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (h * h^{-1})[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = (u * \delta)[n] - (u * \delta)[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n] \end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας του ουδετέρου στοιχείου της συνέλιξης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (6)

Αιτιατότητα Γ.Χ.Α. συστημάτων

Η έξοδος ενός αιτιατού συστήματος εξαρτάται μόνο από την παρούσα και τις περασμένες τιμές της εισόδου. Τούτο σημαίνει ότι

$$h[n] = 0 \quad \text{για } n < 0.$$

Οπότε:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

επειδή αν γίνει η αλλαγή μεταβλητής $m = n - k$

$$h[n-k] = 0 \quad k > n \Leftrightarrow h[m] = 0 \quad m < 0.$$

Από τις κρουστικές αποκρίσεις του συσσωρευτή και της διαφοράς πρώτης τάξης του Παραδείγματος 3.5 συνάγεται ότι είναι αιτιατά συστήματα.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (7)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Θα μας απασχολήσει εφεξής η ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές, εάν για κάθε μια φραγμένη είσοδο παράγει φραγμένη έξοδο. Δηλαδή, εάν

$$|x[n]| < B \ \ \forall n \quad \text{τότε } \exists C: \quad |y[n]| < C.$$

- Ικανή συνθήκη για να είναι ένα σύστημα ευσταθές:

$$\left.\begin{array}{l} |y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \\ \text{αλλά} \quad |x[n-k]| < B \ \ \forall n, k \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow |y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \ \ \forall n \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty. \qquad (21)$$

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Θα μας απασχολήσει εφεξής η ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές, εάν για κάθε μια φραγμένη είσοδο παράγει φραγμένη έξοδο. Δηλαδή, εάν

$$|x[n]| < B \;\; \forall n \quad \text{τότε } \exists C: \quad |y[n]| < C.$$

- Ικανή συνθήκη για να είναι ένα σύστημα ευσταθές:

$$\left.\begin{array}{l} |y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \\ \text{αλλά} \quad |x[n-k]| < B \;\; \forall n, k \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow |y[n]| \le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \;\; \forall n \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty. \qquad (21)$$

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (7)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Θα μας απασχολήσει εφεξής η ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές, εάν για κάθε μια φραγμένη είσοδο παράγει φραγμένη έξοδο. Δηλαδή, εάν

$$|x[n]| < B \ \ \forall n \quad \text{τότε } \exists C: \quad |y[n]| < C.$$

- Ικανή συνθήκη για να είναι ένα σύστημα ευσταθές:

$$\left.\begin{array}{ll} & |y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \\ \text{αλλά} & |x[n-k]| < B \ \ \forall n, k \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow |y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \ \forall n \ \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty. \tag{21}$$

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (8)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (21) είναι και αναγκαία συνθήκη.
- Στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα Γ.Χ.Α. ευσταθές δίνεται από την $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

Παράδειγμα 3.6

- Η βαθμίδα χρονικής ολίσθησης είναι ευσταθής, γιατί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1. \tag{23}$$

- Ένας αθροιστής είναι κλασική περίπτωση ασταθούς συστήματος, γιατί $\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| = \infty$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (8)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (21) είναι και αναγκαία συνθήκη.
- Στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα Γ.Χ.Α. ευσταθές δίνεται από την $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

Παράδειγμα 3.6

- Η βαθμίδα χρονικής ολίσθησης είναι ευσταθής, γιατί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1. \quad (23)$$

- Ένας αθροιστής είναι κλασική περίπτωση ασταθούς συστήματος, γιατί $\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| = \infty$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (8)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (21) είναι και αναγκαία συνθήκη.
- Στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα Γ.Χ.Α. ευσταθές δίνεται από την $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

Παράδειγμα 3.6

- Η βαθμίδα χρονικής ολίσθησης είναι ευσταθής, γιατί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 \qquad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1. \qquad (23)$$

- Ένας αθροιστής είναι κλασική περίπτωση ασταθούς συστήματος, γιατί $\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| = \infty$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (8)

Ευστάθεια Γ.Χ.Α. συστημάτων

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (21) είναι και αναγκαία συνθήκη.
- Στην περίπτωση συνεχούς χρόνου, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα Γ.Χ.Α. ευσταθές δίνεται από την $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

Παράδειγμα 3.6

- Η βαθμίδα χρονικής ολίσθησης είναι ευσταθής, γιατί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1 \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1. \tag{23}$$

- Ένας αθροιστής είναι κλασική περίπτωση ασταθούς συστήματος, γιατί $\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| = \infty$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (9)

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα. Ορίζεται ως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος σε διέγερση μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Συμβολίζεται με $s(t)$ και $s[n]$ στο συνεχή και διακριτό χρόνο αντιστοίχως.
- Προφανώς

$$s[n] = (h * u)[n]. \tag{24}$$

- Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (24) ως έξοδο ενός αθροιστή που δέχεται ως είσοδο την $h[n]$:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{25}$$

αλλά και ότι ισχύει επίσης $h[n] = s[n] - s[n-1]$.

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα. Ορίζεται ως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος σε διέγερση μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Συμβολίζεται με $s(t)$ και $s[n]$ στο συνεχή και διακριτό χρόνο αντιστοίχως.
- Προφανώς
$$s[n] = (h * u)[n]. \tag{24}$$
- Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (24) ως έξοδο ενός αθροιστή που δέχεται ως είσοδο την $h[n]$:
$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{25}$$
αλλά και ότι ισχύει επίσης $h[n] = s[n] - s[n-1]$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (9)

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα. Ορίζεται ως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος σε διέγερση μοναδιαία συνάρτηση βήματος. Συμβολίζεται με $s(t)$ και $s[n]$ στο συνεχή και διακριτό χρόνο αντιστοίχως.
- Προφανώς
$$s[n] = (h * u)[n]. \tag{24}$$
- Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (24) ως έξοδο ενός αθροιστή που δέχεται ως είσοδο την $h[n]$:
$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{25}$$
αλλά και ότι ισχύει επίσης $h[n] = s[n] - s[n-1]$.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (10)

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Για συστήματα Σ.Χ. έχουμε:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \\
h(t) &= \frac{d}{dt}s(t).
\end{aligned}
$$

Πειραματικός προσδιορισμός της κρουστικής απόκρισης

- Η βηματική απόκριση μπορεί να αποκτηθεί εφαρμόζοντας μια διέγερση που υφίσταται για θετικούς χρόνους π.χ. κλείνοντας ένα διακόπτη για να ρεύσει ρεύμα σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Μετρούμε τη βηματική απόκριση και διαφορίζουμε.
- Ως προς την ανάλυση συστημάτων, η βηματική απόκριση θα θεωρείται παράγωγη έννοια της κρουστικής απόκρισης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (10)

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Για συστήματα Σ.Χ. έχουμε:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \\
h(t) &= \frac{d}{dt}s(t).
\end{aligned}
$$

Πειραματικός προσδιορισμός της κρουστικής απόκρισης

- Η βηματική απόκριση μπορεί να αποκτηθεί εφαρμόζοντας μια διέγερση που υφίσταται για θετικούς χρόνους π.χ. κλείνοντας ένα διακόπτη για να ρεύσει ρεύμα σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Μετρούμε τη βηματική απόκριση και διαφορίζουμε.
- Ως προς την ανάλυση συστημάτων, η βηματική απόκριση θα θεωρείται παράγωγη έννοια της κρουστικής απόκρισης.

