ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **7**: Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου Ι

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

cc BY SA

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου I

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (1)

- Η ανάλυση Fourier συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.) μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις ιδιότητες σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση Fourier διακριτού χρόνου (Δ.Χ.).
- Η διαπραγμάτευση του θέματος αναπτύσσεται παραλλήλως προς τη μελέτη σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Τα εργαλεία που θα μελετήσουμε έχουν τις δικές τους διακριτές ρίζες. Οι μέθοδοι και οι έννοιες Δ.Χ. είναι θεμελιώδεις στην αριθμητική ανάλυση. Όντως αριθμητικές μέθοδοι για παρεμβολή, ολοκλήρωση και διαφόριση σε ακολουθίες αριθμών άρχισαν να μελετώνται από τον Νεύτωνα στα 1600. Η πρόβλεψη της κίνησης ουρανίων σωμάτων δοσμένης μιας σειράς παρατηρήσεων κέντρισε την έρευνα τον 18ο και 19ο αιώνες. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

Αναγκαιότητα μελέτης (1)

- Η ανάλυση Fourier συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.) μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις ιδιότητες σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση Fourier διακριτού χρόνου (Δ.Χ.).
- Η διαπραγμάτευση του θέματος αναπτύσσεται παραλλήλως προς τη μελέτη σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Τα εργαλεία που θα μελετήσουμε έχουν τις δικές τους διακριτές ρίζες. Οι μέθοδοι και οι έννοιες Δ.Χ. είναι θεμελιώδεις στην αριθμητική ανάλυση. Όντως αριθμητικές μέθοδοι για παρεμβολή, ολοκλήρωση και διαφόριση σε ακολουθίες αριθμών άρχισαν να μελετώνται από τον Νεύτωνα στα 1600. Η πρόβλεψη της κίνησης ουρανίων σωμάτων δοσμένης μιας σειράς παρατηρήσεων κέντρισε την έρευνα τον 18ο και 19ο αιώνες. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι
  - Οι μέθοδοι Σ.Χ. απαντούνται στη φυσική, στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.
  - Οι μέθοδοι Δ.Χ. απαντούνται στην αριθμητική ανάλυση, στην ανάλυση χρονοσειρών (π.χ. οικονομική πρόβλεψη, ανάλυση δημογραφικών δεδομένων, πρόβλεψη εξέλιξης φυσικών φαινομένων).

Αναγκαιότητα μελέτης (1)

- Η ανάλυση Fourier συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.) μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις ιδιότητες σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση Fourier διακριτού χρόνου (Δ.Χ.).
- Η διαπραγμάτευση του θέματος αναπτύσσεται παραλλήλως προς τη μελέτη σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Τα εργαλεία που θα μελετήσουμε έχουν τις δικές τους διακριτές ρίζες. Οι μέθοδοι και οι έννοιες Δ.Χ. είναι θεμελιώδεις στην αριθμητική ανάλυση. Όντως αριθμητικές μέθοδοι για παρεμβολή, ολοκλήρωση και διαφόριση σε ακολουθίες αριθμών άρχισαν να μελετώνται από τον Νεύτωνα στα 1600. Η πρόβλεψη της κίνησης ουρανίων σωμάτων δοσμένης μιας σειράς παρατηρήσεων κέντρισε την έρευνα τον 18ο και 19ο αιώνες. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι
    - Οι μέθοδοι Σ.Χ. απαντούνται στη φυσική, στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.
    - Οι μέθοδοι Δ.Χ. απαντούνται στην αριθμητική ανάλυση, στην ανάλυση χρονοσειρών (π.χ. οικονομική πρόβλεψη, ανάλυση δημογραφικών δεδομένων, πρόβλεψη εξέλιξης φυσικών φαινομένων).

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (1)

- Η ανάλυση Fourier συνεχούς χρόνου (Σ.Χ.) μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις ιδιότητες σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση Fourier διακριτού χρόνου (Δ.Χ.).
- Η διαπραγμάτευση του θέματος αναπτύσσεται παραλλήλως προς τη μελέτη σημάτων/συστημάτων Σ.Χ. Τα εργαλεία που θα μελετήσουμε έχουν τις δικές τους διακριτές ρίζες. Οι μέθοδοι και οι έννοιες Δ.Χ. είναι θεμελιώδεις στην αριθμητική ανάλυση. Όντως αριθμητικές μέθοδοι για παρεμβολή, ολοκλήρωση και διαφόριση σε ακολουθίες αριθμών άρχισαν να μελετώνται από τον Νεύτωνα στα 1600. Η πρόβλεψη της κίνησης ουρανίων σωμάτων δοσμένης μιας σειράς παρατηρήσεων κέντρισε την έρευνα τον 18ο και 19ο αιώνες. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι
  - Οι μέθοδοι Σ.Χ. απαντούνται στη φυσική, στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.
  - Οι μέθοδοι Δ.Χ. απαντούνται στην αριθμητική ανάλυση, στην ανάλυση χρονοσειρών (π.χ. οικονομική πρόβλεψη, ανάλυση δημογραφικών δεδομένων, πρόβλεψη εξέλιξης φυσικών φαινομένων).

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
  1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
  2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
    1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
    2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
  1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
  2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
     - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
     - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
  1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
  2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
     - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
     - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των ’40 και ’50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
  1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
  2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
     - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
     - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του ’60 “ανακαλύπτεται” ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
    1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
    2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
        - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
        - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που
    1. είναι κατάλληλος για αποδοτικές ψηφιακές υλοποιήσεις
    2. ελάττωσε το χρόνο υπολογισμού κατά πολλές τάξεις μεγέθους από $\mathcal{O}(N^2)$ σε $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
  1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
  2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
     - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
     - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που
  1. είναι κατάλληλος για αποδοτικές ψηφιακές υλοποιήσεις
  2. ελάττωσε το χρόνο υπολογισμού κατά πολλές τάξεις μεγέθους από $\mathcal{O}(N^2)$ σε $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Εισαγωγικά

Αναγκαιότητα μελέτης (2)

- Στον 20ο αιώνα, στις δεκαετίες των '40 και '50 παρατηρείται αναγέννηση των τεχνικών Δ.Χ. και χρήση της ανάλυσης Fourier Δ.Χ. Λόγοι που συνέβαλαν στην αναγέννηση αυτή είναι:
    1. η χρήση ψηφιακών υπολογιστών για τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier
    2. η σχεδίαση συστημάτων Δ.Χ. για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων που προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων Σ.Χ. όπως
        - ψηφιακοί αναλυτές φωνής
        - ψηφιακοί αναλυτές φάσματος.
- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 "ανακαλύπτεται" ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform) FFT που
    1. είναι κατάλληλος για αποδοτικές ψηφιακές υλοποιήσεις
    2. ελάττωσε το χρόνο υπολογισμού κατά πολλές τάξεις μεγέθους από $\mathcal{O}(N^2)$ σε $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
    1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
    2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:
  1. Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι πεπερασμένη. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
  2. Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier.

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:
  1. Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι πεπερασμένη. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
  2. Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier:
     - το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (Discrete-Time Fourier Transform), FT-DT και

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:
  1. Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι πεπερασμένη. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
  2. Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier:
     - το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (Discrete-Time Fourier Transform), FT-DT και
     - το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform), DFT.

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:
  1. Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι πεπερασμένη. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
  2. Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier:
     - το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (Discrete-Time Fourier Transform), FT-DT και
     - το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform), DFT.

Εισαγωγικά

Ομοιότητες-διαφορές

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με την ανάλυση Σ.Χ.:
  1. Εάν η είσοδος και έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών, τότε οι συντελεστές της αναπαράστασης της εξόδου μπορούν να εκφραστούν σε μια πολύ βολική μορφή συναρτήσει των συντελεστών της αναπαράστασης της εισόδου.
  2. Μια ευρεία και χρήσιμη ομάδα σημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί σαν τέτοιος γραμμικός συνδυασμός.
- Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες διαφορές:
  1. Αντιθέτως προς τη σειρά απείρων όρων που προκύπτει στην αναπαράσταση με σειρά Fourier περιοδικών σημάτων Σ.Χ., η αναπαράσταση σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος Δ.Χ. είναι πεπερασμένη. Αξιοποίηση της ιδιότητας αυτής γίνεται στον FFT.
  2. Θα ορίσουμε δύο μετασχηματισμούς Fourier:
     - το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. (Discrete-Time Fourier Transform), FT-DT και
     - το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform), DFT.

Εισαγωγικά

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. προκύπτει από τη διακριτή σειρά Fourier απειρίζοντας την περίοδο δειγματοληψίας, όπως ακριβώς προέκυψε ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. από τη σειρά Fourier Σ.Χ. Αλλά η διαδικασία αυτή καταλήγει σ' ένα μετασχηματισμό συνεχούς μεταβλητής, πράγμα άβολο όταν επεξεργαζόμαστε ακολουθίες αριθμών.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή τη δυσκολία, κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier που αποτελεί δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σε "συχνότητες" που αντιστοιχούν σε N δείγματα "συχνότητας" τα οποία προκύπτουν από ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος $[0, 2\pi)$.
- Θυμηθείτε ότι οι "συχνότητες" των σημάτων Δ.Χ. είναι γωνίες. Αν συμβολίσουμε με Ω τη "συχνότητα" Δ.Χ., αυτή αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα ω, τη γνωστή μας κυκλική συχνότητα (που μετριέται σε rad/sec), σύμφωνα με τη σχέση

$$\Omega = \omega T \tag{1}$$

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. προκύπτει από τη διακριτή σειρά Fourier απειρίζοντας την περίοδο δειγματοληψίας, όπως ακριβώς προέκυψε ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. από τη σειρά Fourier Σ.Χ. Αλλά η διαδικασία αυτή καταλήγει σ' ένα μετασχηματισμό συνεχούς μεταβλητής, πράγμα άβολο όταν επεξεργαζόμαστε ακολουθίες αριθμών.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή τη δυσκολία, κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier που αποτελεί δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σε "συχνότητες" που αντιστοιχούν σε N δείγματα "συχνότητας" τα οποία προκύπτουν από ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος $[0, 2\pi)$.
- Θυμηθείτε ότι οι "συχνότητες" των σημάτων Δ.Χ. είναι γωνίες. Αν συμβολίσουμε με Ω τη "συχνότητα" Δ.Χ., αυτή αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα ω, τη γνωστή μας κυκλική συχνότητα (που μετριέται σε rad/sec), σύμφωνα με τη σχέση

$$\Omega = \omega T \tag{1}$$

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. προκύπτει από τη διακριτή σειρά Fourier απειρίζοντας την περίοδο δειγματοληψίας, όπως ακριβώς προέκυψε ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. από τη σειρά Fourier Σ.Χ. Αλλά η διαδικασία αυτή καταλήγει σ' ένα μετασχηματισμό συνεχούς μεταβλητής, πράγμα άβολο όταν επεξεργαζόμαστε ακολουθίες αριθμών.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή τη δυσκολία, κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier που αποτελεί δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σε "συχνότητες" που αντιστοιχούν σε N δείγματα "συχνότητας" τα οποία προκύπτουν από ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος $[0, 2\pi)$.
- Θυμηθείτε ότι οι "συχνότητες" των σημάτων Δ.Χ. είναι γωνίες. Αν συμβολίσουμε με Ω τη "συχνότητα" Δ.Χ., αυτή αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα ω, τη γνωστή μας κυκλική συχνότητα (που μετριέται σε rad/sec), σύμφωνα με τη σχέση

$$\Omega = \omega T \tag{1}$$

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (2)

- Τα ομοιόμορφα δείγματα συχνότητας δεν είναι παρά οι τιμές

$$\Omega_k = k\,\frac{2\pi}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Χωρίς καμιά αυθαιρεσία ισχυριζόμαστε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, DFT, δεν είναι παρά μια νόθα διακριτή σειρά Fourier.
- Αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT είναι οι αλγόριθμοι FFT.