Ιδιότητες Γ.Χ.Α. συστημάτων (10)

Βηματική απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος

- Για συστήματα Σ.Χ. έχουμε:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \\ h(t) &= \frac{d}{dt}s(t). \end{aligned}$$

Πειραματικός προσδιορισμός της κρουστικής απόκρισης

- Η βηματική απόκριση μπορεί να αποκτηθεί εφαρμόζοντας μια διέγερση που υφίσταται για θετικούς χρόνους π.χ. κλείνοντας ένα διακόπτη για να ρεύσει ρεύμα σ᾽ ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Μετρούμε τη βηματική απόκριση και διαφορίζουμε.
- Ως προς την ανάλυση συστημάτων, η βηματική απόκριση θα θεωρείται παράγωγη έννοια της κρουστικής απόκρισης.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

- Θα δούμε πώς σχετίζονται τα Γ.Χ.Α. συστήματα με την τάξη των συστημάτων Σ.Χ. των οποίων η είσοδος και η έξοδος συσχετίζονται διαμέσου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές.
- Συστήματα που περιγράφονται με όρους Γ.Δ.Ε. περιγράφουν π.χ. κυκλώματα RLC.
- Κατ' αναλογία θα μελετήσουμε και συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.
- Οι Γ.Ε.Δ. μπορούν να περιγράψουν:
  1. τα κέρδη από μια επένδυση συναρτήσει του χρόνου
  2. το τρέχον δείγμα φωνής σαν συνάρτηση προηγουμένων δειγμάτων φωνής και της διέγερσης της φωνητικής κοιλότητας
  3. μέσο όρο δειγμάτων εισόδου.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

- Θα δούμε πώς σχετίζονται τα Γ.Χ.Α. συστήματα με την τάξη των συστημάτων Σ.Χ. των οποίων η είσοδος και η έξοδος συσχετίζονται διαμέσου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές.
- Συστήματα που περιγράφονται με όρους Γ.Δ.Ε. περιγράφουν π.χ. κυκλώματα RLC.
- Κατ΄ αναλογία θα μελετήσουμε και συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.
- Οι Γ.Ε.Δ. μπορούν να περιγράψουν:
  1. τα κέρδη από μια επένδυση συναρτήσει του χρόνου
  2. το τρέχον δείγμα φωνής σαν συνάρτηση προηγουμένων δειγμάτων φωνής και της διέγερσης της φωνητικής κοιλότητας
  3. μέσο όρο δειγμάτων εισόδου.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

- Θα δούμε πώς σχετίζονται τα Γ.Χ.Α. συστήματα με την τάξη των συστημάτων Σ.Χ. των οποίων η είσοδος και η έξοδος συσχετίζονται διαμέσου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές.
- Συστήματα που περιγράφονται με όρους Γ.Δ.Ε. περιγράφουν π.χ. κυκλώματα RLC.
- Κατ' αναλογία θα μελετήσουμε και συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.
- Οι Γ.Ε.Δ. μπορούν να περιγράψουν:
  1. τα κέρδη από μια επένδυση συναρτήσει του χρόνου
  2. το τρέχον δείγμα φωνής σαν συνάρτηση προηγουμένων δειγμάτων φωνής και της διέγερσης της φωνητικής κοιλότητας
  3. μέσο όρο δειγμάτων εισόδου.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

- Θα δούμε πώς σχετίζονται τα Γ.Χ.Α. συστήματα με την τάξη των συστημάτων Σ.Χ. των οποίων η είσοδος και η έξοδος συσχετίζονται διαμέσου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Γ.Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές.
- Συστήματα που περιγράφονται με όρους Γ.Δ.Ε. περιγράφουν π.χ. κυκλώματα RLC.
- Κατ΄ αναλογία θα μελετήσουμε και συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών (Γ.Ε.Δ.) με σταθερούς συντελεστές.
- Οι Γ.Ε.Δ. μπορούν να περιγράψουν:
    1. τα κέρδη από μια επένδυση συναρτήσει του χρόνου
    2. το τρέχον δείγμα φωνής σαν συνάρτηση προηγουμένων δειγμάτων φωνής και της διέγερσης της φωνητικής κοιλότητας
    3. μέσο όρο δειγμάτων εισόδου.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (1)

- Έστω η Γ.Δ.Ε. σταθερών συντελεστών $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ και $x(t) = \ K\cos\omega_0 t\; u(t)$.
- Η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε.: $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.
- Γενική λύση της ομογενούς Γ.Δ.Ε.: $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$.
- Έστω λύση της μορφής $y_h(t) = Ae^{st}$. Τότε:

$$A\,s\,e^{st} + 2A\,e^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2.$$

Άρα $y_h(t) = A\,e^{-2t}$, όπου A σταθερά που μένει να προσδιοριστεί.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (1)

- Έστω η Γ.Δ.Ε. σταθερών συντελεστών $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ και $x(t) = \ K\cos\omega_0 t\, u(t)$.
- Η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε.: $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.
- Γενική λύση της ομογενούς Γ.Δ.Ε.: $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$.
- Έστω λύση της μορφής $y_h(t) = Ae^{st}$. Τότε:

$$A\, s\, e^{st} + 2A\, e^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2.$$

Άρα $y_h(t) = A\, e^{-2t}$, όπου A σταθερά που μένει να προσδιοριστεί.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (1)

- Έστω η Γ.Δ.Ε. σταθερών συντελεστών $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ και $x(t) = \ K \cos \omega_0 t \ u(t)$.
- Η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε.: $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.
- Γενική λύση της ομογενούς Γ.Δ.Ε.: $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$.
- Έστω λύση της μορφής $y_h(t) = Ae^{st}$. Τότε:

$$A\, s\, e^{st} + 2A\, e^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2.$$

Άρα $y_h(t) = A\, e^{-2t}$, όπου A σταθερά που μένει να προσδιοριστεί.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (1)

- Έστω η Γ.Δ.Ε. σταθερών συντελεστών $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ και $x(t) = \ K \cos \omega_0 t \ u(t)$.
- Η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε.: $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.
- Γενική λύση της ομογενούς Γ.Δ.Ε.: $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$.
- Έστω λύση της μορφής $y_h(t) = Ae^{st}$. Τότε:

$$A\, s\, e^{st} + 2A\, e^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2.$$

Άρα $y_h(t) = A\, e^{-2t}$, όπου A σταθερά που μένει να προσδιοριστεί.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (2)

- Εφόσον για $t > 0$ έχουμε $x(t) = \mathrm{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής $y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\}$.
- Αντικαθιστώντας στη Γ.Δ.Ε. παίρνουμε $\mathrm{Re}\{Y(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + 2Ye^{j\omega_0 t}\} = \mathrm{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$.
- Άρα

$$K = Y(2+j\omega_0) \Leftrightarrow Y = \frac{K}{2+j\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}e^{-j\theta} \qquad (26)$$

όπου $\theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2})$.

- Αντικαθιστώντας την τιμή του Y από την (26) στη μερική λύση έχουμε

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t-\theta), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t>0, \qquad (27)$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (2)

- Εφόσον για $t > 0$ έχουμε $x(t) = \mathrm{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής $y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\}$.
- Αντικαθιστώντας στη Γ.Δ.Ε. παίρνουμε $\mathrm{Re}\left\{Y(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + 2Ye^{j\omega_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$.
- Άρα

$$K = Y(2 + j\omega_0) \Leftrightarrow Y = \frac{K}{2 + j\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} e^{-j\theta} \quad (26)$$

όπου $\theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2})$.

- Αντικαθιστώντας την τιμή του Y από την (26) στη μερική λύση έχουμε

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t > 0, \quad (27)$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (2)

- Εφόσον για $t > 0$ έχουμε $x(t) = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}$, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής $y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\,\omega_0\,t}\}$.
- Αντικαθιστώντας στη Γ.Δ.Ε. παίρνουμε $\mathrm{Re}\left\{Y\,(j\,\omega_0)e^{j\,\omega_0\,t} + 2Ye^{j\,\omega_0\,t}\right\} = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}$.
- ʼΑρα

$$K = Y\,(2 + j\omega_0) \Leftrightarrow Y = \frac{K}{2 + j\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}}e^{-j\theta} \tag{26}$$

όπου $\theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2})$.

- Αντικαθιστώντας την τιμή του Y από την (26) στη μερική λύση έχουμε

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\,\omega_0\,t}\} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}}\cos(\omega_0 t - \theta), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t > 0, \tag{27}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (2)

- Εφόσον για $t > 0$ έχουμε $x(t) = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}$, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής $y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\,\omega_0\,t}\}$.
- Αντικαθιστώντας στη Γ.Δ.Ε. παίρνουμε $\mathrm{Re}\left\{Y\,(j\,\omega_0)e^{j\,\omega_0\,t} + 2Ye^{j\,\omega_0\,t}\right\} = \mathrm{Re}\{Ke^{j\,\omega_0\,t}\}$.
- ΄Αρα

$$K = Y\,(2 + j\omega_0) \Leftrightarrow Y = \frac{K}{2 + j\omega_0} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}}e^{-j\theta} \qquad (26)$$

όπου $\theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2})$.

- Αντικαθιστώντας την τιμή του Y από την (26) στη μερική λύση έχουμε

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\,\omega_0\,t}\} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}}\cos\left(\omega_0 t - \theta\right), \quad \theta = \arctan(\frac{\omega_0}{2}), \quad t > 0, \qquad (27)$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (3)

- οπότε η πλήρης λύση δίνεται από την

$$y(t) = A\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \cos\big(\omega_0 t - \theta\big), \qquad \theta = \arctan\Big(\frac{\omega_0}{2}\Big), \quad t > 0. \tag{28}$$

- Για να προσδιορίσουμε πλήρως την έξοδο, χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες της Δ.Ε., (ορθότερα, βοηθητικές συνθήκες). Αν π.χ. $y(0) = y_0$, τότε $A = y_0 - \frac{K\, \cos\theta}{\sqrt{4+\omega_0^2}}$ και

-

$$y(t) = y_0\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \Big[\cos\big(\omega_0 t - \theta\big) - e^{-2t}\, \cos\theta\Big] \quad t > 0. \tag{29}$$

Παράδειγμα 3.7 (3)

- οπότε η πλήρης λύση δίνεται από την

$$y(t) = A\,e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos\big(\omega_0 t - \theta\big), \qquad \theta = \arctan\Big(\frac{\omega_0}{2}\Big), \quad t > 0. \tag{28}$$

- Για να προσδιορίσουμε πλήρως την έξοδο, χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες της Δ.Ε., (ορθότερα, βοηθητικές συνθήκες). Αν π.χ. $y(0) = y_0$, τότε $A = y_0 - \frac{K\ \cos\theta}{\sqrt{4+\omega_0^2}}$ και

- $$y(t) = y_0\,e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\Big[\cos\big(\omega_0 t - \theta\big) - e^{-2t}\ \cos\theta\Big] \quad t > 0. \tag{29}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (3)

- οπότε η πλήρης λύση δίνεται από την

$$y(t) = A\,e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos\big(\omega_0 t - \theta\big), \qquad \theta = \arctan\Big(\frac{\omega_0}{2}\Big), \quad t > 0. \tag{28}$$

- Για να προσδιορίσουμε πλήρως την έξοδο, χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες της Δ.Ε., (ορθότερα, βοηθητικές συνθήκες). Αν π.χ. $y(0) = y_0$, τότε $A = y_0 - \frac{K\,\cos\theta}{\sqrt{4+\omega_0^2}}$ και

-

$$y(t) = y_0\,e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\Big[\cos\big(\omega_0 t - \theta\big) - e^{-2t}\,\cos\theta\Big] \quad t > 0. \tag{29}$$

Παράδειγμα 3.7 (4)

- Για $t < 0$, δεν υπάρχει διέγερση, δηλαδή $x(t) = 0$, οπότε το $y(t)$ ικανοποιεί την ομογενή Γ.Δ.Ε. Ἀρα

$$y(t) = y_0\, e^{-2t}, \qquad t < 0. \tag{30}$$

- Συγχωνεύοντας τις (29) και (30) παίρνουμε

$$y(t) = y_0\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\left[\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta\right] u(t). \tag{31}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (4)

- Για $t < 0$, δεν υπάρχει διέγερση, δηλαδή $x(t) = 0$, οπότε το $y(t)$ ικανοποιεί την ομογενή Γ.Δ.Ε. Άρα

$$y(t) = y_0\, e^{-2t}, \qquad t < 0. \tag{30}$$

- Συγχωνεύοντας τις (29) και (30) παίρνουμε

$$y(t) = y_0\, e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\left[\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\, \cos\theta\right] u(t). \tag{31}$$

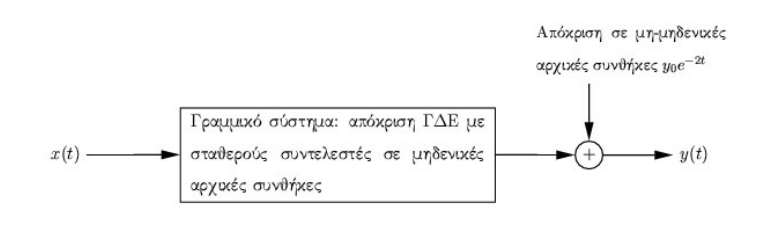
Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (5)

Η λύση (31) αποτελείται από την

1. απόκριση σε μη μηδενική αρχική συνθήκη $y_0 = y(0) \neq 0$: $y_0\, e^{-2t}$
2. απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη $y_0 = y(0) = 0$:

$$\frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\left[\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\ \cos\theta\right] u(t). \tag{32}$$



Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (6)

- Βλέποντας τη σχέση (31) αναρρωτιόμαστε: Είναι το σύστημα που μελετάμε γραμμικό; Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει την ιδιότητα ότι για μηδενική είσοδο παράγει μηδενική έξοδο. Αν $K = 0$, οπότε η είσοδος είναι μηδενική για κάθε t, παρατηρούμε ότι $y(t) = y_0 e^{-2t}$.
- Άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι γραμμικό.
- Το σύστημα γίνεται γραμμικό, αν η βοηθητική συνθήκη είναι μηδέν.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (6)

- Βλέποντας τη σχέση (31) αναρρωτιόμαστε: Είναι το σύστημα που μελετάμε γραμμικό; Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει την ιδιότητα ότι για μηδενική είσοδο παράγει μηδενική έξοδο. Αν $K = 0$, οπότε η είσοδος είναι μηδενική για κάθε t, παρατηρούμε ότι $y(t) = y_0 e^{-2t}$.
- Άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι γραμμικό.
- Το σύστημα γίνεται γραμμικό, αν η βοηθητική συνθήκη είναι μηδέν.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (6)

- Βλέποντας τη σχέση (31) αναρρωτιόμαστε: Είναι το σύστημα που μελετάμε γραμμικό; Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει την ιδιότητα ότι για μηδενική είσοδο παράγει μηδενική έξοδο. Αν $K = 0$, οπότε η είσοδος είναι μηδενική για κάθε t, παρατηρούμε ότι $y(t) = y_0 e^{-2t}$.
- Άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι γραμμικό.
- Το σύστημα γίνεται γραμμικό, αν η βοηθητική συνθήκη είναι μηδέν.