Εισαγωγικά

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (2)

- Τα ομοιόμορφα δείγματα συχνότητας δεν είναι παρά οι τιμές

$$\Omega_k = k\,\frac{2\pi}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Χωρίς καμιά αυθαιρεσία ισχυριζόμαστε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, DFT, δεν είναι παρά μια νόθα διακριτή σειρά Fourier.
- Αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT είναι οι αλγόριθμοι FFT.

Γιατί δύο μετασχηματισμοί Fourier; (2)

- Τα ομοιόμορφα δείγματα συχνότητας δεν είναι παρά οι τιμές

$$\Omega_k = k\,\frac{2\pi}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Χωρίς καμιά αυθαιρεσία ισχυριζόμαστε ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, DFT, δεν είναι παρά μια νόθα διακριτή σειρά Fourier.
- Αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT είναι οι αλγόριθμοι FFT.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (1)

- Θα δείξουμε ότι τα μιγαδικά εκθετικά Δ.Χ. είναι ιδιοσυναρτήσεις των Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ.
- Υποθέστε ότι ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με κρουστική απόκριση $h[n]$ διεγείρεται από είσοδο $x[n] = z^n$. Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. θα δίνεται από το άθροισμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k} \\ &= z^n \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k} \right]}_{H(z)} = \underbrace{H(z)}_{\text{ιδιοτιμή}}\, z^n \qquad (2) \end{aligned}$$

όπου $H(z)$ είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (1)

- Θα δείξουμε ότι τα μιγαδικά εκθετικά Δ.Χ. είναι ιδιοσυναρτήσεις των Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ.
- Υποθέστε ότι ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με κρουστική απόκριση $h[n]$ διεγείρεται από είσοδο $x[n] = z^n$. Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. θα δίνεται από το άθροισμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k} \\ &= z^n \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k} \right]}_{H(z)} = \underbrace{H(z)}_{\text{ιδιοτιμή}} \quad z^n \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $H(z)$ είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (2)

- Η εξίσωση (2) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ᾽ ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.
- Θα περιοριστούμε, κατ᾽ αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z^n = e^{j\Omega n}$, δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα τέτοιας μορφής είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε
- Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιοτήτων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντιστοίχων εργαλείων Σ.Χ.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (2)

- Η εξίσωση (2) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ᾿ ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.
- Θα περιοριστούμε, κατ᾿ αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z^n = e^{j\Omega n}$, δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα τέτοιας μορφής είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε
  1. την επέκταση σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων Δ.Χ. (διακριτή σειρά Fourier)
  2. το μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ως επέκταση της διακριτής σειράς Fourier.
- Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιοτήτων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντιστοίχων εργαλείων Σ.Χ.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (2)

- Η εξίσωση (2) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ᾿ ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.
- Θα περιοριστούμε, κατ᾿ αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z^n = e^{j\Omega n}$, δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα τέτοιας μορφής είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε
  1. την επέκταση σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων Δ.Χ. (διακριτή σειρά Fourier)
  2. το μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ως επέκταση της διακριτής σειράς Fourier.
- Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιοτήτων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντίστοιχων εργαλείων Σ.Χ.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (2)

- Η εξίσωση (2) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ᾽ ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.
- Θα περιοριστούμε, κατ᾽ αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z^n = e^{j\Omega n}$, δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα τέτοιας μορφής είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε
    1. την επέκταση σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων Δ.Χ. (διακριτή σειρά Fourier)
    2. το μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ως επέκταση της διακριτής σειράς Fourier.
- Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιοτήτων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντίστοιχων εργαλείων Σ.Χ.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου σε μιγαδικά εκθετικά

Ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων Δ.Χ. (2)

- Η εξίσωση (2) μαζί με την ιδιότητα της υπέρθεσης υποδηλώνουν ότι η αναπαράσταση της εισόδου ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών οδηγεί σ᾽ ένα βολικό τρόπο αναπαράστασης της εξόδου με τη χρήση μιγαδικών εκθετικών.
- Θα περιοριστούμε, κατ᾽ αρχήν, σε μιγαδικά εκθετικά της μορφής $z^n = e^{j\Omega n}$, δηλαδή τέτοια με $|z| = 1$. Σήματα τέτοιας μορφής είναι φανταστικά εκθετικά. Θα μελετήσουμε
    1. την επέκταση σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων Δ.Χ. (διακριτή σειρά Fourier)
    2. το μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ως επέκταση της διακριτής σειράς Fourier.
- Η μελέτη αποβλέπει στην ανάδειξη των ομοιότητων και τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των εργαλείων Δ.Χ. και των αντιστοίχων εργαλείων Σ.Χ.

Αρμονικές Δ.Χ.

- Ένα σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό όταν $\exists N \in \mathbb{Z}^{+}$: $x[n] = x[n+N]$. Το σήμα $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ είναι περιοδικό σήμα Δ.Χ. με περίοδο N, επειδή $e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$.
- Τα φανταστικά εκθετικά με περίοδο N δίνονται από τη σχέση $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$. Τα σήματα αυτά έχουν συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας $\frac{2\pi}{N}$ και επομένως είναι αρμονικές.
- Ενώ όλα τα σήματα Σ.Χ. $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ είναι διακεκριμένα, υπάρχουν μόνο N διαφορετικά σήματα στο σύνολο $\{\phi_k[n] = e^{jk\Omega n}\}$, επειδή τα φανταστικά εκθετικά που διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π είναι ταυτόσημα. Όντως $e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n}\, e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n}$ ή

$$\phi_{k+Nr}[n] = e^{j(k+Nr)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi rn} = \phi_k[n]. \quad (3)$$

  Επομένως το k πρέπει να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N, π.χ. $k = 0, 1, \ldots, N-1$ ή $k = 3, 4, \ldots, N+2$, κ.ο.κ.

Αρμονικές Δ.Χ.

- Ένα σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό όταν $\exists N \in \mathbb{Z}^+$: $x[n] = x[n+N]$. Το σήμα $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ είναι περιοδικό σήμα Δ.Χ. με περίοδο N, επειδή $e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$.
- Τα φανταστικά εκθετικά με περίοδο N δίνονται από τη σχέση $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$. Τα σήματα αυτά έχουν συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας $\frac{2\pi}{N}$ και επομένως είναι αρμονικές.
- Ενώ όλα τα σήματα Σ.Χ. $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ είναι διακεκριμένα, υπάρχουν μόνο N διαφορετικά σήματα στο σύνολο $\{\phi_k[n] = e^{jk\Omega n}\}$, επειδή τα φανταστικά εκθετικά που διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π είναι ταυτόσημα. Όντως $e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n}\, e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n}$ ή

$$\phi_{k+Nr}[n] = e^{j(k+Nr)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi rn} = \phi_k[n]. \qquad (3)$$

Επομένως το k πρέπει να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N, π.χ. $k = 0, 1, \ldots, N-1$ ή $k = 3, 4, \ldots, N+2$, κ.ο.κ.

Διακριτή Σειρά Fourier

Αρμονικές Δ.Χ.

- Ένα σήμα Δ.Χ. είναι περιοδικό όταν $\exists N \in \mathbb{Z}^+$: $x[n] = x[n+N]$. Το σήμα $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ είναι περιοδικό σήμα Δ.Χ. με περίοδο N, επειδή $e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$.
- Τα φανταστικά εκθετικά με περίοδο N δίνονται από τη σχέση $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$. Τα σήματα αυτά έχουν συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας $\frac{2\pi}{N}$ και επομένως είναι αρμονικές.
- Ενώ όλα τα σήματα Σ.Χ. $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ είναι διακεκριμένα, υπάρχουν μόνο N διαφορετικά σήματα στο σύνολο $\{\phi_k[n] = e^{jk\Omega n}\}$, επειδή τα φανταστικά εκθετικά που διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π είναι ταυτόσημα. Όντως $e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n}\, e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n}$ ή

$$\phi_{k+Nr}[n] = e^{j(k+Nr)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\, e^{j2\pi rn} = \phi_k[n]. \tag{3}$$

  Επομένως το k πρέπει να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N, π.χ. $k = 0, 1, \ldots, N-1$ ή $k = 3, 4, \ldots, N+2$, κ.ο.κ.

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (1)

Έτσι το άθροισμα στην επέκταση σε σειρά Fourier θα πρέπει να περιοριστεί σε N προσθετέους

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, \phi_k[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{4}$$

Η (4) ορίζει τη διακριτή σειρά Fourier, όπου a_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier.

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (2)

Το πρόβλημα εύρεσης των συντελεστών a_k ισοδυναμεί με εύρεση της λύσης του συνόλου των N γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=<N>} a_k \\ x[1] &= \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\frac{2\pi k}{N}} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=<N>} a_k \, e^{j\frac{2\pi k(N-1)}{N}} \end{aligned} \tag{5}$$

για διαδοχικές τιμές του n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Το σύστημα των εξισώσεων (5) είναι σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους a_k, για $k =< N >$. Μπορεί να δειχθεί ότι οι N εξισώσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση ως προς a_k.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (3)

- Θα δείξουμε ότι μπορεί να υπολογιστεί μια κλειστή σχέση για τους συντελεστές a_k με όρους των δειγμάτων $x[n]$, ώστε να μη χρειάζεται να καταφεύγουμε σε επίλυση συστήματος εξισώσεων. Προς τούτο βοηθά η ταυτότητα:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{6}$$

  δηλαδή, το άθροισμα των τιμών ενός φανταστικού εκθετικού σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν, εκτός αν το φανταστικό εκθετικό είναι σταθερά.

- Παρατηρήστε ότι ο λόγος

$$\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+1)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = e^{jk\frac{2\pi}{N}} \tag{7}$$

  δεν εξαρτάται από το n, οπότε έχουμε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (3)

- Θα δείξουμε ότι μπορεί να υπολογιστεί μια κλειστή σχέση για τους συντελεστές a_k με όρους των δειγμάτων $x[n]$, ώστε να μη χρειάζεται να καταφεύγουμε σε επίλυση συστήματος εξισώσεων. Προς τούτο βοηθά η ταυτότητα:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{6}$$

δηλαδή, το άθροισμα των τιμών ενός φανταστικού εκθετικού σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν, εκτός αν το φανταστικό εκθετικό είναι σταθερά.

- Παρατηρήστε ότι ο λόγος

$$\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+1)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = e^{jk\frac{2\pi}{N}} \tag{7}$$

δεν εξαρτάται από το n, οπότε έχουμε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (4)

- Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο a δίνεται από την

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1. \end{cases} \quad (8)$$

- Για $k = 0, \pm N, \pm 2N \ldots$ έχουμε $e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 1$.
- Επομένως

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (9)$$

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (4)

- Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο a δίνεται από την

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1. \end{cases} \tag{8}$$

- Για $k = 0, \pm N, \pm 2N \ldots$ έχουμε $e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 1$.
- Επομένως

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{9}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (4)

- Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο a δίνεται από την

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1. \end{cases} \tag{8}$$

- Για $k = 0, \pm N, \pm 2N \ldots$ έχουμε $e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = 1$.
- Επομένως

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases} \tag{9}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (5)

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την (6) για $N = 6$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το άθροισμα όλων των φασικών διανυσμάτων είναι μηδέν εκτός αν $k = 0, 6, 12, \ldots$
- Για κάθε n ο γραμμικός συνδυασμός των φασικών διανυσμάτων (ένα από κάθε γράφημα) με τους συντελεστές a_k δίνει το $x[n]$, δηλαδή $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$.

Γεωμετρική ερμηνεία με χρήση φασικών διανυσμάτων (Σχήμα 7.1)

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (5)

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την (6) για $N = 6$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το άθροισμα όλων των φασικών διανυσμάτων είναι μηδέν εκτός αν $k = 0, 6, 12, \ldots$
- Για κάθε n ο γραμμικός συνδυασμός των φασικών διανυσμάτων (ένα από κάθε γράφημα) με τους συντελεστές a_k δίνει το $x[n]$, δηλαδή $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$.