Παράδειγμα 3.7 (7)

- Ας θεωρήσουμε τις αποκρίσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ σε δύο διεγέρσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με την επιβολή των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) &= x_1(t) \\ \frac{d\,y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) &= x_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

- Αν $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε για $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ισχύει

$$\frac{d\,y_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad \text{και} \quad y_3(0) = 0$$

οπότε το σύστημα είναι γραμμικό.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (7)

- Ας θεωρήσουμε τις αποκρίσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ σε δύο διεγέρσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με την επιβολή των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) &= x_1(t) \\ \frac{d\,y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) &= x_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

- Αν $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε για $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ισχύει

$$\frac{d\,y_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad \text{και} \quad y_3(0) = 0$$

οπότε το σύστημα είναι γραμμικό.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (7)

- Ας θεωρήσουμε τις αποκρίσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ σε δύο διεγέρσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με την επιβολή των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) &= x_1(t) \\ \frac{d\,y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) &= x_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

- Αν $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε για $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ισχύει

$$\frac{d\,y_3(t)}{dt} + 2y_3(t) = x_3(t) \quad \text{και} \quad y_3(0) = 0$$

οπότε το σύστημα είναι γραμμικό.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (8)

- Το γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί στην απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη, δηλαδή είναι ο δεύτερος όρος της (31) που αντιστοιχεί στη (32). Στο μάθημα μας ενδιαφέρουν τα γραμμικά συστήματα άρα οι βοηθητικές συνθήκες θα έχουν μηδενικό το δεξί μέλος.
- Είναι το σύστημα που μελετούμε αιτιατό; Η αιτιατότητα συνεπάγεται ότι αν $x(t) = 0$ για $t \leq t_0$, τότε $y(t) = 0$ για $t \leq t_0$. Η πρόταση αυτή λέγεται συνθήκη αρχικής ηρεμίας (initial rest).
- Πρέπει να αναθεωρήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες, ώστε να εξυπηρετήσουμε τη συνθήκη της αρχικής ηρεμίας. Τούτο θα το επιτύχουμε με τη χρήση ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 3.7 (8)

- Το γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί στην απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη, δηλαδή είναι ο δεύτερος όρος της (31) που αντιστοιχεί στη (32). Στο μάθημα μας ενδιαφέρουν τα γραμμικά συστήματα άρα οι βοηθητικές συνθήκες θα έχουν μηδενικό το δεξί μέλος.
- Είναι το σύστημα που μελετούμε αιτιατό; Η αιτιατότητα συνεπάγεται ότι αν $x(t) = 0$ για $t \leq t_0$, τότε $y(t) = 0$ για $t \leq t_0$. Η πρόταση αυτή λέγεται συνθήκη αρχικής ηρεμίας (initial rest).
- Πρέπει να αναθεωρήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες, ώστε να εξυπηρετήσουμε τη συνθήκη της αρχικής ηρεμίας. Τούτο θα το επιτύχουμε με τη χρήση ενός παραδείγματος.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (8)

- Το γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί στην απόκριση σε μηδενική αρχική συνθήκη, δηλαδή είναι ο δεύτερος όρος της (31) που αντιστοιχεί στη (32). Στο μάθημα μας ενδιαφέρουν τα γραμμικά συστήματα άρα οι βοηθητικές συνθήκες θα έχουν μηδενικό το δεξί μέλος.
- Είναι το σύστημα που μελετούμε αιτιατό; Η αιτιατότητα συνεπάγεται ότι αν $x(t) = 0$ για $t \leq t_0$, τότε $y(t) = 0$ για $t \leq t_0$. Η πρόταση αυτή λέγεται συνθήκη αρχικής ηρεμίας (initial rest).
- Πρέπει να αναθεωρήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες, ώστε να εξυπηρετήσουμε τη συνθήκη της αρχικής ηρεμίας. Τούτο θα το επιτύχουμε με τη χρήση ενός παραδείγματος.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (9)

- Έστω το γραμμικό σύστημα $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ με $y(0) = 0$. Ας εφαρμόσουμε στο σύστημα αυτό τις εξής δύο εισόδους:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 0 \;\; \forall \; t && (33)\\
x_2(t) &= \begin{cases} 0 & \text{αν } t < -1 \\ 1 & \text{αν } t > -1. \end{cases} && (34)
\end{aligned}
$$

- Το σύστημα είναι γραμμικό, άρα η απόκριση $y_1(t)$ στην είσοδο $x_1(t)$ είναι:

$$y_1(t) = 0 \quad \forall \; t. \qquad (35)$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (9)

- Έστω το γραμμικό σύστημα $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ με $y(0) = 0$. Ας εφαρμόσουμε στο σύστημα αυτό τις εξής δύο εισόδους:

$$x_1(t) = 0 \;\; \forall\, t \tag{33}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < -1 \\ 1 & \text{αν } t > -1. \end{cases} \tag{34}$$

- Το σύστημα είναι γραμμικό, άρα η απόκριση $y_1(t)$ στην είσοδο $x_1(t)$ είναι:

$$y_1(t) = 0 \quad \forall\, t. \tag{35}$$

Παράδειγμα 3.7 (10)

- Έστω $y_2(t)$ η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_2(t)$. Για $t > -1$, έχουμε $x_2(t) = 1$, άρα αναζητούμε μια ειδική λύση που είναι σταθερά $y_p(t) = Y$.
- Με αντικατάσταση προκύπτει $2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}$
- οπότε η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι

$$y_2(t) = A\,e^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad t > -1. \tag{36}$$

- Εφαρμόζοντας τη βοηθητική συνθήκη $y_2(0) = 0$ προκύπτει $A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας στην (36) παίρνουμε

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t > -1. \tag{37}$$

Παράδειγμα 3.7 (10)

- Έστω $y_2(t)$ η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_2(t)$. Για $t > -1$, έχουμε $x_2(t) = 1$, άρα αναζητούμε μια ειδική λύση που είναι σταθερά $y_p(t) = Y$.
- Με αντικατάσταση προκύπτει $2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}$
- οπότε η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι

$$y_2(t) = A\, e^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad t > -1. \tag{36}$$

- Εφαρμόζοντας τη βοηθητική συνθήκη $y_2(0) = 0$ προκύπτει $A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας στην (36) παίρνουμε

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \qquad t > -1. \tag{37}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (10)

- Έστω $y_2(t)$ η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_2(t)$. Για $t > -1$, έχουμε $x_2(t) = 1$, άρα αναζητούμε μια ειδική λύση που είναι σταθερά $y_p(t) = Y$.
- Με αντικατάσταση προκύπτει $2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}$
- οπότε η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι

$$y_2(t) = A\, e^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad t > -1. \tag{36}$$

- Εφαρμόζοντας τη βοηθητική συνθήκη $y_2(0) = 0$ προκύπτει $A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας στην (36) παίρνουμε

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \qquad t > -1. \tag{37}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (10)

- Έστω $y_2(t)$ η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_2(t)$. Για $t > -1$, έχουμε $x_2(t) = 1$, άρα αναζητούμε μια ειδική λύση που είναι σταθερά $y_p(t) = Y$.
- Με αντικατάσταση προκύπτει $2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}$
- οπότε η πλήρης λύση της Γ.Δ.Ε. είναι

$$y_2(t) = A\,e^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad t > -1. \tag{36}$$

- Εφαρμόζοντας τη βοηθητική συνθήκη $y_2(0) = 0$ προκύπτει $A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας στην (36) παίρνουμε

$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t > -1. \tag{37}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (11)

- Για $t < -1$ η διέγερση είναι μηδενική, άρα

$$y_2(t) = B\, e^{-2t} \qquad t < -1. \tag{38}$$

- Η λύση θα πρέπει να είναι συνεχής για $t = -1$, άρα από τις (37) και (38) προκύπτει $B\, e^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2$
- οπότε

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2\right) e^{-2(t+1)} \quad t < -1. \tag{39}$$

- Επιβάλλοντας την ίδια μηδενική διέγερση για $t < -1$ είτε μέσω της $x_1(t)$ ή της $x_2(t)$ πήραμε δύο διαφορετικές αποκρίσεις $y_1(t) = 0$ και $y_2(t)$ που δίνεται από την (39).

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (11)

- Για $t < -1$ η διέγερση είναι μηδενική, άρα

$$y_2(t) = B\, e^{-2t} \qquad t < -1. \tag{38}$$

- Η λύση θα πρέπει να είναι συνεχής για $t = -1$, άρα από τις (37) και (38) προκύπτει $B\, e^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$

- οπότε

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right) e^{-2(t+1)} \quad t < -1. \tag{39}$$

- Επιβάλλοντας την ίδια μηδενική διέγερση για $t < -1$ είτε μέσω της $x_1(t)$ ή της $x_2(t)$ πήραμε δύο διαφορετικές αποκρίσεις $y_1(t) = 0$ και $y_2(t)$ που δίνεται από την (39).

Παράδειγμα 3.7 (11)

- Για $t < -1$ η διέγερση είναι μηδενική, άρα

$$y_2(t) = B\, e^{-2t} \qquad t < -1. \tag{38}$$

- Η λύση θα πρέπει να είναι συνεχής για $t = -1$, άρα από τις (37) και (38) προκύπτει $B\, e^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$
- οπότε

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right) e^{-2(t+1)} \quad t < -1. \tag{39}$$

- Επιβάλλοντας την ίδια μηδενική διέγερση για $t < -1$ είτε μέσω της $x_1(t)$ ή της $x_2(t)$ πήραμε δύο διαφορετικές αποκρίσεις $y_1(t) = 0$ και $y_2(t)$ που δίνεται από την (39).

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (11)

- Για $t < -1$ η διέγερση είναι μηδενική, άρα

$$y_2(t) = B\,e^{-2t} \qquad t < -1. \tag{38}$$

- Η λύση θα πρέπει να είναι συνεχής για $t = -1$, άρα από τις (37) και (38) προκύπτει $B\,e^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$
- οπότε

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2\right) e^{-2(t+1)} \quad t < -1. \tag{39}$$

- Επιβάλλοντας την ίδια μηδενική διέγερση για $t < -1$ είτε μέσω της $x_1(t)$ ή της $x_2(t)$ πήραμε δύο διαφορετικές αποκρίσεις $y_1(t) = 0$ και $y_2(t)$ που δίνεται από την (39).

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (12)

- Θα δείξουμε στη συνέχεια πώς η συνθήκη αρχικής ηρεμίας καθιστά το ίδιο σύστημα αιτιατό.
- Η απόκριση $y_1(t)$ στην $x_1(t)$ είναι $y_1(t) = 0, \forall\, t$. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη αρχικής ηρεμίας.
- Η απόκριση $y_2(t)$ στη $x_2(t)$ είναι $y_2(t) = 0$ για $t < -1$, ενώ για $t > -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \begin{cases} A\, e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \boxed{y_2(-1) = 0} \Rightarrow A\, e^{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} e^{-2} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Η συνθήκη αρχικής ηρεμίας δεν προσδιορίζει τη βοηθητική συνθήκη σε μια σταθερή εκ των προτέρων χρονική στιγμή, αλλά προσαρμόζει τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση είναι μηδενική μέχρις ότου η είσοδος

Παράδειγμα 3.7 (12)

- Θα δείξουμε στη συνέχεια πώς η συνθήκη αρχικής ηρεμίας καθιστά το ίδιο σύστημα αιτιατό.
- Η απόκριση $y_1(t)$ στην $x_1(t)$ είναι $y_1(t) = 0, \forall\ t$. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη αρχικής ηρεμίας.
- Η απόκριση $y_2(t)$ στη $x_2(t)$ είναι $y_2(t) = 0$ για $t < -1$, ενώ για $t > -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \begin{cases} A\,e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \boxed{y_2(-1) = 0} \Rightarrow A\,e^{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}e^{-2} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Η συνθήκη αρχικής ηρεμίας δεν προσδιορίζει τη βοηθητική συνθήκη σε μια σταθερή εκ των προτέρων χρονική στιγμή, αλλά προσαρμόζει τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση είναι μηδενική μέχρις ότου η είσοδος

Παράδειγμα 3.7 (12)

- Θα δείξουμε στη συνέχεια πώς η συνθήκη αρχικής ηρεμίας καθιστά το ίδιο σύστημα αιτιατό.
- Η απόκριση $y_1(t)$ στην $x_1(t)$ είναι $y_1(t) = 0, \forall\ t$. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη αρχικής ηρεμίας.
- Η απόκριση $y_2(t)$ στη $x_2(t)$ είναι $y_2(t) = 0$ για $t < -1$, ενώ για $t > -1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= \begin{cases} A\,e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \boxed{y_2(-1) = 0} \Rightarrow A\,e^{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}e^{-2} \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Η συνθήκη αρχικής ηρεμίας δεν προσδιορίζει τη βοηθητική συνθήκη σε μια σταθερή εκ των προτέρων χρονική στιγμή, αλλά προσαρμόζει τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση είναι μηδενική μέχρις ότου η είσοδος

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (12)

- Θα δείξουμε στη συνέχεια πώς η συνθήκη αρχικής ηρεμίας καθιστά το ίδιο σύστημα αιτιατό.
- Η απόκριση $y_1(t)$ στην $x_1(t)$ είναι $y_1(t) = 0, \forall\ t$. Άρα ικανοποιεί τη συνθήκη αρχικής ηρεμίας.
- Η απόκριση $y_2(t)$ στη $x_2(t)$ είναι $y_2(t) = 0$ για $t < -1$, ενώ για $t > -1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= \begin{cases} A\,e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ \boxed{y_2(-1) = 0} \Rightarrow A\,e^{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}e^{-2} \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Η συνθήκη αρχικής ηρεμίας δεν προσδιορίζει τη βοηθητική συνθήκη σε μια σταθερή εκ των προτέρων χρονική στιγμή, αλλά προσαρμόζει τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόκριση είναι μηδενική μέχρις ότου η είσοδος

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (13)

- Έτσι αν $x(t) = 0$, για $t < t_0$, τότε η αρχική συνθήκη πρέπει να επιλεχθεί ως $y(t_0) = 0$.
- Υπολείπεται να εξετάσουμε αν το σύστημα που μελετούμε

$$\frac{d\, y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \qquad \text{με } y_1(t_0) = 0 \tag{40}$$