Γεωμετρική ερμηνεία με χρήση φασικών διανυσμάτων (Σχήμα 7.1)

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (6)

- Ας πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (4) με $e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$ και ας αθροίσουμε για $n = < N >$

$$\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$\sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N\, a_r & k-r = \lambda N, \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \qquad (10)$$

- Διαλέγουμε το k να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N που περιέχει το r. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq k-r < N \\ k-r = \lambda N \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 0. \qquad (11)$$

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (6)

- Ας πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (4) με $e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$ και ας αθροίσουμε για $n =< N >$

$$\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$\sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N\,a_r & k-r=\lambda N, \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{10}$$

- Διαλέγουμε το k να μεταβάλλεται σε διάστημα τιμών εύρους N που περιέχει το r. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq k-r < N \\ k-r=\lambda N \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 0. \tag{11}$$

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (7)

- Αλλά $\lambda = 0$ συνεπάγεται $k = r$. Επομένως το δεξί μέρος της (10) είναι μη-μηδενικό για $k = r$, ενώ μηδενίζεται για $k \neq r$. Οπότε λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n} \qquad k = 0, \ldots, N-1. \tag{12}$$

  Η (12) αποτελεί την εξίσωση ανάλυσης της διακριτής σειράς Fourier. Οι συντελεστές a_k είναι οι φασματικοί συντελεστές της ακολουθίας $x[n]$.

- Η εξίσωση σύνθεσης της διακριτής σειράς Fourier είναι

$$x[n] \triangleq \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n}. \tag{13}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (7)

- Αλλά $\lambda = 0$ συνεπάγεται $k = r$. Επομένως το δεξί μέρος της (10) είναι μη-μηδενικό για $k = r$, ενώ μηδενίζεται για $k \neq r$. Οπότε λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n} \qquad k = 0, \ldots, N-1. \tag{12}$$

  Η (12) αποτελεί την εξίσωση ανάλυσης της διακριτής σειράς Fourier. Οι συντελεστές a_k είναι οι φασματικοί συντελεστές της ακολουθίας $x[n]$.

- Η εξίσωση σύνθεσης της διακριτής σειράς Fourier είναι

$$x[n] \triangleq \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,n}. \tag{13}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (8)

- Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{14}$$

- Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{15}$$

οπότε πρέπει και αρκεί $a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]$. Αλλά $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, οπότε $a_0 = a_N$ και γενικότερα $a_k = a_{k+N}$.

- Οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N.

Διακριτή Σειρά Fourier

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (8)

- Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{14}$$

- Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, ..., N\}$, τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{15}$$

  οπότε πρέπει και αρκεί $a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]$. Αλλά $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, οπότε $a_0 = a_N$ και γενικότερα $a_k = a_{k+N}$.

- Οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (8)

- Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{14}$$

- Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, ..., N\}$, τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{15}$$

  οπότε πρέπει και αρκεί $a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]$. Αλλά $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, οπότε $a_0 = a_N$ και γενικότερα $a_k = a_{k+N}$.
- Οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N.
  1. Η αναπαράσταση σειράς Fourier Δ.Χ. είναι πεπερασμένη και αποτελείται από N όρους.
  2. Η (13) ορίζεται ως άθροισμα σε οποιοδήποτε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο N διαδοχικών τιμών του k.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (8)

- Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{14}$$

- Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{15}$$

  οπότε πρέπει και αρκεί $a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]$. Αλλά $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, οπότε $a_0 = a_N$ και γενικότερα $a_k = a_{k+N}$.

- Οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N.
  1. Η αναπαράσταση σειράς Fourier Δ.Χ. είναι πεπερασμένη και αποτελείται από N όρους.
  2. Η (13) ορίζεται ως άθροισμα σε οποιοδήποτε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο N διαδοχικών τιμών του k.

Προσδιορισμός των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier (8)

- Σημαντική παρατήρηση: Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ στην εξίσωση σύνθεσης. Τότε

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]. \tag{14}$$

- Αν τώρα διαλέγαμε $k \in \{1, 2, ..., N\}$, τότε είναι εξίσου έγκυρη η επέκταση

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + \cdots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n] + a_N\phi_N[n] \tag{15}$$

  οπότε πρέπει και αρκεί $a_0\phi_0[n] = a_N\phi_N[n]$. Αλλά $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, οπότε $a_0 = a_N$ και γενικότερα $a_k = a_{k+N}$.
- Οι συντελεστές a_k επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N.
  1. Η αναπαράσταση σειράς Fourier Δ.Χ. είναι πεπερασμένη και αποτελείται από N όρους.
  2. Η (13) ορίζεται ως άθροισμα σε οποιοδήποτε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο N διαδοχικών τιμών του k.

Παράδειγμα 7.1 (1)

- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \tag{16}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.

Παράδειγμα 7.1 (1)

- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \tag{16}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.

Παράδειγμα 7.1 (1)

- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \tag{16}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.1 (1)

- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \qquad (16)$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως,

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.1 (1)

- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}) \tag{16}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.

Παράδειγμα 7.1 (1)

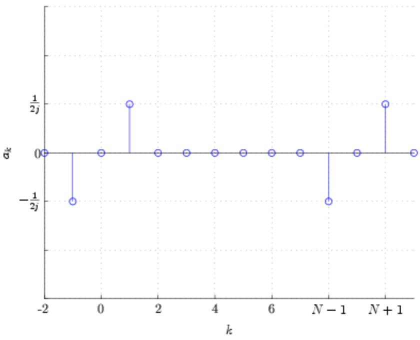
- Έστω $x[n] = \sin \Omega_0 n$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το αν ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι
  1. ακέραιος
  2. λόγος ακεραίων
  3. άρρητος αριθμός.
- Η αναπαράσταση σειράς Fourier αυτού του σήματος ορίζεται μόνο στις πρώτες δυο περιπτώσεις.
- Για την περίπτωση που ο λόγος $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ είναι ακέραιος N, δηλαδή όταν $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ το $x[n]$ είναι περιοδικό σήμα με περίοδο N. Τότε

$$x[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}) \tag{16}$$

άρα $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί. Από τις ιδιότητες των συντελεστών προκύπτει ότι $a_{N+1} = \frac{1}{2j}$ και $a_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Μόνο μια περίοδος $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ χρησιμοποιείται στην εξίσωση συνθέσεως.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.1 (2)



Παράδειγμα 7.1 (3)

- Για την περίπτωση που

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N} \tag{17}$$

όπου N και m δεν έχουν κοινούς παράγοντες, το σήμα είναι πάλι περιοδικό με περίοδο N,

- οπότε επεκτείνεται σε σειρά Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}. \tag{18}$$

Άρα $a_m = \frac{1}{2j}$, $a_{-m} = -\frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν. Λ.χ. για $N = 5$ και $m = 3$ έχουμε $a_0 = a_1 = 0$, $a_{5-3} = a_2 = -\frac{1}{2j}$, $a_3 = \frac{1}{2j}$, $a_4 = 0$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.1 (3)

- Για την περίπτωση που

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N} \qquad (17)$$

όπου N και m δεν έχουν κοινούς παράγοντες, το σήμα είναι πάλι περιοδικό με περίοδο N,

- οπότε επεκτείνεται σε σειρά Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}. \qquad (18)$$

Άρα $a_m = \frac{1}{2j}$, $a_{-m} = -\frac{1}{2j}$ και οι υπόλοιποι συντελεστές σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδέν. Λ.χ. για $N = 5$ και $m = 3$ έχουμε $a_0 = a_1 = 0$, $a_{5-3} = a_2 = -\frac{1}{2j}$, $a_3 = \frac{1}{2j}$, $a_4 = 0$.

Παράδειγμα 7.2 (1)

- Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = 1 + \sin\frac{2\pi}{N}n + 3\cos\frac{2\pi}{N}n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right). \tag{19}$$

- Για να υπολογιστεί η διακριτή σειρά Fourier αρκεί να εφαρμοστεί η ταυτότητα του Euler

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + 3\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\frac{2\pi}{N}n + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\frac{2\pi}{N}n + \frac{\pi}{2})}\right] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + j\frac{1}{2}e^{j2\frac{2\pi}{N}n} - j\frac{1}{2}e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}. \end{aligned} \tag{20}$$

Παράδειγμα 7.2 (1)

- Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = 1 + \sin\frac{2\pi}{N}n + 3\cos\frac{2\pi}{N}n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (19)$$

- Για να υπολογιστεί η διακριτή σειρά Fourier αρκεί να εφαρμοστεί η ταυτότητα του Euler

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + 3\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\frac{2\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\frac{2\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})}\right] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + j\frac{1}{2}e^{j2\frac{2\pi}{N}n} - j\frac{1}{2}e^{-j2\frac{2\pi}{N}n}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Παράδειγμα 7.2 (2)

- Αναγνωρίζουμε ότι

$$\left.\begin{array}{llll} a_0 = 1 & & \\ a_1 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} & & a_{-1} = a_1^* \\ a_2 = j\frac{1}{2} & & a_{-2} = a_2^* \end{array}\right\} \qquad (21)$$

ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.

- Γενικότερα για κάθε πραγματική ακολουθία $x[n]$ ισχύει

$$a_{-k} = a_k^*. \qquad (22)$$

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

Παραλληλίζονται προς τις αντίστοιχες ιδιότητες της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου.

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.2 (2)

- Αναγνωρίζουμε ότι

$$\left.\begin{array}{llll} a_0 = 1 & & \\ a_1 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} & & a_{-1} = a_1^* \\ a_2 = j\frac{1}{2} & & a_{-2} = a_2^* \end{array}\right\} \tag{21}$$

ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.

- Γενικότερα για κάθε πραγματική ακολουθία $x[n]$ ισχύει

$$a_{-k} = a_k^*. \tag{22}$$

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

Παραλληλίζονται προς τις αντίστοιχες ιδιότητες της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου.

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.2 (2)

- Αναγνωρίζουμε ότι

$$\left.\begin{array}{llll} a_0 = 1 & & & \\ a_1 = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} & & a_{-1} = a_1^* & \\ a_2 = j\frac{1}{2} & & a_{-2} = a_2^* & \end{array}\right\} \tag{21}$$

  ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί.

- Γενικότερα για κάθε πραγματική ακολουθία $x[n]$ ισχύει

$$a_{-k} = a_k^*. \tag{22}$$

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

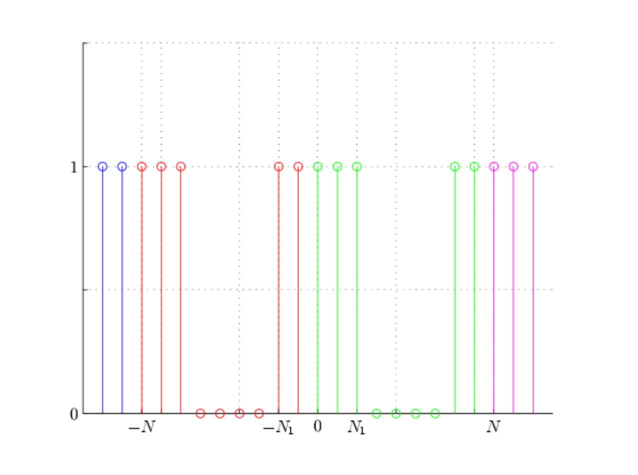
Παραλληλίζονται προς τις αντίστοιχες ιδιότητες της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου.

Ιδιότητες διακριτής σειράς Fourier

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.3 (1)

Έστω η περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά Δ.Χ. διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων.



Παράδειγμα 7.3 (2)

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{23}$$

- Αν γίνει η αλλαγή μεταβλητής $m = n + N_1$, για $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} \left(e^{jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} - e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} \right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \right)} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3 (2)

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{23}$$

- Αν γίνει η αλλαγή μεταβλητής $m = n + N_1$, για $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} \left(e^{jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} - e^{-jk2\pi\frac{2N_1+1}{2N}} \right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \right)} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3 (3)

- $$a_k = \frac{1}{N} \exp\left\{ jk2\pi\left[\frac{N_1}{N} - \frac{2N_1+1}{2N} + \frac{1}{2N}\right]\right\} \frac{2j\sin(2\pi k \frac{2N_1+1}{2N})}{2j\sin(2\pi \frac{k}{2N})}$$
$$= \frac{1}{N} \frac{\sin(2\pi k \frac{2N_1+1}{2N})}{\sin(\frac{2\pi k}{2N})}. \quad (24)$$

- Αν $k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ τότε $a_k = \frac{2N_1+1}{N}$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.3 (3)

- $$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \exp\left\{ jk2\pi\left[\frac{N_1}{N} - \frac{2N_1+1}{2N} + \frac{1}{2N}\right]\right\} \frac{2j\sin(2\pi k\frac{2N_1+1}{2N})}{2j\sin(2\pi\frac{k}{2N})} \\ &= \frac{1}{N}\frac{\sin(2\pi k\frac{2N_1+1}{2N})}{\sin(\frac{2\pi k}{2N})}. \end{aligned} \tag{24}$$
- Αν $k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ τότε $a_k = \frac{2N_1+1}{N}$.