όταν διεγείρεται από είσοδο $x_1(t) = 0$ για $t < t_0$ είναι χρονοαμετάβλητο. Έστω $x_2(t) = x_1(t - T)$, οπότε $x_2(t) = 0$ για $t < T + t_0$. Επομένως αρκεί η απόκριση $y_2(t)$ σε είσοδο $x_2(t)$ να ικανοποιεί την:

$$\frac{d\, y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \qquad \text{με } y_2(t_0 + T) = 0 \tag{41}$$

και επιπλέον $y_2(t) = y_1(t - T)$.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (13)

- Έτσι αν $x(t) = 0$, για $t < t_0$, τότε η αρχική συνθήκη πρέπει να επιλεχθεί ως $y(t_0) = 0$.
- Υπολείπεται να εξετάσουμε αν το σύστημα που μελετούμε

$$\frac{d\, y_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \quad \text{με } y_1(t_0) = 0 \tag{40}$$

όταν διεγείρεται από είσοδο $x_1(t) = 0$ για $t < t_0$ είναι χρονοαμετάβλητο. Έστω $x_2(t) = x_1(t - T)$, οπότε $x_2(t) = 0$ για $t < T + t_0$. Επομένως αρκεί η απόκριση $y_2(t)$ σε είσοδο $x_2(t)$ να ικανοποιεί την:

$$\frac{d\, y_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \quad \text{με } y_2(t_0 + T) = 0 \tag{41}$$

και επιπλέον $y_2(t) = y_1(t - T)$.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (14)

- Ξεκινώντας από τη (40)

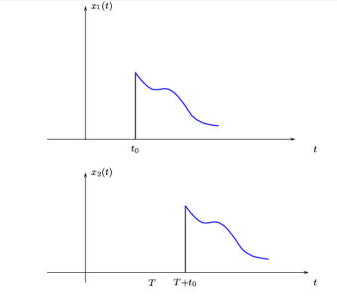
$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t)\\ y_1(t_0) = 0\end{array}\right\}\\
\Rightarrow\quad &\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1(t-T)}{dt} + 2y_1(t-T) = x_1(t-T)\\ y_1(t_0) = 0\end{array}\right\}\\
\Rightarrow\quad &\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1(t-T)}{d(t-T)}\dfrac{d(t-T)}{dt} + 2y_1(t-T) = x_1(t-T).\\ y_1(t_0) = 0\end{array}\right\}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Αλλά αν αντικαταστήσουμε $x_2(t) = x_1(t-T)$ και $y_2(t) = y_1(t-T)$, παρατηρούμε ότι

$$
y_2(t) = y_1(t-T)\,\big|_{t-T=t_0} = 0 \Leftrightarrow y_2(t_0+T) = y_1(t_0) = 0. \tag{43}
$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

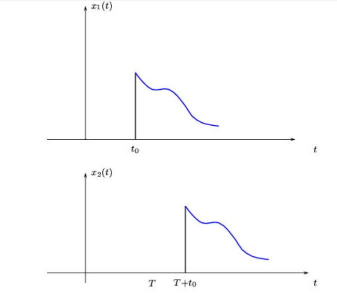
Παράδειγμα 3.7 (15)



- Δηλαδή, δείξαμε ότι ισχύει η (41) όπου η αρχική συνθήκη επιβλήθηκε τη χρονική στιγμή $t_0 + T$, οπότε η είσοδος γίνεται μη μηδενική.
- Συνάγουμε ότι η επιβολή της συνθήκης αρχικής ηρεμίας πέρα από την αιτιατότητα εγγυάται και το χρονοαμετάβλητο του γραμμικού συστήματος.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.7 (15)



- Δηλαδή, δείξαμε ότι ισχύει η (41) όπου η αρχική συνθήκη επιβλήθηκε τη χρονική στιγμή $t_0 + T$, οπότε η είσοδος γίνεται μη μηδενική.
- Συνάγουμε ότι η επιβολή της συνθήκης αρχικής ηρεμίας πέρα από την αιτιατότητα εγγυάται και το χρονοαμετάβλητο του γραμμικού συστήματος.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Γενίκευση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k\, x(t)}{d\, t^k} \tag{44}$$

με βοηθητικές συνθήκες που εκφράζονται με όρους των

$$y(t_0), \quad \frac{dy(t_0)}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} \tag{45}$$

1. Αν οι βοηθητικές συνθήκες είναι μηδενικές, το σύστημα είναι γραμμικό.
2. Αν ισχύει και η συνθήκη αρχικής ηρεμίας

$$y(t_0) = 0, \quad \frac{dy(t_0)}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0 \tag{46}$$

το σύστημα είναι αιτιατό, αλλά και χρονοαμετάβλητο.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(1)

- Περιγράφονται από γραμμική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]. \tag{47}$$

- Η λύση της (47) δίνεται από το άθροισμα της
  1. ειδικής λύσης
  2. γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης $\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = 0$.
- Πρέπει να επιβάλλουμε βοηθητικές συνθήκες που να εγγυώνται
  1. γραμμικότητα
  2. αιτιατότητα και το χρονοαμετάβλητο.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(1)

- Περιγράφονται από γραμμική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]. \tag{47}$$

- Η λύση της (47) δίνεται από το άθροισμα της
  1. ειδικής λύσης
  2. γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης $\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = 0$.
- Πρέπει να επιβάλλουμε βοηθητικές συνθήκες που να εγγυώνται
  1. γραμμικότητα
  2. αιτιατότητα και το χρονοαμετάβλητο.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(1)

- Περιγράφονται από γραμμική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]. \tag{47}$$

- Η λύση της (47) δίνεται από το άθροισμα της
  1. ειδικής λύσης
  2. γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης $\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = 0$.
- Πρέπει να επιβάλλουμε βοηθητικές συνθήκες που να εγγυώνται
  1. γραμμικότητα
  2. αιτιατότητα και το χρονοαμετάβλητο.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(2)

- Η (47) είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}. \tag{48}$$

- Αν $N = 0$, τότε έχουμε μια μη αναδρομική εξίσωση ή σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (finite impulse response, FIR) $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k]$.
- Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- Αν η (47) αντιστοιχεί σε αναδρομική εξίσωση, τότε απαιτούνται και οριακές συνθήκες.

Συστήματα Δ.Χ.(2)

- Η (47) είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}. \qquad (48)$$

- Αν $N = 0$, τότε έχουμε μια μη αναδρομική εξίσωση ή σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (finite impulse response, FIR) $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k]$.
- Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- Αν η (47) αντιστοιχεί σε αναδρομική εξίσωση, τότε απαιτούνται και οριακές συνθήκες.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(2)

- Η (47) είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}. \tag{48}$$

- Αν $N = 0$, τότε έχουμε μια μη αναδρομική εξίσωση ή σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (finite impulse response, FIR) $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k]$.
- ΄Αρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- Αν η (47) αντιστοιχεί σε αναδρομική εξίσωση, τότε απαιτούνται και οριακές συνθήκες.

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Συστήματα Δ.Χ.(2)

- Η (47) είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\}. \qquad (48)$$

- Αν $N = 0$, τότε έχουμε μια μη αναδρομική εξίσωση ή σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (finite impulse response, FIR) $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x[n-k]$.
- ῎Αρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- Αν η (47) αντιστοιχεί σε αναδρομική εξίσωση, τότε απαιτούνται και οριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 3.8 (1)

- Έστω η αναδρομική εξίσωση $y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$ με βοηθητική συνθήκη $y[-1] = a$ και διέγερση $x[n] = K\,\delta[n]$.
- Για $n >= 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} y[0] &= K + \frac{1}{2}a \\ y[1] &= \frac{1}{2}(K + \frac{1}{2}a) \\ y[2] &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (K + \frac{1}{2}a) \\ &\vdots \\ y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n K + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.8 (1)

- Έστω η αναδρομική εξίσωση $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$ με βοηθητική συνθήκη $y[-1] = a$ και διέγερση $x[n] = K\,\delta[n]$.
- Για $n >= 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
y[0] &= K + \frac{1}{2}a \\
y[1] &= \frac{1}{2}(K + \frac{1}{2}a) \\
y[2] &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (K + \frac{1}{2}a) \\
\vdots & \quad \vdots \\
y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n K + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \qquad n \geq 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.8 (3)

- Ομοίως μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αναδρομή σχετίζοντας την προηγούμενη τιμή με την παρούσα για τιμές του $n < -1$, $y[n-1] = 2\big[y[n] - x[n]\big]$. Οπότε:

$$
\begin{aligned}
y[-2] &= 2a \\
y[-3] &= 2^2 a = (\tfrac{1}{2})^{-3+1} a \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \qquad n < 0.
\end{aligned} \tag{50}
$$

- Από τις (49) και (50) προκύπτει

$$
y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + K\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]. \tag{51}
$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.8 (3)

- Ομοίως μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αναδρομή σχετίζοντας την προηγούμενη τιμή με την παρούσα για τιμές του $n < -1$, $y[n-1] = 2\big[y[n] - x[n]\big]$. Οπότε:

$$\begin{aligned} y[-2] &= 2a \\ y[-3] &= 2^2 a = (\frac{1}{2})^{-3+1} a \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \quad n < 0. \end{aligned} \tag{50}$$

- Από τις (49) και (50) προκύπτει

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + K \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]. \tag{51}$$

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.8 (4)

- Άρα και πάλι απαιτούνται οριακές συνθήκες για να προσδιοριστούν τα a και K.
- Εάν $K = 0$, τότε $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a$. Άρα η έξοδος θα είναι μηδέν, μόνο αν $a = 0$, οπότε το προκύπτον σύστημα θα είναι γραμμικό.
- Για να είναι το σύστημα αιτιατό, πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Στην περίπτωσή μας, ξεκινούμε με μηδενική αρχική συνθήκη τη στιγμή $n = -1$. Άρα πρέπει $y[-1] = 0$ οπότε:

$$y[n] = K \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h[n]}. \tag{52}$$

Το προκύπτον σύστημα έχει κρουστική απόκριση απεριόριστης διάρκειας (infinite impulse response, IIR).

Παράδειγμα 3.8 (4)

- Άρα και πάλι απαιτούνται οριακές συνθήκες για να προσδιοριστούν τα a και K.
- Εάν $K = 0$, τότε $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a$. Άρα η έξοδος θα είναι μηδέν, μόνο αν $a = 0$, οπότε το προκύπτον σύστημα θα είναι γραμμικό.
- Για να είναι το σύστημα αιτιατό, πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Στην περίπτωσή μας, ξεκινούμε με μηδενική αρχική συνθήκη τη στιγμή $n = -1$. Άρα πρέπει $y[-1] = 0$ οπότε:

$$y[n] = K \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{h[n]}. \qquad (52)$$

Το προκύπτον σύστημα έχει κρουστική απόκριση απεριόριστης διάρκειας (infinite impulse response, IIR).

Συστήματα που περιγράφονται με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών

Παράδειγμα 3.8 (4)

- Άρα και πάλι απαιτούνται οριακές συνθήκες για να προσδιοριστούν τα a και K.
- Εάν $K = 0$, τότε $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a$. Άρα η έξοδος θα είναι μηδέν, μόνο αν $a = 0$, οπότε το προκύπτον σύστημα θα είναι γραμμικό.
- Για να είναι το σύστημα αιτιατό, πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Στην περίπτωσή μας, ξεκινούμε με μηδενική αρχική συνθήκη τη στιγμή $n = -1$. Άρα πρέπει $y[-1] = 0$ οπότε:

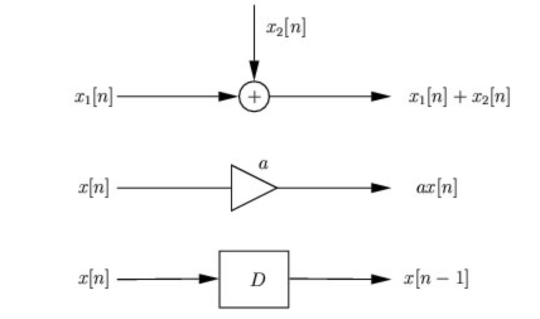
$$y[n] = \underbrace{K \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]}_{h[n]}. \tag{52}$$

Το προκύπτον σύστημα έχει κρουστική απόκριση απεριόριστης διάρκειας (infinite impulse response, IIR).

Block διαγράμματα

Συστήματα Δ.Χ.

Δομικά στοιχεία των block διαγραμμάτων για συστήματα Δ.Χ.



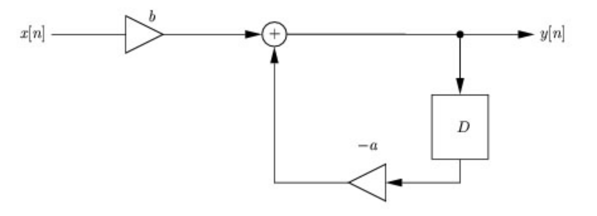
Block διαγράμματα

Παράδειγμα 3.9: IIR σύστημα 1ης τάξης

Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + a\,y[n-1] = b\,x[n] \Rightarrow y[n] = -a\,y[n-1] + b\,x[n]$$

το block διάγραμμα είναι



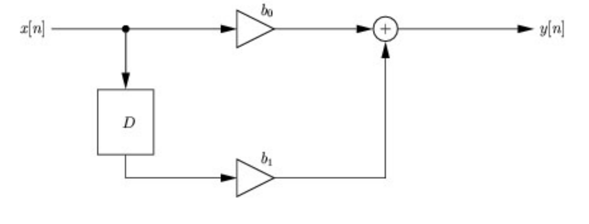
Block διαγράμματα

Παράδειγμα 3.10: FIR σύστημα 1ης τάξης

Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

το block διάγραμμα είναι

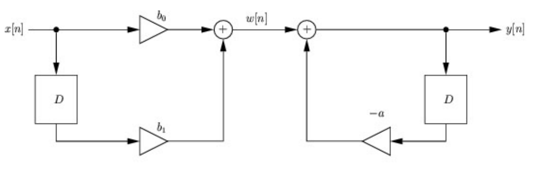


Παράδειγμα 3.11: Απευθείας I υλοποίηση IIR συστήματος

Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + a\,y[n-1] = \underbrace{b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1]}_{w[n]}$$

το block διάγραμμα είναι



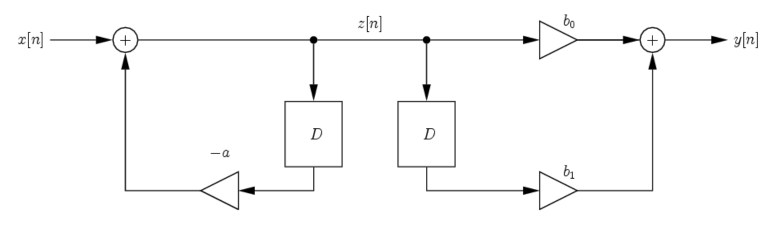
Το σύστημα υλοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} y[n] &= -a\,y[n-1] + w[n] \\ w[n] &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1]. \end{aligned}$$