Παράδειγμα 7.3 (4)

- Η έκφραση (24) για τους συντελεστές της σειράς Fourier γράφεται πιο συνοπτικά

$$Na_k = \frac{\sin\left(2N_1 + 1\right)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{25}$$

- οπότε οι συντελεστές της σειράς Fourier αναγνωρίζονται ως N δείγματα της περιβάλλουσας της συνάρτησης συνεχούς μεταβλητής Ω

$$\frac{1}{N}\frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \tag{26}$$

που λαμβάνονται με ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος τιμών $[0, 2\pi)$ της μεταβλητής Ω.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.3 (4)

- Η έκφραση (24) για τους συντελεστές της σειράς Fourier γράφεται πιο συνοπτικά

$$Na_k = \frac{\sin\left(2N_1+1\right)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{25}$$

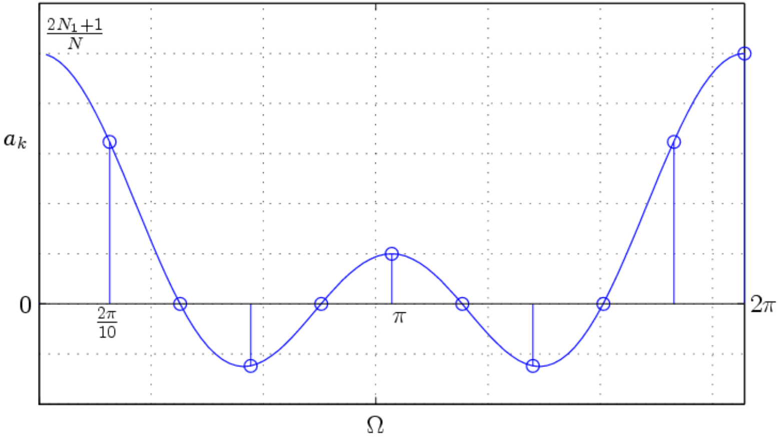
- οπότε οι συντελεστές της σειράς Fourier αναγνωρίζονται ως N δείγματα της περιβάλλουσας της συνάρτησης συνεχούς μεταβλητης Ω

$$\frac{1}{N}\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \tag{26}$$

που λαμβάνονται με ομοιόμορφη δειγματοληψία του διαστήματος τιμών $[0,2\pi)$ της μεταβλητής Ω.

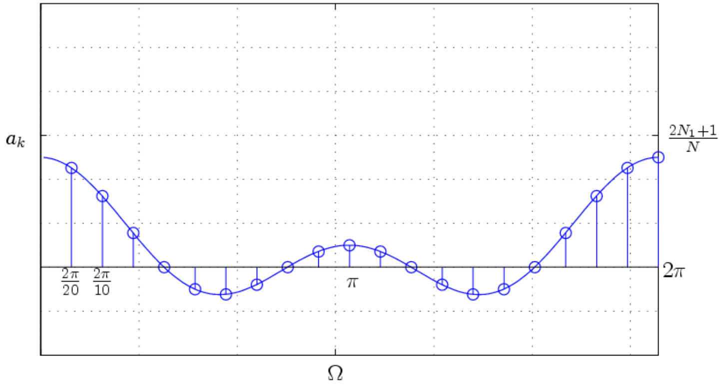
Παράδειγμα 7.3 (5)

Συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικό τετραγωνικό παλμό 5 μη-μηδενικών δειγμάτων και περιόδου 10.



Παράδειγμα 7.3 (6)

Αν η περίοδος του τετραγωνικού παλμού αυξηθεί σε $N = 20$, τότε θα προκύψει πιό πυκνή δειγματοληψία της περιβάλλουσας (26). Η περιβάλλουσα έχει την ίδια μορφή όπως πριν αλλά το μισό ύψος.



Παράδειγμα 7.3: Σύγκριση με σειρά Fourier Σ.Χ.

- Ας συγκρίνουμε τη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου με την αντίστοιχη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού συνεχούς χρόνου. Οι συντελεστές της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου ήταν

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1), \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{27}$$

- Παρατηρούμε ότι στη διακριτή σειρά Fourier η συναρτησιακή μορφή της περιβάλλουσας είναι, με την ευρεία έννοια, πάλι τύπου sinc, αλλά με κάπως διαφορετικά ορισμένη τη συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ αυτή τη φορά. Η απαίτηση για περιοδική σειρά συντελεστών οδηγεί στην τροποποίηση του ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{sinc}(x)$ σε

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \beta x}{\sin x}. \tag{28}$$

Παράδειγμα 7.3: Σύγκριση με σειρά Fourier Σ.Χ.

- Ας συγκρίνουμε τη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού διακριτού χρόνου με την αντίστοιχη σειρά Fourier του περιοδικού τετραγωνικού παλμού συνεχούς χρόνου. Οι συντελεστές της σειράς Fourier συνεχούς χρόνου ήταν

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1), \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{27}$$

- Παρατηρούμε ότι στη διακριτή σειρά Fourier η συναρτησιακή μορφή της περιβάλλουσας είναι, με την ευρεία έννοια, πάλι τύπου sinc, αλλά με κάπως διαφορετικά ορισμένη τη συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ αυτή τη φορά. Η απαίτηση για περιοδική σειρά συντελεστών οδηγεί στην τροποποίηση του ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{sinc}(x)$ σε

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \beta x}{\sin x}. \tag{28}$$

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.3: Φαινόμενο Gibbs (1)

- Η σειρά Fourier Σ.Χ. εγγυάται τη βέλτιστη ανακατασκευή του περιοδικού σήματος Σ.Χ. αν πάρουμε άπειρους όρους στην επέκταση. Για να μειώσουμε τα λάθη ανακατασκευής, και επομένως να συγκλίνει η σειρά, αρκούσε να παίρνουμε ολοένα και περισσότερους όρους στην επέκταση. Αλλά με την αύξηση του αριθμού των όρων παρατηρούσαμε το φαινόμενο Gibbs στις ασυνέχειες.
- Η μελέτη της αντίστοιχης περίπτωσης στα σήματα Δ.Χ. καταδεικνύει ότι δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης ούτε φαινόμενο Gibbs. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η περιοδική ακολουθία Δ.Χ. προσδιορίζεται από πεπερασμένο αριθμό, N παραμέτρων, τις τιμές της ακολουθίας στο διάστημα μιας περιόδου. Η εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier μετασχηματίζει αυτό το σύνολο των N παραμέτρων σε ένα ισοδύναμο σύνολο, τις τιμές των N συντελεστών Fourier και η εξίσωση σύνθεσης μας λέει πώς να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 7.3: Φαινόμενο Gibbs (1)

- Η σειρά Fourier Σ.Χ. εγγυάται τη βέλτιστη ανακατασκευή του περιοδικού σήματος Σ.Χ. αν πάρουμε άπειρους όρους στην επέκταση. Για να μειώσουμε τα λάθη ανακατασκευής, και επομένως να συγκλίνει η σειρά, αρκούσε να παίρνουμε ολοένα και περισσότερους όρους στην επέκταση. Αλλά με την αύξηση του αριθμού των όρων παρατηρούσαμε το φαινόμενο Gibbs στις ασυνέχειες.
- Η μελέτη της αντίστοιχης περίπτωσης στα σήματα Δ.Χ. καταδεικνύει ότι δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης ούτε φαινόμενο Gibbs. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η περιοδική ακολουθία Δ.Χ. προσδιορίζεται από πεπερασμένο αριθμό, N παραμέτρων, τις τιμές της ακολουθίας στο διάστημα μιας περιόδου. Η εξίσωση ανάλυσης της σειράς Fourier μετασχηματίζει αυτό το σύνολο των N παραμέτρων σε ένα ισοδύναμο σύνολο, τις τιμές των N συντελεστών Fourier και η εξίσωση σύνθεσης μας λέει πώς να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 7.3: Φαινόμενο Gibbs (2)

- Πράγματι· για περιοδικό σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με περίοδο N έστω το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{29}$$

για αρκετές τιμές του M.

1. Ας θεωρηθεί ότι N είναι περιττός αριθμός, λ.χ. $N = 9$. Τότε μπορεί να δειχτεί ότι για $M = 4$ η ανακατασκευή είναι τέλεια. Επομένως για N περιττό, αν πάρουμε $M = \frac{N-1}{2}$ όρους, τότε το άθροισμα περιέχει ακριβώς N όρους και $\hat{x}[n] = x[n]$.
2. Αν N είναι άρτιος, $\hat{x}[n] = x[n]$ αρκεί να υπολογίσουμε το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ. για $M = \frac{N}{2}$, μέσω της

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{30}$$

Παράδειγμα 7.3: Φαινόμενο Gibbs (2)

- Πράγματι· για περιοδικό σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με περίοδο N έστω το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{29}$$

για αρκετές τιμές του M.

1. Ας θεωρηθεί ότι N είναι περιττός αριθμός, λ.χ. $N = 9$. Τότε μπορεί να δειχτεί ότι για $M = 4$ η ανακατασκευή είναι τέλεια. Επομένως για N περιττό, αν πάρουμε $M = \frac{N-1}{2}$ όρους, τότε το άθροισμα περιέχει ακριβώς N όρους και $\hat{x}[n] = x[n]$.
2. Αν N είναι άρτιος, $\hat{x}[n] = x[n]$ αρκεί να υπολογίσουμε το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ. για $M = \frac{N}{2}$, μέσω της

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{30}$$

Παράδειγμα 7.3: Φαινόμενο Gibbs (2)

- Πράγματι· για περιοδικό σήμα Δ.Χ. $x[n]$ με περίοδο N έστω το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{29}$$

για αρκετές τιμές του M.

1. Ας θεωρηθεί ότι N είναι περιττός αριθμός, λ.χ. $N = 9$. Τότε μπορεί να δειχτεί ότι για $M = 4$ η ανακατασκευή είναι τέλεια. Επομένως για N περιττό, αν πάρουμε $M = \frac{N-1}{2}$ όρους, τότε το άθροισμα περιέχει ακριβώς N όρους και $\hat{x}[n] = x[n]$.
2. Αν N είναι άρτιος, $\hat{x}[n] = x[n]$ αρκεί να υπολογίσουμε το ανακατασκευασμένο περιοδικό σήμα Δ.Χ. για $M = \frac{N}{2}$, μέσω της

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{30}$$

Παράδειγμα 7.4 (1)

Έστω η ακόλουθη πληροφορία για την ακολουθία $x[n]$:

1. Η $x[n]$ είναι περιοδική με περίοδο $N = 6$.
2. $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$.
3. $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$.
4. Η $x[n]$ έχει την ελάχιστη ισχύ (ενέργεια ανά περίοδο), όταν ικανοποιούνται οι σχέσεις 1-3.

Να προσδιορίσετε την ακολουθία $x[n]$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.4 (2)

- Από την πληροφορία 2 έχουμε

$$\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\,|_{N=6,k=0} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{31}$$

- Από την πληροφορία 3 αντλούμε ότι

$$\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n] = \sum_{n=0}^{5}(-1)^n x[n]$$

οπότε

$$a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-j3\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n](e^{-j\pi})^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}(-1)^n x[n] = \frac{1}{6}. \tag{32}$$

Παράδειγμα 7.4 (2)

- Από την πληροφορία 2 έχουμε

$$\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\Big|_{N=6,k=0} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{31}$$

- Από την πληροφορία 3 αντλούμε ότι

$$\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n] = \sum_{n=0}^{5}(-1)^n x[n]$$

οπότε

$$a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-j3\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n](e^{-j\pi})^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}(-1)^n x[n] = \frac{1}{6}. \tag{32}$$

Παράδειγμα 7.4 (3)

- Άρα από τις σχέσεις (31) και (32) προσδιορίστηκαν οι συντελεστές a_0 και a_3.
- Από την ταυτότητα του Parseval η ισχύς της ακολουθίας είναι $P = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2$. Η ισχύς καθίσταται ελάχιστη μόνο όταν οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί, δηλαδή $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$.
- $$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n. \tag{33}$$

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.4 (3)

- Άρα από τις σχέσεις (31) και (32) προσδιορίστηκαν οι συντελεστές a_0 και a_3.
- Από την ταυτότητα του Parseval η ισχύς της ακολουθίας είναι $P = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2$. Η ισχύς καθίσταται ελάχιστη μόνο όταν οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί, δηλαδή $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$.
-
$$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n. \tag{33}$$

Παράδειγμα 7.4 (3)

- Άρα από τις σχέσεις (31) και (32) προσδιορίστηκαν οι συντελεστές a_0 και a_3.
- Από την ταυτότητα του Parseval η ισχύς της ακολουθίας είναι $P = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2$. Η ισχύς καθίσταται ελάχιστη μόνο όταν οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδενικοί, δηλαδή $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$.
- $$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n. \tag{33}$$

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (1)

- Αν το περιοδικό σήμα Δ.Χ. που διεγείρει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα αναλυθεί σε σειρά Fourier Δ.Χ. τότε

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{34}$$

- τότε η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} y[n] = (x * h)[n] &= \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-\xi)} \\ &= \sum_{k=<N>} \left\{ a_k \underbrace{\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}\xi}}_{H(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}=H(\frac{2\pi k}{N})} \right\} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \, H(\frac{2\pi k}{N}) \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned} \tag{35}$$

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (1)

- Αν το περιοδικό σήμα Δ.Χ. που διεγείρει ένα Γ.Χ.Α. σύστημα αναλυθεί σε σειρά Fourier Δ.Χ. τότε

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{34}$$

- τότε η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} y[n] = (x * h)[n] &= \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-\xi)} \\ &= \sum_{k=<N>} \left\{ a_k \underbrace{\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}\xi}}_{H(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}=H(\frac{2\pi k}{N})} \right\} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \, H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned} \tag{35}$$

Διακριτή Σειρά Fourier

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (2)

- όπου $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,\xi}$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας για $\Omega = \frac{2\pi}{N} k$.
- Ως απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. ορίζουμε τη συνάρτηση $H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}$.
- Επομένως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι επίσης περιοδική με περίοδο αυτήν της διεγέρσεως $x[n]$. Από την (35) συνάγεται ότι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier της εξόδου είναι

$$b_k = a_k\, H(\frac{2\pi k}{N}). \qquad (36)$$

- Η έκφραση (35) έχει νόημα όταν η απόκριση συχνότητας είναι καλά ορισμένη και φραγμένη. Τέτοιες καλώς συμπεριφερόμενες αποκρίσεις συχνότητας έχουν τα ευσταθή συστήματα π.χ. $h[n] = a^n\, u[n]$ με $|a| < 1$.

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (2)

- όπου $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,\xi}$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας για $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$.
- Ως απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. ορίζουμε τη συνάρτηση $H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}$.
- Επομένως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι επίσης περιοδική με περίοδο αυτήν της διεγέρσεως $x[n]$. Από την (35) συνάγεται ότι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier της εξόδου είναι

$$b_k = a_k\, H(\frac{2\pi k}{N}). \tag{36}$$

- Η έκφραση (35) έχει νόημα όταν η απόκριση συχνότητας είναι καλά ορισμένη και φραγμένη. Τέτοιες καλώς συμπεριφερόμενες αποκρίσεις συχνότητας έχουν τα ευσταθή συστήματα π.χ. $h[n] = a^n\, u[n]$ με $|a| < 1$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (2)

- όπου $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi]\, e^{-j\, k\, \frac{2\pi}{N}\, \xi}$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας για $\Omega = \frac{2\pi}{N} k$.
- Ως απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. ορίζουμε τη συνάρτηση $H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}$.
- Επομένως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι επίσης περιοδική με περίοδο αυτήν της διεγέρσεως $x[n]$. Από την (35) συνάγεται ότι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier της εξόδου είναι

$$b_k = a_k\, H(\frac{2\pi k}{N}). \tag{36}$$

- Η έκφραση (35) έχει νόημα όταν η απόκριση συχνότητας είναι καλά ορισμένη και φραγμένη. Τέτοιες καλώς συμπεριφερόμενες αποκρίσεις συχνότητας έχουν τα ευσταθή συστήματα π.χ. $h[n] = a^n\, u[n]$ με $|a| < 1$.

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα (2)

- όπου $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h[\xi]\, e^{-j\,k\,\frac{2\pi}{N}\,\xi}$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας για $\Omega = \frac{2\pi}{N} k$.
- Ως απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ. ορίζουμε τη συνάρτηση $H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}$.
- Επομένως η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι επίσης περιοδική με περίοδο αυτήν της διεγέρσεως $x[n]$. Από την (35) συνάγεται ότι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier της εξόδου είναι

$$b_k = a_k\, H(\frac{2\pi k}{N}). \tag{36}$$

- Η έκφραση (35) έχει νόημα όταν η απόκριση συχνότητας είναι καλά ορισμένη και φραγμένη. Τέτοιες καλώς συμπεριφερόμενες αποκρίσεις συχνότητας έχουν τα ευσταθή συστήματα π.χ. $h[n] = a^n\, u[n]$ με $|a| < 1$.

Παράδειγμα 7.5

- Έστω $h[n] = a^n\, u[n]$, για $-1 < a < 1$ και

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{N} = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}.$$

Τότε $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^n = \frac{1}{1-a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$.

- Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}H(\frac{2\pi}{N})\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}H(-\frac{2\pi}{N})\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-a\, e^{j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}. \end{aligned} \quad (37)$$

- Αν εκφράσουμε τον παράγοντα $\frac{1}{1-a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$ σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή ως $r\, e^{j\theta}$, τότε προκύπτει ότι $y[n] = r\, \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$.

Παράδειγμα 7.5

- Έστω $h[n] = a^n\, u[n]$, για $-1 < a < 1$ και

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{N} = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}.$$

Τότε $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^n = \frac{1}{1-a\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$.

- Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}H(\frac{2\pi}{N})\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}H(-\frac{2\pi}{N})\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-a\,e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-a\,e^{j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}. \qquad (37) \end{aligned}$$

- Αν εκφράσουμε τον παράγοντα $\frac{1}{1-a\,e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$ σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή ως $r\, e^{j\theta}$, τότε προκύπτει ότι $y[n] = r\,\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Παράδειγμα 7.5

- Έστω $h[n] = a^n\, u[n]$, για $-1 < a < 1$ και

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{N} = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}.$$

Τότε $H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^n = \frac{1}{1-a\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$.

- Η έξοδος του Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}H(\frac{2\pi}{N})\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}H(-\frac{2\pi}{N})\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-a\, e^{j\frac{2\pi}{N}}}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}. \qquad (37) \end{aligned}$$

- Αν εκφράσουμε τον παράγοντα $\frac{1}{1-a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$ σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή ως $r\, e^{j\theta}$, τότε προκύπτει ότι $y[n] = r\, \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$.

Διακριτή Σειρά Fourier

Φιλτράρισμα

- Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρει να μεταβάλλουμε εκουσίως τα σχετικά πλάτη των συχνοτικών συνιστωσών ενός σήματος, δηλαδή τα πλάτη των φασματικών συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier του σήματος, απαλείφοντας κάποιες συχνοτικές συνιστώσες ή ενισχύοντας κάποιες άλλες. Τα Γ.Χ.Α. συστήματα που αλλάζουν τη μορφή του φάσματος ενός σήματος καλούνται Γ.Χ.Α. φίλτρα.
- Στο Δ.Χ., τα Γ.Χ.Α. φίλτρα βρίσκουν ευρείες εφαρμογές. Συνήθως υλοποιούνται με επεξεργαστές γενικού ή ειδικού σκοπού για να επεξεργαστούν σήματα Σ.Χ. που έχουν υποστεί δειγματοληψία (π.χ., ομιλία) ή χρονοσειρές, όπως δημογραφικά δεδομένα, τιμές χρηματιστηριακών δεικτών κ.ο.κ.

Διακριτή Σειρά Fourier

Φιλτράρισμα

- Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρει να μεταβάλλουμε εκουσίως τα σχετικά πλάτη των συχνοτικών συνιστωσών ενός σήματος, δηλαδή τα πλάτη των φασματικών συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier του σήματος, απαλείφοντας κάποιες συχνοτικές συνιστώσες ή ενισχύοντας κάποιες άλλες. Τα Γ.Χ.Α. συστήματα που αλλάζουν τη μορφή του φάσματος ενός σήματος καλούνται Γ.Χ.Α. φίλτρα.
- Στο Δ.Χ., τα Γ.Χ.Α. φίλτρα βρίσκουν ευρείες εφαρμογές. Συνήθως υλοποιούνται με επεξεργαστές γενικού ή ειδικού σκοπού για να επεξεργαστούν σήματα Σ.Χ. που έχουν υποστεί δειγματοληψία (π.χ., ομιλία) ή χρονοσειρές, όπως δημογραφικά δεδομένα, τιμές χρηματιστηριακών δεικτών κ.ο.κ.

Κινούμενος αριθμητικός μέσος

- Το απλούστερο φίλτρο Δ.Χ. είναι το Γ.Χ.Α. σύστημα που υπολογίζει τον αριθμητικό μέσο των N δειγμάτων της εισόδου

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

- Δεν είναι δύσκολο να εξάγουμε την κρουστική απόκριση του αριθμητικού μέσου

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k].$$

- Η απόκριση συχνότητας του αριθμητικού μέσου μπορεί να δειχθεί ότι είναι (Συγκρίνετε με την (26) και σχολιάστε.)

$$H(\Omega) = \frac{1}{N} e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin N\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}.$$

Κινούμενος αριθμητικός μέσος

- Το απλούστερο φίλτρο Δ.Χ. είναι το Γ.Χ.Α. σύστημα που υπολογίζει τον αριθμητικό μέσο των N δειγμάτων της εισόδου

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

- Δεν είναι δύσκολο να εξάγουμε την κρουστική απόκριση του αριθμητικού μέσου

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k].$$

- Η απόκριση συχνότητας του αριθμητικού μέσου μπορεί να δειχθεί ότι είναι (Συγκρίνετε με την (26) και σχολιάστε.)

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\, e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}\, \frac{\sin N\frac{\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}.$$

Κινούμενος αριθμητικός μέσος

- Το απλούστερο φίλτρο Δ.Χ. είναι το Γ.Χ.Α. σύστημα που υπολογίζει τον αριθμητικό μέσο των N δειγμάτων της εισόδου

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

- Δεν είναι δύσκολο να εξάγουμε την κρουστική απόκριση του αριθμητικού μέσου

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta[n-k].$$

- Η απόκριση συχνότητας του αριθμητικού μέσου μπορεί να δειχθεί ότι είναι (Συγκρίνετε με την (26) και σχολιάστε.)

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\, e^{-j\Omega \frac{N-1}{2}}\, \frac{\sin N\frac{\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}}.$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (1)

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικά σήματα είναι δείγματα μιας περιβάλλουσας και καθώς η περίοδος της ακολουθίας αυξάνει, τότε τα δείγματα πυκνώνουν και το διάστημα μεταξύ τους σμικρύνεται.
- Για τα σήματα Σ.Χ. ο μετασχηματισμός Fourier ενός μη-περιοδικού σήματος $x(t)$ προέκυψε από το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ που έχει ως πρώτη περίοδο το δοσμένο σήμα. Στο όριο καθώς $T \to \infty$ προκύπτει ότι $\tilde{x}(t) \to x(t)$, ενώ η σειρά Fourier Σ.Χ. τείνει στο μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.
- Θα ακολουθήσουμε ανάλογη προσέγγιση. Ξεκινούμε από μία μη-περιοδική ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή

$$\exists N_1, N_2 : x[n] = 0, \qquad n \notin [-N_1, N_2] \tag{38}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (1)

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικά σήματα είναι δείγματα μιας περιβάλλουσας και καθώς η περίοδος της ακολουθίας αυξάνει, τότε τα δείγματα πυκνώνουν και το διάστημα μεταξύ τους σμικρύνεται.
- Για τα σήματα Σ.Χ. ο μετασχηματισμός Fourier ενός μη-περιοδικού σήματος $x(t)$ προέκυψε από το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ που έχει ως πρώτη περίοδο το δοσμένο σήμα. Στο όριο καθώς $T \to \infty$ προκύπτει ότι $\tilde{x}(t) \to x(t)$, ενώ η σειρά Fourier Σ.Χ. τείνει στο μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.
- Θα ακολουθήσουμε ανάλογη προσέγγιση. Ξεκινούμε από μία μη-περιοδική ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή

$$\exists N_1, N_2 : x[n] = 0, \qquad n \notin [-N_1, N_2] \tag{38}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

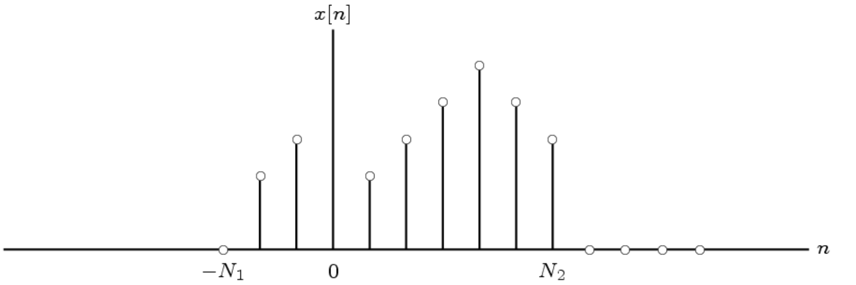
Ορισμός (1)

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικά σήματα είναι δείγματα μιας περιβάλλουσας και καθώς η περίοδος της ακολουθίας αυξάνει, τότε τα δείγματα πυκνώνουν και το διάστημα μεταξύ τους σμικρύνεται.
- Για τα σήματα Σ.Χ. ο μετασχηματισμός Fourier ενός μη-περιοδικού σήματος $x(t)$ προέκυψε από το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ που έχει ως πρώτη περίοδο το δοσμένο σήμα. Στο όριο καθώς $T \to \infty$ προκύπτει ότι $\tilde{x}(t) \to x(t)$, ενώ η σειρά Fourier Σ.Χ. τείνει στο μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.
- Θα ακολουθήσουμε ανάλογη προσέγγιση. Ξεκινούμε από μία μη-περιοδική ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή

$$\exists N_1, N_2 : x[n] = 0, \quad n \notin [-N_1, N_2] \tag{38}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (2): Μη περιοδικό σήμα



Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (3)

- Κατασκευάζουμε το σήμα $\tilde{x}[n]$ που έχει ως πρώτη περίοδο το σήμα $x[n]$ και κατάλληλη περίοδο N. Για $N \to \infty$, παρατηρούμε ότι $\tilde{x}[n] \to x[n]$ για κάθε πεπερασμένο n.
- Αλλά το $\tilde{x}[n]$ ως περιοδικό σήμα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Δ.Χ.:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{39}$$

- όπου οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{40}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (3)

- Κατασκευάζουμε το σήμα $\tilde{x}[n]$ που έχει ως πρώτη περίοδο το σήμα $x[n]$ και κατάλληλη περίοδο N. Για $N \to \infty$, παρατηρούμε ότι $\tilde{x}[n] \to x[n]$ για κάθε πεπερασμένο n.
- Αλλά το $\tilde{x}[n]$ ως περιοδικό σήμα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Δ.Χ.:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{39}$$

- όπου οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{40}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (3)

- Κατασκευάζουμε το σήμα $\tilde{x}[n]$ που έχει ως πρώτη περίοδο το σήμα $x[n]$ και κατάλληλη περίοδο N. Για $N \to \infty$, παρατηρούμε ότι $\tilde{x}[n] \to x[n]$ για κάθε πεπερασμένο n.
- Αλλά το $\tilde{x}[n]$ ως περιοδικό σήμα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Δ.Χ.:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{39}$$

- όπου οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] \, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{40}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (4)

- Επειδή $\tilde{x}[n] = x[n]$ για $n \in [-N_1, N_2]$ και λόγω της (38) η (40) ξαναγράφεται ως

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{41}$$

- Ορίζουμε την περιβάλλουσα

$$X(\Omega) \triangleq X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{42}$$

- τότε οι συντελεστές a_k δίνονται από τη

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \text{με} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{και} \quad k = < N > . \tag{43}$$

Ορισμός (4)

- Επειδή $\tilde{x}[n] = x[n]$ για $n \in [-N_1, N_2]$ και λόγω της (38) η (40) ξαναγράφεται ως

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{41}$$

- Ορίζουμε την περιβάλλουσα

$$X(\Omega) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{42}$$

- τότε οι συντελεστές a_k δίνονται από τη

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)\big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \text{με} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{και} \quad k = \langle N \rangle \,. \tag{43}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (4)

- Επειδή $\tilde{x}[n] = x[n]$ για $n \in [-N_1, N_2]$ και λόγω της (38) η (40) ξαναγράφεται ως

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{41}$$

- Ορίζουμε την περιβάλλουσα

$$X(\Omega) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{42}$$

- τότε οι συντελεστές a_k δίνονται από τη

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \text{με} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{και} \quad k = < N > . \tag{43}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (5)

- Επομένως, οι συντελεστές a_k είναι ανάλογοι προς ισαπέχοντα δείγματα της περιβάλλουσας. Αντικαθιστώντας στην (39) και κάνοντας χρήση της σχέσης $\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ παίρνουμε

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}\, \Omega_0. \qquad (44)$$

- Όταν $N \rightarrow \infty$, τότε

$$\tilde{x}[n] \rightarrow x[n] \quad \text{για } n \in [-N_1, N_2] \qquad (45)$$

$$\Omega_0 \rightarrow d\Omega \qquad (46)$$

$$k\Omega_0 \rightarrow \Omega \quad \text{συνεχής μεταβλητή} \qquad (47)$$

$$\sum_{k=<N>} \rightarrow \int_{2\pi} d\Omega \qquad (48)$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (5)

- Επομένως, οι συντελεστές a_k είναι ανάλογοι προς ισαπέχοντα δείγματα της περιβάλλουσας. Αντικαθιστώντας στην (39) και κάνοντας χρήση της σχέσης $\frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ παίρνουμε

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}\, \Omega_0. \tag{44}$$

- Όταν $N \to \infty$, τότε

$$\tilde{x}[n] \to x[n] \quad \text{για } n \in [-N_1, N_2] \tag{45}$$

$$\Omega_0 \to d\Omega \tag{46}$$

$$k\Omega_0 \to \Omega \quad \text{συνεχής μεταβλητή} \tag{47}$$

$$\sum_{k=<N>} \to \int_{2\pi} d\Omega \tag{48}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (6)

- και η (44) ερμηνεύεται ως αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος στην έκφραση

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{49}$$

  με χρήση του κανόνα του τραπεζίου.

- Μένει να σχολιάσουμε γιατί η ολοκλήρωση στην (49) πρέπει να εκτείνεται σε διάστημα εύρους 2π. Προφανώς η περιβάλλουσα $X(\Omega)$ ως γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών είναι τριγωνομετρική συνάρτηση, άρα είναι περιοδική με περίοδο 2π. Το γινόμενο $X(\Omega)\, e^{j\Omega n}$ θα είναι επίσης περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Επομένως ορθώς το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους 2π.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (6)

- και η (44) ερμηνεύεται ως αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος στην έκφραση

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{49}$$

  με χρήση του κανόνα του τραπεζίου.
- Μένει να σχολιάσουμε γιατί η ολοκλήρωση στην (49) πρέπει να εκτείνεται σε διάστημα εύρους 2π. Προφανώς η περιβάλλουσα $X(\Omega)$ ως γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών είναι τριγωνομετρική συνάρτηση, άρα είναι περιοδική με περίοδο 2π. Το γινόμενο $X(\Omega)\, e^{j\Omega n}$ θα είναι επίσης περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Επομένως ορθώς το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους 2π.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (7)

- Το ζεύγος των εξισώσεων που ορίζει το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{50}$$

$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{51}$$

- οπότε σημειώνουμε $x[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Συνεπώς τα μη-περιοδικά σήματα μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών που είναι απειροστά κοντά στη συχνότητα και έχουν πλάτη $X(\Omega)\,\frac{d\Omega}{2\pi}$.
- Η συνάρτηση $X(\Omega)$ λέγεται φάσμα του σήματος Δ.Χ. $x[n]$ και μας λέει πώς το σήμα $x[n]$ αποσυντίθεται στις διάφορες συχνότητες Ω.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (7)

- Το ζεύγος των εξισώσεων που ορίζει το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{50}$$

$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{51}$$

- οπότε σημειώνουμε $x[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Συνεπώς τα μη-περιοδικά σήματα μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών που είναι απειροστά κοντά στη συχνότητα και έχουν πλάτη $X(\Omega)\,\frac{d\Omega}{2\pi}$.
- Η συνάρτηση $X(\Omega)$ λέγεται φάσμα του σήματος Δ.Χ. $x[n]$ και μας λέει πώς το σήμα $x[n]$ αποσυντίθεται στις διάφορες συχνότητες Ω.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (7)

- Το ζεύγος των εξισώσεων που ορίζει το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{50}$$

$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{51}$$

- οπότε σημειώνουμε $x[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Συνεπώς τα μη-περιοδικά σήματα μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός φανταστικών εκθετικών που είναι απειροστά κοντά στη συχνότητα και έχουν πλάτη $X(\Omega)\,\frac{d\Omega}{2\pi}$.
- Η συνάρτηση $X(\Omega)$ λέγεται φάσμα του σήματος Δ.Χ. $x[n]$ και μας λέει πώς το σήμα $x[n]$ αποσυντίθεται στις διάφορες συχνότητες Ω.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (8)

- Οι συνθήκες σύγκλισης του αθροίσματος (50) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{52}$$

- Μια ουσιώδης διαφορά με το μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ. είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.
- Παρατηρήστε ότι είναι συνάρτηση της συνεχούς ανεξάρτητης μεταβλητής Ω.
- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$, οι χαμηλές συχνότητες στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. εμφανίζονται περί το 0, ενώ οι υψηλές συχνότητες περί το π.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (8)

- Οι συνθήκες σύγκλισης του αθροίσματος (50) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{52}$$

- Μια ουσιώδης διαφορά με το μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ. είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.
- Παρατηρήστε ότι είναι συνάρτηση της συνεχούς ανεξάρτητης μεταβλητής Ω.
- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$, οι χαμηλές συχνότητες στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. εμφανίζονται περί το 0, ενώ οι υψηλές συχνότητες περί το π.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (8)

- Οι συνθήκες σύγκλισης του αθροίσματος (50) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{52}$$

- Μια ουσιώδης διαφορά με το μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ. είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.
- Παρατηρήστε ότι είναι συνάρτηση της συνεχούς ανεξάρτητης μεταβλητής Ω.
- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$, οι χαμηλές συχνότητες στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. εμφανίζονται περί το 0, ενώ οι υψηλές συχνότητες περί το π.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Ορισμός (8)

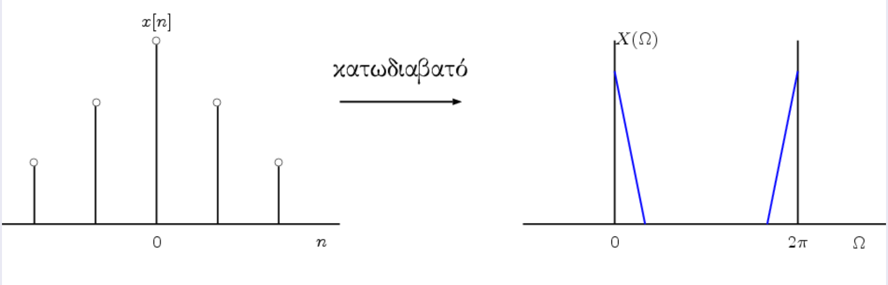
- Οι συνθήκες σύγκλισης του αθροίσματος (50) είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{52}$$

- Μια ουσιώδης διαφορά με το μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ. είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.
- Παρατηρήστε ότι είναι συνάρτηση της συνεχούς ανεξάρτητης μεταβλητής Ω.
- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$, οι χαμηλές συχνότητες στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. εμφανίζονται περί το 0, ενώ οι υψηλές συχνότητες περί το π.

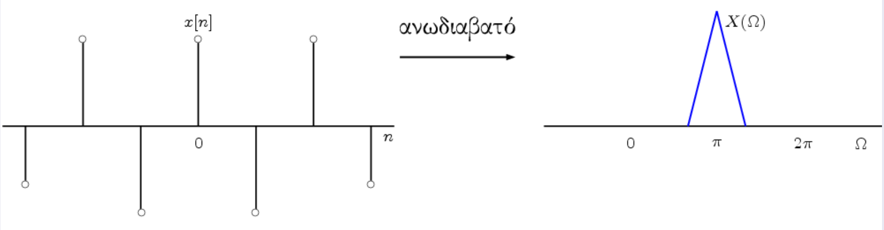
Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Χαμηλές συχνότητες Ω στο διάστημα $[0, 2\pi)$



Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Υψηλές συχνότητες Ω στο διάστημα $[0, 2\pi)$



Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.6

- Για το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^n\, u[n], \quad |a| < 1 \tag{53}$$

- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}. \tag{54}$$

- Για $0 < a < 1$ το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.9.
- Αν $-1 < a < 0$, τότε το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι όπως στο Σχήμα 7.10.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.6

- Για το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^n \, u[n], \quad |a| < 1 \tag{53}$$

- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] \, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a \, e^{-j\Omega}}. \tag{54}$$

- Για $0 < a < 1$ το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.9.
- Αν $-1 < a < 0$, τότε το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι όπως στο Σχήμα 7.10.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.6

- Για το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^n\, u[n], \quad |a| < 1 \tag{53}$$

- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}. \tag{54}$$

- Για $0 < a < 1$ το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.9.
- Αν $-1 < a < 0$, τότε το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι όπως στο Σχήμα 7.10.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.6

- Για το σήμα Δ.Χ.

$$x[n] = a^n \, u[n], \quad |a| < 1 \tag{53}$$

- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] \, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a \, e^{-j\Omega}}. \tag{54}$$

- Για $0 < a < 1$ το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier σχεδιάζονται στο Σχήμα 7.9.
- Αν $-1 < a < 0$, τότε το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι όπως στο Σχήμα 7.10.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.7 (1)

Έστω το σήμα Δ.Χ. $x[n] = a^{|n|}$, $|a| < 1$.

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}\, e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}\, e^{-j\Omega n} \\
&\overset{m=-n}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}\, e^{-j\Omega n} + \sum_{m=+\infty}^{1} a^{m}\, e^{j\Omega m} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n}\, e^{-j\Omega n} + \sum_{m=1}^{+\infty} a^{m}\, e^{j\Omega m} \\
&= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \left(\frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1 \right) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}. \quad (55)
\end{aligned}
$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.7 (2)

- Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\Omega\to 0} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} \tag{56}$$

$$\lim_{\Omega\to \pi} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1+a)^2} = \frac{1-a}{1+a}. \tag{57}$$

- Επομένως για $0 < a < 1$ το σήμα $x[n]$ είναι κατωδιαβατό. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. είναι όπως στο Σχήμα 7.11.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.7 (2)

- Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\Omega\to 0} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} \quad (56)$$

$$\lim_{\Omega\to \pi} X(\Omega) = \frac{1-a^2}{(1+a)^2} = \frac{1-a}{1+a}. \quad (57)$$

- Επομένως για $0 < a < 1$ το σήμα $x[n]$ είναι κατωδιαβατό. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. είναι όπως στο Σχήμα 7.11.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.8

- Έστω τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 . \end{cases} \qquad (58)$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \qquad (59)$$

- που αποτελεί το διακριτό ανάλογο της sinc. Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σχεδιάζεται για $N_1 = 1$ και $N_1 = 2$ στο Σχήμα 7.12.
- Δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης στην εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, γιατί η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα. Παρομοίως δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.8

- Έστω τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 . \end{cases} \tag{58}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega (N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \tag{59}$$

- που αποτελεί το διακριτό ανάλογο της sinc. Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σχεδιάζεται για $N_1 = 1$ και $N_1 = 2$ στο Σχήμα 7.12.
- Δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης στην εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, γιατί η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα. Παρομοίως δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.8

- Έστω τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1. \end{cases} \tag{58}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega (N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \tag{59}$$

- που αποτελεί το διακριτό ανάλογο της sinc. Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σχεδιάζεται για $N_1 = 1$ και $N_1 = 2$ στο Σχήμα 7.12.
- Δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης στην εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, γιατί η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα. Παρομοίως δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.8

- Έστω τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2N_1 + 1$ δειγμάτων

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1. \end{cases} \quad (58)$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \quad (59)$$

- που αποτελεί το διακριτό ανάλογο της sinc. Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. σχεδιάζεται για $N_1 = 1$ και $N_1 = 2$ στο Σχήμα 7.12.
- Δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης στην εξίσωση σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, γιατί η ολοκλήρωση γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα. Παρομοίως δεν υπάρχει φαινόμενο Gibbs.

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.9

- Για το σήμα $x[n] = \delta[n]$ ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1. \tag{60}$$

- Αν ορίσουμε ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \tag{61}$$

- τότε για $W \to \pi$ παίρνουμε:

$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \to \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]. \tag{62}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.9

- Για το σήμα $x[n] = \delta[n]$ ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1. \tag{60}$$

- Αν ορίσουμε ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \tag{61}$$

- τότε για $W \to \pi$ παίρνουμε:

$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \to \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]. \tag{62}$$

Αναπαράσταση μη-περιοδικών σημάτων: Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.9

- Για το σήμα $x[n] = \delta[n]$ ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1. \tag{60}$$

- Αν ορίσουμε ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \tag{61}$$

- τότε για $W \to \pi$ παίρνουμε:

$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} \to \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]. \tag{62}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Ερωτήματα

Μπορούν να καθιερωθούν σημαντικές σχέσεις μεταξύ της αναπαράστασης σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων και του μετασχηματισμού Fourier μη-περιοδικών σημάτων που αποβλέπουν στην αντιμετώπιση των ακόλουθων ερωτημάτων:

1. Πώς η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να αποκτηθεί από το μετασχηματισμό Fourier της πρώτης περιόδου της ακολουθίας;
2. Πώς η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να συμπεριληφθεί στο πλαίσιο του μετασχηματισμού Fourier ερμηνεύοντας το μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος σαν τρένο ώσεων στο πεδίο της συχνότητας;

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Ερωτήματα

Μπορούν να καθιερωθούν σημαντικές σχέσεις μεταξύ της αναπαράστασης σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων και του μετασχηματισμού Fourier μη-περιοδικών σημάτων που αποβλέπουν στην αντιμετώπιση των ακόλουθων ερωτημάτων:

1. Πώς η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να αποκτηθεί από το μετασχηματισμό Fourier της πρώτης περιόδου της ακολουθίας;
2. Πώς η επέκταση σε σειρά Fourier περιοδικών σημάτων μπορεί να συμπεριληφθεί στο πλαίσιο του μετασχηματισμού Fourier ερμηνεύοντας το μετασχηματισμό Fourier ενός περιοδικού σήματος σαν τρένο ώσεων στο πεδίο της συχνότητας;

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της πρώτης περιόδου

- Έστω $\tilde{x}[n]$ περιοδικό σήμα με περίοδο N. Ας θεωρήσουμε ότι το σήμα $x[n]$ αναπαριστά μια περίοδο του $\tilde{x}[n]$. Τότε για αυθαίρετο M

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{αν } M \leq n \leq M+N-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{63}$$

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier του $\tilde{x}[n]$ είναι

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{64}$$

όπου $x[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$.

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$ εξαρτάται από την επιλογή του M στη (63), ενώ τα δείγματά του, $X(\frac{2\pi k}{N})$, δεν εξαρτώνται από το M. Τούτο φαίνεται στο Παράδειγμα 8.10.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της πρώτης περιόδου

- Έστω $\tilde{x}[n]$ περιοδικό σήμα με περίοδο N. Ας θεωρήσουμε ότι το σήμα $x[n]$ αναπαριστά μια περίοδο του $\tilde{x}[n]$. Τότε για αυθαίρετο M

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{αν } M \leq n \leq M+N-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{63}$$

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier του $\tilde{x}[n]$ είναι

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi k}{N}) \tag{64}$$

όπου $x[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$.

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$ εξαρτάται από την επιλογή του M στη (63), ενώ τα δείγματά του, $X(\frac{2\pi k}{N})$, δεν εξαρτώνται από το M. Τούτο φαίνεται στο Παράδειγμα 8.10.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της πρώτης περιόδου

- Έστω $\tilde{x}[n]$ περιοδικό σήμα με περίοδο N. Ας θεωρήσουμε ότι το σήμα $x[n]$ αναπαριστά μια περίοδο του $\tilde{x}[n]$. Τότε για αυθαίρετο M

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{αν } M \leq n \leq M+N-1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{63}$$

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier του $\tilde{x}[n]$ είναι

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi k}{N}) \tag{64}$$

όπου $x[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$.

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$ εξαρτάται από την επιλογή του M στη (63), ενώ τα δείγματά του, $X(\frac{2\pi k}{N})$, δεν εξαρτώνται από το M. Τούτο φαίνεται στο Παράδειγμα 8.10.

Παράδειγμα 7.10 (1)

- Έστω ένα περιοδικό τρένο ώσεων Δ.Χ. με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]. \tag{65}$$

- Τότε

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=M}^{M+N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \stackrel{n=0}{=} \frac{1}{N}. \end{aligned} \tag{66}$$

- Αν επιλεχθεί $M=0$, τότε το σήμα της πρώτης περιόδου έχει μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$x_1[n] = \delta[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) = 1 \tag{67}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Παράδειγμα 7.10 (1)

- Έστω ένα περιοδικό τρένο ώσεων Δ.Χ. με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]. \tag{65}$$

- Τότε

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=M}^{M+N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \overset{n=0}{=} \frac{1}{N}. \end{aligned} \tag{66}$$

- Αν επιλεχθεί $M = 0$, τότε το σήμα της πρώτης περιόδου έχει μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$x_1[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) = 1 \tag{67}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Παράδειγμα 7.10 (1)

- Έστω ένα περιοδικό τρένο ώσεων Δ.Χ. με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]. \tag{65}$$

- Τότε

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=M}^{M+N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \overset{n=0}{=} \frac{1}{N}. \end{aligned} \tag{66}$$

- Αν επιλεχθεί $M = 0$, τότε το σήμα της πρώτης περιόδου έχει μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$x_1[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) = 1 \tag{67}$$

Παράδειγμα 7.10 (2)

- ενώ αν $0 < M < N$ παίρνουμε

$$x_2[n] = \delta[n-N] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N}. \tag{68}$$

- Στα δείγματα συχνότητας $\Omega = 2\pi k/N$ έχουμε:

$$X_1\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = 1 \tag{69}$$

$$X_2\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = e^{-j\frac{2\pi k}{N}N} = 1 \tag{70}$$

δηλαδή οι δυο μετασχηματισμοί παίρνουν τις ίδιες τιμές στα δείγματα συχνότητας ανεξαρτήτως της επιλογής του M.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Παράδειγμα 7.10 (2)

- ενώ αν $0 < M < N$ παίρνουμε

$$x_2[n] = \delta[n - N] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N}. \tag{68}$$

- Στα δείγματα συχνότητας $\Omega = 2\pi k/N$ έχουμε:

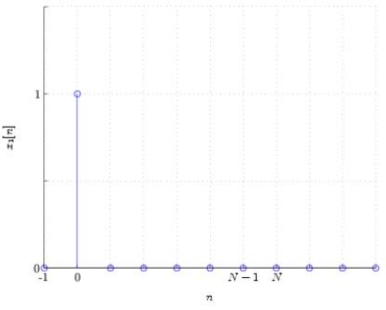
$$X_1(\frac{2\pi k}{N}) = 1 \tag{69}$$

$$X_2(\frac{2\pi k}{N}) = e^{-j\frac{2\pi k}{N}N} = 1 \tag{70}$$

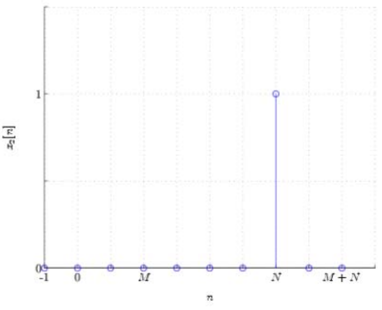
δηλαδή οι δυο μετασχηματισμοί παίρνουν τις ίδιες τιμές στα δείγματα συχνότητας ανεξαρτήτως της επιλογής του M.

Παράδειγμα 7.10 (3)

Σήματα $x_1[n]$ για $N = 6$ και $x_2[n]$ για $N = 6$ και $M = 2$.



(α) $x_1[n]$



(β) $x_2[n]$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (1)

- Έστω $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$. Στο Σ.Χ. έχουμε

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0). \tag{71}$$

- Στο Δ.Χ. περιμένουμε ανάλογο αποτέλεσμα, αλλά επειδή

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}, \quad \forall r \in \mathbb{Z} \tag{72}$$

- προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell). \tag{73}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (1)

- Έστω $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$. Στο Σ.Χ. έχουμε

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0). \tag{71}$$

- Στο Δ.Χ. περιμένουμε ανάλογο αποτέλεσμα, αλλά επειδή

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}, \quad \forall r \in \mathbb{Z} \tag{72}$$

- προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell). \tag{73}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (1)

- Έστω $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$. Στο Σ.Χ. έχουμε

$$e^{j\omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0). \tag{71}$$

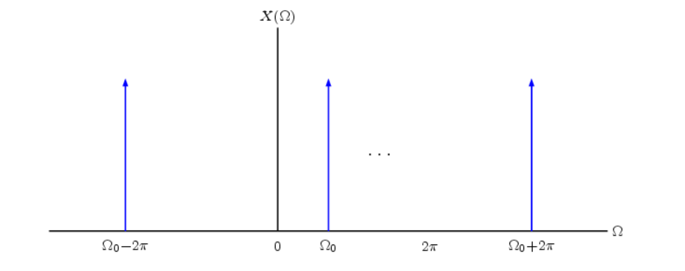
- Στο Δ.Χ. περιμένουμε ανάλογο αποτέλεσμα, αλλά επειδή

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}, \quad \forall r \in \mathbb{Z} \tag{72}$$

- προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ δίνεται από την

$$X(\Omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell). \tag{73}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (2)



Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (3)

Θα επαληθεύσουμε την ορθότητα της (73). Έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$= \int_{2\pi}\left[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{j(\Omega_0+2\pi\,\ell)n}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\right] d\Omega$$

$$= e^{j\Omega_0 n}\left[\int_0^{2\pi}\delta(\Omega-\Omega_0)\, d\Omega + \sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\, d\Omega\right]$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. φανταστικών εκθετικών (3)

Θα επαληθεύσουμε την ορθότητα της (73). Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell) e^{j\Omega n}\, d\Omega \\
&= \int_{2\pi} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{j(\Omega_0 + 2\pi\,\ell)n}\, \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell) \right] d\Omega \\
&= e^{j\Omega_0 n} \left[1 + 0 \right] \\
&= e^{j\Omega_0 n} \qquad (74)
\end{aligned}
$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (1)

- Ένα αυθαίρετο περιοδικό σήμα έχει τη μορφή

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \cdots + b_M e^{j\Omega_M n} \tag{75}$$

- οπότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του περιοδικού σήματος $x[n]$ προκύπτει ως

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi\ell) + b_2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi\ell)$$

$$+ \cdots + b_M \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi\ell). \tag{76}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (1)

- Ένα αυθαίρετο περιοδικό σήμα έχει τη μορφή

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \cdots + b_M e^{j\Omega_M n} \tag{75}$$

- οπότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του περιοδικού σήματος $x[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X(\Omega) = b_1 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi\ell) + b_2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi\ell) \\ + \cdots + b_M \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi\ell). \end{aligned} \tag{76}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (2)

1. Ο $X(\Omega)$ είναι ένα περιοδικό τρένο παλμών με πρώτη περίοδο που συγκροτείται από κρουστικούς παλμούς στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$.
2. Ο $X(\Omega)$ δεν προκύπτει από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού. Θυμηθείτε ότι τα περιοδικά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι απόδοση μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ως συνέπεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.
3. Ο $X(\Omega)$ είναι έγκυρος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ακόμα και αν Ω_0 δεν είναι της μορφής $\frac{2\pi m}{N}$.
4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. (75) είναι έγκυρος μόνο όταν $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (2)

1. Ο $X(\Omega)$ είναι ένα περιοδικό τρένο παλμών με πρώτη περίοδο που συγκροτείται από κρουστικούς παλμούς στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$.
2. Ο $X(\Omega)$ δεν προκύπτει από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού. Θυμηθείτε ότι τα περιοδικά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι απόδοση μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ως συνέπεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.
3. Ο $X(\Omega)$ είναι έγκυρος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ακόμα και αν Ω_0 δεν είναι της μορφής $\frac{2\pi m}{N}$.
4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. (75) είναι έγκυρος μόνο όταν $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (2)

1. Ο $X(\Omega)$ είναι ένα περιοδικό τρένο παλμών με πρώτη περίοδο που συγκροτείται από κρουστικούς παλμούς στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$.
2. Ο $X(\Omega)$ δεν προκύπτει από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού. Θυμηθείτε ότι τα περιοδικά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι απόδοση μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ως συνέπεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.
3. Ο $X(\Omega)$ είναι έγκυρος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ακόμα και αν Ω_0 δεν είναι της μορφής $\frac{2\pi m}{N}$.
4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. (75) είναι έγκυρος μόνο όταν $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (2)

1. Ο $X(\Omega)$ είναι ένα περιοδικό τρένο παλμών με πρώτη περίοδο που συγκροτείται από κρουστικούς παλμούς στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$.
2. Ο $X(\Omega)$ δεν προκύπτει από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού. Θυμηθείτε ότι τα περιοδικά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι απόδοση μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. ως συνέπεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού.
3. Ο $X(\Omega)$ είναι έγκυρος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ακόμα και αν Ω_0 δεν είναι της μορφής $\frac{2\pi m}{N}$.
4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. (75) είναι έγκυρος μόνο όταν $\Omega_m = \frac{2\pi m}{N}$.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (3)

Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{77}$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier. Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. αρκεί να εκτελέσουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Επέλεξε $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
2. Θέσε $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \frac{2\pi}{N}$, $\Omega_3 = 2(\frac{2\pi}{N})$, $\ldots$, $\Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N}$ στην (75).
3. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}). \tag{78}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (3)

Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{77}$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier. Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. αρκεί να εκτελέσουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Επέλεξε $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
2. Θέσε $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \Omega_3 = 2(\frac{2\pi}{N}), \ldots, \Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N}$ στην (75).
3. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}). \tag{78}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. περιοδικών σημάτων (3)

Έστω περιοδικό σήμα με περίοδο N

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{77}$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier. Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. αρκεί να εκτελέσουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Επέλεξε $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
2. Θέσε $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \Omega_3 = 2(\frac{2\pi}{N}), \ldots, \Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N}$ στην (75).
3. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}). \tag{78}$$

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Παράδειγμα 7.11

- Έστω

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \tag{79}$$

- τότε

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{80}$$

- επειδή $a_k = \frac{1}{N}$. Παρατηρούμε ότι ενώ δύο διαδοχικοί παλμοί στο χρόνο απέχουν N δείγματα, στη συχνότητα απέχουν $\frac{2\pi}{N}$.

Παράδειγμα 7.11

- Έστω

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \tag{79}$$

- τότε

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{80}$$

- επειδή $a_k = \frac{1}{N}$. Παρατηρούμε ότι ενώ δύο διαδοχικοί παλμοί στο χρόνο απέχουν N δείγματα, στη συχνότητα απέχουν $\frac{2\pi}{N}$.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Παράδειγμα 7.11

- Έστω
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \tag{79}$$
- τότε
$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \tag{80}$$
- επειδή $a_k = \frac{1}{N}$. Παρατηρούμε ότι ενώ δύο διαδοχικοί παλμοί στο χρόνο απέχουν N δείγματα, στη συχνότητα απέχουν $\frac{2\pi}{N}$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω γεγονός που τον καθιστά δύσχρηστο στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή την εγγενή αδυναμία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) DFT για σήματα πεπερασμένης διάρκειας.
- Οι γρήγοροι μετασχηματισμοί Fourier (FFT) είναι αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT.
- Ο DFT κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Θα μελετηθεί σε βάθος στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Εδώ θα αρκεστούμε στον ορισμό του.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω γεγονός που τον καθιστά δύσχρηστο στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή την εγγενή αδυναμία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) DFT για σήματα πεπερασμένης διάρκειας.
- Οι γρήγοροι μετασχηματισμοί Fourier (FFT) είναι αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT.
- Ο DFT κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Θα μελετηθεί σε βάθος στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Εδώ θα αρκεστούμε στον ορισμό του.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω γεγονός που τον καθιστά δύσχρηστο στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή την εγγενή αδυναμία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) DFT για σήματα πεπερασμένης διάρκειας.
- Οι γρήγοροι μετασχηματισμοί Fourier (FFT) είναι αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT.
- Ο DFT κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Θα μελετηθεί σε βάθος στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Εδώ θα αρκεστούμε στον ορισμό του.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω γεγονός που τον καθιστά δύσχρηστο στους αριθμητικούς υπολογισμούς.
- Για να θεραπεύσουμε αυτή την εγγενή αδυναμία του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. κατασκευάζουμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) DFT για σήματα πεπερασμένης διάρκειας.
- Οι γρήγοροι μετασχηματισμοί Fourier (FFT) είναι αποδοτικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του DFT.
- Ο DFT κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Θα μελετηθεί σε βάθος στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων. Εδώ θα αρκεστούμε στον ορισμό του.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (2)

1. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.
2. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε, $\tilde{x}[n] = x[n]$, για $0 \leq n \leq N-1$.
3. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X_k = X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{81}$$

4. οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{82}$$

5. Το ζεύγος των εξισώσεων (81) και (82) συγκροτεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), ο οποίος εξαρτάται από το N.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (2)

1. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.
2. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε, $\tilde{x}[n] = x[n]$, για $0 \leq n \leq N-1$.
3. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X_k = X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (81)$$

4. οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (82)$$

5. Το ζεύγος των εξισώσεων (81) και (82) συγκροτεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), ο οποίος εξαρτάται από το N.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (2)

1. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.
2. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε, $\tilde{x}[n] = x[n]$, για $0 \leq n \leq N-1$.
3. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X_k = X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (81)$$

4. οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (82)$$

5. Το ζεύγος των εξισώσεων (81) και (82) συγκροτεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), ο οποίος εξαρτάται από το N.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (2)

1. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.
2. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε, $\tilde{x}[n] = x[n]$, για $0 \leq n \leq N-1$.
3. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X_k = X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{81}$$

4. οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{82}$$

5. Το ζεύγος των εξισώσεων (81) και (82) συγκροτεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), ο οποίος εξαρτάται από το N.

Περιοδικά σήματα και μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier για σήματα πεπερασμένης διάρκειας (2)

1. Έστω N_1 τέτοιος ώστε $x[n] = 0$ για $n > N_1$.
2. Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}[n]$ με περίοδο $N \geq N_1$. Τότε, $\tilde{x}[n] = x[n]$, για $0 \leq n \leq N-1$.
3. Οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\tilde{x}[n]$ είναι

$$X_k = X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{81}$$

4. οπότε η εξίσωση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{82}$$

5. Το ζεύγος των εξισώσεων (81) και (82) συγκροτεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT), ο οποίος εξαρτάται από το N.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY SA