Block διαγράμματα

Παράδειγμα 3.11: Εναλλακτική απευθείας I υλοποίηση IIR συστήματος

Εφόσον τα συστήματα είναι γραμμικά μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά διασύνδεσης των δύο βαθμίδων, οπότε προκύπτει η υλοποίηση

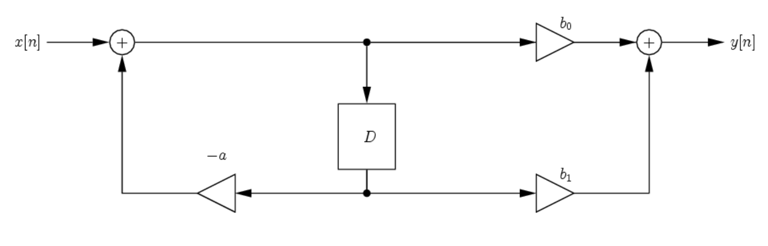


Το σύστημα υλοποιεί τις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
x[n] - a\, z[n-1] &= z[n] \\
y[n] &= b_0 z[n] + b_1 z[n-1].
\end{aligned}
$$

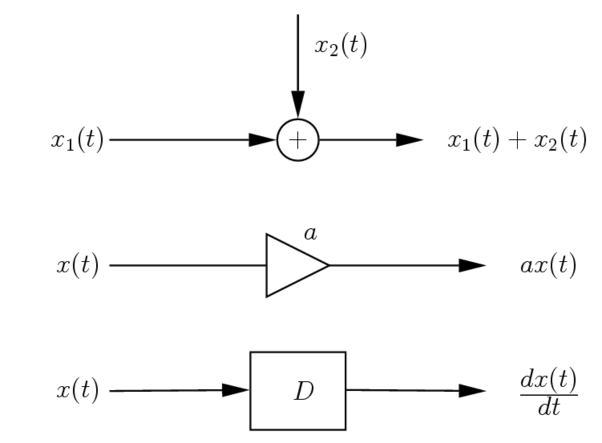
Παράδειγμα 3.11: Εναλλακτική απευθείας II υλοποίηση IIR συστήματος

Μια ισοδύναμη υλοποίηση, όπου αξιοποιήθηκε η αντιμεταθετική ιδιότητα στη συνδεσμολογία αλυσίδας δύο Γ.Χ.Α. συστημάτων, είναι:



Συστήματα Σ.Χ. (1)

Δομικά στοιχεία των block διαγραμμάτων για συστήματα Σ.Χ.



Block διαγράμματα

Συστήματα Σ.Χ. (2)

Έστω

$$
\begin{aligned}
y_{(0)}(t) &= y(t) \\
y_{(1)}(t) &= (y * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau) d\tau \\
y_{(2)}(t) &= (y_{(1)} * u)(t) \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Έστω επίσης $N = M$ οπότε

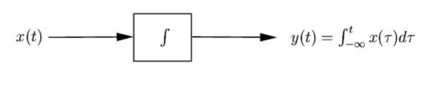
$$
\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k\, x(t)}{d\, t^k}. \tag{54}
$$

Συστήματα Σ.Χ. (3)

- Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Αν ολοκληρώσουμε N φορές την (54) και συμβολίσουμε με $y_{(N-k)}(t)$ το $\underbrace{\int\int\cdots\int}_{N \text{ φορές}} \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k}(dt)^N$ προκύπτει

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k\; x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k\; y_{(N-k)}(t)\right\} \tag{55}$$

- Η υλοποίηση ενός ολοκληρωτή είναι ευκολότερη από εκείνη ενός διαφοριστή. Ένας ολοκληρωτής συνήθως υλοποιείται με τη χρήση τελεστικού ενισχυτή.

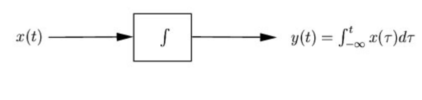


Συστήματα Σ.Χ. (3)

- Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζεται η συνθήκη αρχικής ηρεμίας. Αν ολοκληρώσουμε N φορές την (54) και συμβολίσουμε με $y_{(N-k)}(t)$ το $\underbrace{\int\int\cdots\int}_{N \text{ φορές}} \frac{d^k\, y(t)}{d\, t^k}(dt)^N$ προκύπτει

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k\; x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k\; y_{(N-k)}(t)\right\} \tag{55}$$

- Η υλοποίηση ενός ολοκληρωτή είναι ευκολότερη από εκείνη ενός διαφοριστή. Ένας ολοκληρωτής συνήθως υλοποιείται με τη χρήση τελεστικού ενισχυτή.

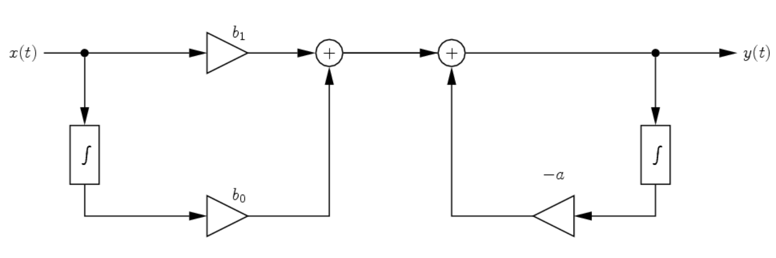


Παράδειγμα 3.12: Απευθείας I υλοποίηση συστήματος Σ.Χ.

Για το σύστημα που περιγράφεται από την Γ.Δ.Ε.

$$\begin{aligned} \frac{d\,y(t)}{d\,t} + a\,y(t) &= b_0\,x(t) + b_1\frac{d\,x(t)}{d\,t} \Leftrightarrow \\ y(t) + a\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau &= b_0\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + b_1 x(t) \end{aligned} \tag{56}$$

το block διάγραμμα είναι

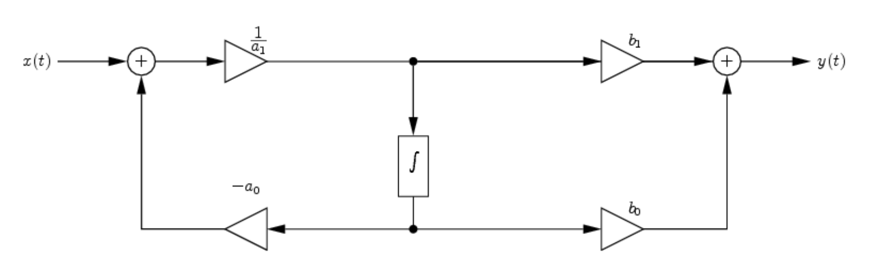


Παράδειγμα 3.12: Απευθείας II υλοποίηση συστήματος Σ.Χ.

Στη γενικότερη περίπτωση ενός συστήματος που περιγράφεται από την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} a_1\, y_{(0)}(t) + a_0\, y_{(1)}(t) &= b_0\, x_{(1)}(t) + b_1\, x_{(0)}(t) \\ y_{(0)}(t) &= \frac{1}{a_1}\left[-a_0\, y_{(1)}(t) + b_0\, x_{(1)}(t) + b_1\, x_{(0)}(t)\right] \quad (57) \end{aligned}$$

η απευθείας II υλοποίηση είναι



Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης