ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **8**: Μετασχηματισμός Ζ

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Δίπλευρος-Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

- Ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{1}$$

- ενώ ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{U}\mathcal{Z}\{x[n]\} = \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2}$$

- Η σχέση (1) αποτελεί τη σειρά Laurent. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται για τις τιμές εκείνες του μιγαδικού αριθμού z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την ακολουθία $x[n]$. Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις περιοχές εκεί όπου η δυναμοσειρά (1):

Δίπλευρος-Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

- Ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{1}$$

- ενώ ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2}$$

- Η σχέση (1) αποτελεί τη σειρά Laurent. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται για τις τιμές εκείνες του μιγαδικού αριθμού z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την ακολουθία $x[n]$. Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις περιοχές εκεί όπου η δυναμοσειρά (1):

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Δίπλευρος-Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

- Ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{1}$$

- ενώ ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2}$$

- Η σχέση (1) αποτελεί τη σειρά Laurent. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται για τις τιμές εκείνες του μιγαδικού αριθμού z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την ακολουθία $x[n]$. Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις περιοχές εκεί όπου η δυναμοσειρά (1):
    1. συγκλίνει ή
    2. δεν συγκλίνει.

Δίπλευρος-Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

- Ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{1}$$

- ενώ ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2}$$

- Η σχέση (1) αποτελεί τη σειρά Laurent. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται για τις τιμές εκείνες του μιγαδικού αριθμού z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την ακολουθία $x[n]$. Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις περιοχές εκεί όπου η δυναμοσειρά (1):
  1. συγκλίνει ή
  2. δεν συγκλίνει.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Δίπλευρος-Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

- Ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{1}$$

- ενώ ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2}$$

- Η σχέση (1) αποτελεί τη σειρά Laurent. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται για τις τιμές εκείνες του μιγαδικού αριθμού z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται από την ακολουθία $x[n]$. Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις περιοχές εκεί όπου η δυναμοσειρά (1):
  1. συγκλίνει ή
  2. δεν συγκλίνει.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ανάλυση σύγκλισης

- Αναλόγως με τη μορφή της ακολουθίας πραγματοποιείται η ανάλυση της σύγκλισης. Η περιοχή όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται περιοχή σύγκλισης (region of convergence, ROC).
- Στο μιγαδικό επίπεδο ο μιγαδικός αριθμός z παριστάνεται από τη σχέση $z = |z|\, e^{j\theta}$, όπου $|z|$ και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες.
- Μια κρίσιμη έννοια είναι ο μοναδιαίος κύκλος, που αποτελείται από τα σημεία εκείνα του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z| = 1$. Ο μοναδιαίος κύκλος παίζει στο z- επίπεδο το ρόλο του φανταστικού άξονα στο s- επίπεδο του μετασχηματισμού Laplace (δηλαδή, του $j\omega$ άξονα).
- Πράγματι για $z = e^{j\Omega}$ ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1) ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ., αρκεί ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Η σχετική ανάλυση σύγκλισης παραλληλίζεται με την αντίστοιχη που έγινε για το μετασχηματισμό Laplace.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ανάλυση σύγκλισης

- Αναλόγως με τη μορφή της ακολουθίας πραγματοποιείται η ανάλυση της σύγκλισης. Η περιοχή όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται περιοχή σύγκλισης (region of convergence, ROC).
- Στο μιγαδικό επίπεδο ο μιγαδικός αριθμός z παριστάνεται από τη σχέση $z = |z|\, e^{j\theta}$, όπου $|z|$ και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες.
- Μια κρίσιμη έννοια είναι ο μοναδιαίος κύκλος, που αποτελείται από τα σημεία εκείνα του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z| = 1$. Ο μοναδιαίος κύκλος παίζει στο z- επίπεδο το ρόλο του φανταστικού άξονα στο s- επίπεδο του μετασχηματισμού Laplace (δηλαδή, του $j\omega$ άξονα).
- Πράγματι για $z = e^{j\Omega}$ ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1) ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ., αρκεί ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Η σχετική ανάλυση σύγκλισης παραλληλίζεται με την αντίστοιχη που έγινε για το μετασχηματισμό Laplace.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ανάλυση σύγκλισης

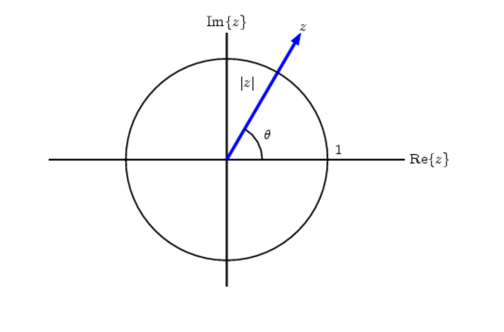
- Αναλόγως με τη μορφή της ακολουθίας πραγματοποιείται η ανάλυση της σύγκλισης. Η περιοχή όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται περιοχή σύγκλισης (region of convergence, ROC).
- Στο μιγαδικό επίπεδο ο μιγαδικός αριθμός z παριστάνεται από τη σχέση $z = |z|\, e^{j\theta}$, όπου $|z|$ και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες.
- Μια κρίσιμη έννοια είναι ο μοναδιαίος κύκλος, που αποτελείται από τα σημεία εκείνα του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z| = 1$. Ο μοναδιαίος κύκλος παίζει στο z- επίπεδο το ρόλο του φανταστικού άξονα στο s- επίπεδο του μετασχηματισμού Laplace (δηλαδή, του $j\omega$ άξονα).
- Πράγματι για $z = e^{j\Omega}$ ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1) ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ., αρκεί ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Η σχετική ανάλυση σύγκλισης παραλληλίζεται με την αντίστοιχη που έγινε για το μετασχηματισμό Laplace.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ανάλυση σύγκλισης

- Αναλόγως με τη μορφή της ακολουθίας πραγματοποιείται η ανάλυση της σύγκλισης. Η περιοχή όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται περιοχή σύγκλισης (region of convergence, ROC).
- Στο μιγαδικό επίπεδο ο μιγαδικός αριθμός z παριστάνεται από τη σχέση $z = |z|\, e^{j\theta}$, όπου $|z|$ και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες.
- Μια κρίσιμη έννοια είναι ο μοναδιαίος κύκλος, που αποτελείται από τα σημεία εκείνα του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει $|z| = 1$. Ο μοναδιαίος κύκλος παίζει στο z- επίπεδο το ρόλο του φανταστικού άξονα στο s- επίπεδο του μετασχηματισμού Laplace (δηλαδή, του $j\omega$ άξονα).
- Πράγματι για $z = e^{j\Omega}$ ο δίπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1) ταυτίζεται με το μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ., αρκεί ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Η σχετική ανάλυση σύγκλισης παραλληλίζεται με την αντίστοιχη που έγινε για το μετασχηματισμό Laplace.

Παράσταση $z = |z|e^{j\theta}$ του μιγαδικού αριθμού z



Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Αιτιατή ακολουθία

- Ισχύει $x[n] = 0$ για $n < 0$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από την

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{3}$$

- Έστω η $X(z)$ συγκλίνει απολύτως για $z = z_1$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x[n]\, z_1^{-n} \right| < \infty. \tag{4}$$

- Επειδή για $|z| > |z_1|$ έχουμε $|z|^{-n} < |z_1|^{-n}$, έπεται ότι το άθροισμα της δυναμοσειράς (3) συγκλίνει για κάθε $|z| > |z_1|$. Αν R_{X-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς, τότε ο $X(z)$ συγκλίνει για $|z| > R_{X-}$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Αιτιατή ακολουθία

- Ισχύει $x[n] = 0$ για $n < 0$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από την

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{3}$$

- Έστω η $X(z)$ συγκλίνει απολύτως για $z = z_1$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]\, z_1^{-n}| < \infty. \tag{4}$$

- Επειδή για $|z| > |z_1|$ έχουμε $|z|^{-n} < |z_1|^{-n}$, έπεται ότι το άθροισμα της δυναμοσειράς (3) συγκλίνει για κάθε $|z| > |z_1|$. Αν R_{x-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς, τότε ο $X(z)$ συγκλίνει για $|z| > R_{x-}$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Αιτιατή ακολουθία

- Ισχύει $x[n] = 0$ για $n < 0$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από την

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{3}$$

- Έστω η $X(z)$ συγκλίνει απολύτως για $z = z_1$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]\, z_1^{-n}| < \infty. \tag{4}$$

- Επειδή για $|z| > |z_1|$ έχουμε $|z|^{-n} < |z_1|^{-n}$, έπεται ότι το άθροισμα της δυναμοσειράς (3) συγκλίνει για κάθε $|z| > |z_1|$. Αν R_{X-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς, τότε ο $X(z)$ συγκλίνει για $|z| > R_{X-}$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.1

- Έστω $x[n] = \alpha^n u[n]$, τότε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \tag{5}$$

- για $|\alpha z^{-1}| < 1$ ή $|z| > |\alpha|$. Λέμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ $X(z)$ έχει πόλο στο $z = \alpha$ και μηδενικό στο $z = 0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.1

- Έστω $x[n] = \alpha^n u[n]$, τότε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \tag{5}$$

- για $|\alpha z^{-1}| < 1$ ή $|z| > |\alpha|$. Λέμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ $X(z)$ έχει πόλο στο $z = \alpha$ και μηδενικό στο $z = 0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία δεξιάς πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $n < n_1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
  1. $n_1 \geq 0$: Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην περίπτωση της αιτιατής ακολουθίας.
  2. $n_1 < 0$: Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{6}$$

     Ο όρος $\sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι πεπερασμένο άθροισμα και συγκλίνει για $\forall z$ πεπερασμένο, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ αντιστοιχεί σε άθροισμα δυναμοσειράς μιας αιτιατής ακολουθίας, το οποίο συγκλίνει για $\forall z : \ |z| > |z_1|$.
- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας $|z_1|$. Αν R_{X-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς (6), ο $X(z)$ συγκλίνει για $\forall z : \ |z| >= R_{X-}$ εκτός του $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία δεξιάς πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $n < n_1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
  1. $n_1 \geq 0$: Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην περίπτωση της αιτιατής ακολουθίας.
  2. $n_1 < 0$: Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{6}$$

     Ο όρος $\sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι πεπερασμένο άθροισμα και συγκλίνει για $\forall z$ πεπερασμένο, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ αντιστοιχεί σε άθροισμα δυναμοσειράς μιας αιτιατής ακολουθίας, το οποίο συγκλίνει για $\forall z: \; |z| > |z_1|$.

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας $|z_1|$. Αν R_{x-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς (6), ο $X(z)$ συγκλίνει για $\forall z: \; |z| >= R_{x-}$ εκτός του $z = \infty$.

Ακολουθία δεξιάς πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $n < n_1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
  1. $n_1 \geq 0$: Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην περίπτωση της αιτιατής ακολουθίας.
  2. $n_1 < 0$: Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \qquad (6)$$

Ο όρος $\sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι πεπερασμένο άθροισμα και συγκλίνει για $\forall z$ πεπερασμένο, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ αντιστοιχεί σε άθροισμα δυναμοσειράς μιας αιτιατής ακολουθίας, το οποίο συγκλίνει για $\forall z: \; |z| > |z_1|$.

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας $|z_1|$. Αν R_{X-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς (6), ο $X(z)$ συγκλίνει για $\forall z: \; |z| >= R_{X-}$ εκτός του $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία δεξιάς πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $n < n_1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
  1. $n_1 \geq 0$: Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην περίπτωση της αιτιατής ακολουθίας.
  2. $n_1 < 0$: Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

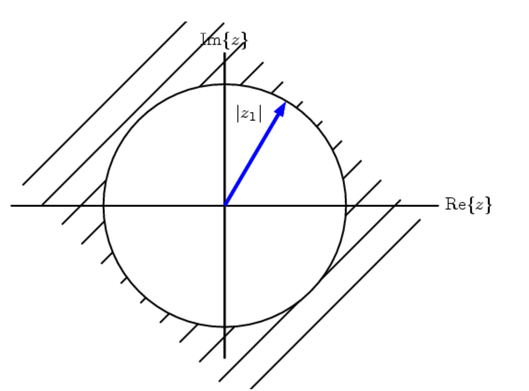
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{6}$$

     Ο όρος $\sum_{n=n_1}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι πεπερασμένο άθροισμα και συγκλίνει για $\forall z$ πεπερασμένο, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ αντιστοιχεί σε άθροισμα δυναμοσειράς μιας αιτιατής ακολουθίας, το οποίο συγκλίνει για $\forall z: \ |z| > |z_1|$.

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας $|z_1|$. Αν R_{X-} είναι η μικρότερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς (6), ο $X(z)$ συγκλίνει για $\forall z: \ |z| >= R_{X-}$ εκτός του $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ ακολουθίας δεξιάς πλευράς



Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία αριστερής πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $\forall n > n_2$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]\, z^{-n} = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x[-m]\, z^{m}. \tag{7}$$
- Το άθροισμα της δυναμοσειράς (7) συγκλίνει για $|z| < R_{x+}$ εκτός του $z = 0$ αν $n_2 > 0$, όπου R_{x+} είναι η μεγαλύτερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς.
- Η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R_{x+}.

Ακολουθία αριστερής πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $\forall n > n_2$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]\, z^{-n} = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x[-m]\, z^{m}. \tag{7}$$

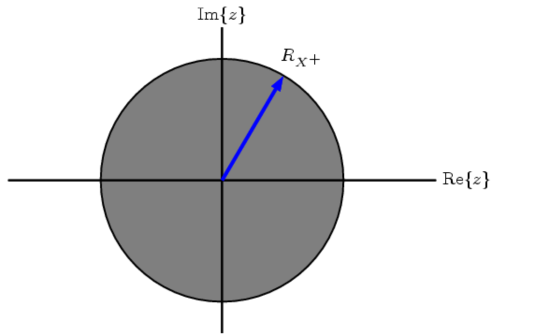
- Το άθροισμα της δυναμοσειράς (7) συγκλίνει για $|z| < R_{X+}$ εκτός του $z = 0$ αν $n_2 > 0$, όπου R_{X+} είναι η μεγαλύτερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς.
- Η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R_{X+}.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία αριστερής πλευράς

- Έχουμε $x[n] = 0$ για $\forall n > n_2$, οπότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]\, z^{-n} = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x[-m]\, z^{m}. \tag{7}$$
- Το άθροισμα της δυναμοσειράς (7) συγκλίνει για $|z| < R_{X+}$ εκτός του $z = 0$ αν $n_2 > 0$, όπου R_{X+} είναι η μεγαλύτερη τιμή του $|z|$ για την οποία συγκλίνει το άθροισμα της δυναμοσειράς.
- Η περιοχή σύγκλισης είναι το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R_{X+}.

Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ ακολουθίας αριστερής πλευράς



Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Αμφίπλευρη ακολουθία

- Ισχύει ότι $x[n] \neq 0$ για $\forall n$. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{8}$$

- Ο όρος $\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι άθροισμα που συγκλίνει για $|z| < R_{x+}$, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ είναι άθροισμα που συγκλίνει για $|z| > R_{x-}$. Άρα αν $R_{x-} < R_{x+}$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι ένας κυκλικός δακτύλιος. Αντίθετα, αν $R_{x-} > R_{x+}$, τότε δεν υπάρχει περιοχή σύγκλισης και δεν ορίζεται ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Αμφίπλευρη ακολουθία

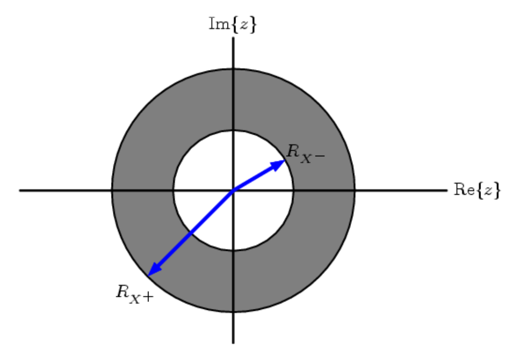
- Ισχύει ότι $x[n] \neq 0$ για $\forall n$. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{8}$$

- Ο όρος $\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, z^{-n}$ είναι άθροισμα που συγκλίνει για $|z| < R_{X+}$, ενώ ο όρος $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ είναι άθροισμα που συγκλίνει για $|z| > R_{X-}$. Άρα αν $R_{X-} < R_{X+}$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι ένας κυκλικός δακτύλιος. Αντίθετα, αν $R_{X-} > R_{X+}$, τότε δεν υπάρχει περιοχή σύγκλισης και δεν ορίζεται ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αμφίπλευρης ακολουθίας



Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους

- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\, z^{-n}. \tag{9}$$

- Το άθροισμα (9) συγκλίνει αρκεί $|x[n]| < \infty$ για $n_1 \leq n \leq n_2$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την τιμή

- Επομένως η περιοχή σύγκλισης είναι $0 < |z| < \infty$ εκτός ίσως από τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους

- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\, z^{-n}. \tag{9}$$

- Το άθροισμα (9) συγκλίνει αρκεί $|x[n]| < \infty$ για $n_1 \leq n \leq n_2$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την τιμή
  1. $z = \infty$ αν $n_1 < 0$
  2. $z = 0$ αν $n_2 > 0$.
- Επομένως η περιοχή σύγκλισης είναι $0 < |z| < \infty$ εκτός ίσως από τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$.

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους

- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\, z^{-n}. \tag{9}$$

- Το άθροισμα (9) συγκλίνει αρκεί $|x[n]| < \infty$ για $n_1 \leq n \leq n_2$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την τιμή
  1. $z = \infty$ αν $n_1 < 0$
  2. $z = 0$ αν $n_2 > 0$.
- Επομένως η περιοχή σύγκλισης είναι $0 < |z| < \infty$ εκτός ίσως από τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$.

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους

- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\, z^{-n}. \tag{9}$$

- Το άθροισμα (9) συγκλίνει αρκεί $|x[n]| < \infty$ για $n_1 \leq n \leq n_2$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την τιμή
  1. $z = \infty$ αν $n_1 < 0$
  2. $z = 0$ αν $n_2 > 0$.
- Επομένως η περιοχή σύγκλισης είναι $0 < |z| < \infty$ εκτός ίσως από τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους

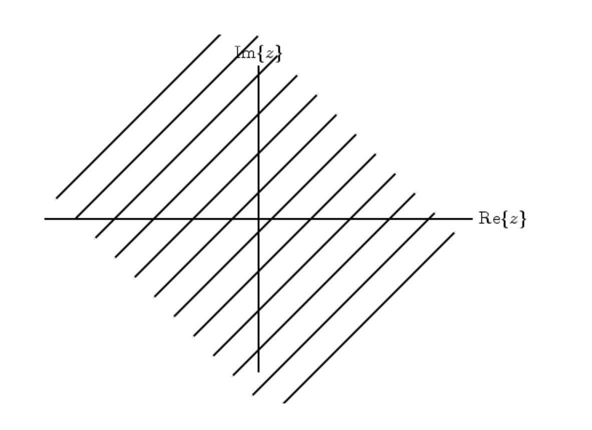
- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ δίνεται από τη σχέση

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\, z^{-n}. \tag{9}$$

- Το άθροισμα (9) συγκλίνει αρκεί $|x[n]| < \infty$ για $n_1 \leq n \leq n_2$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την τιμή
  1. $z = \infty$ αν $n_1 < 0$
  2. $z = 0$ αν $n_2 > 0$.
- Επομένως η περιοχή σύγκλισης είναι $0 < |z| < \infty$ εκτός ίσως από τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ ακολουθίας πεπερασμένου μήκους



Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (1)

- Από την ανάλυση που προηγήθηκε κατέστη φανερό ότι οι ιδιότητες που ισχύουν για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτουν εύκολα μεταγράφοντας τις αντίστοιχες ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace
- αντικαθιστώντας την έννοια της λωρίδας στο s- επίπεδο με αυτήν του κυκλικού δακτυλίου στο z- επίπεδο.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (1)

- Από την ανάλυση που προηγήθηκε κατέστη φανερό ότι οι ιδιότητες που ισχύουν για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτουν εύκολα μεταγράφοντας τις αντίστοιχες ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace
- αντικαθιστώντας την έννοια της λωρίδας στο s- επίπεδο με αυτήν του κυκλικού δακτυλίου στο z- επίπεδο.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (2)

- Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αποτελείται από ένα κυκλικό δακτύλιο με κέντρο την αρχή του z- επιπέδου.
- Ιδιότητα 2: Η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.
- Ιδιότητα 3: Αν $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ROC είναι ολόκληρο το z- επίπεδο εκτός ίσως των $z = 0$ και/ή $z = \infty$.
- Ιδιότητα 4: Αν $x[n]$ είναι σήμα δεξιάς πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες τις πεπερασμένες τιμές του z για τις οποίες $|z| > r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 5: Αν $x[n]$ είναι σήμα αριστερής πλευράς και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε όλες οι τιμές του z για τις οποίες $0 < |z| < r_0$ θα ανήκουν επίσης στην ROC.
- Ιδιότητα 6: Αν $x[n]$ είναι αμφίπλευρο σήμα και αν ο κύκλος $|z| = r_0$ ανήκει στην ROC, τότε η ROC θα είναι ένας κυκλικός δακτύλιος στο z- επίπεδο που περιέχει τον κύκλο $|z| = r_0$.

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (3)

- Ιδιότητα 7: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, του σήματος $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του φράσσεται από τους πόλους ή εκτείνεται ως το άπειρο.
- Ιδιότητα 8: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος δεξιάς πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου έξω από τον πιό απομακρυσμένο πόλο, δηλαδή εκτός του κύκλου ακτίνας ίσης με το μεγαλύτερο μέτρο των πόλων του $X(z)$. Επιπλέον αν το $x[n]$ είναι αιτιατό, τότε η ROC περιέχει και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 9: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος αριστερής πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας ίσης με τη μικρότερο μη-μηδενικό μέτρο των πόλων του $X(z)$ συμπεριλαμβάνοντας ενδεχομένως και το $z = 0$ (όπως στην περίπτωση αντιαιτιατών σημάτων).

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (3)

- Ιδιότητα 7: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, του σήματος $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του φράσσεται από τους πόλους ή εκτείνεται ως το άπειρο.
- Ιδιότητα 8: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος δεξιάς πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου έξω από τον πιό απομακρυσμένο πόλο, δηλαδή εκτός του κύκλου ακτίνας ίσης με το μεγαλύτερο μέτρο των πόλων του $X(z)$. Επιπλέον αν το $x[n]$ είναι αιτιατό, τότε η ROC περιέχει και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 9: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος αριστερής πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας ίσης με τη μικρότερο μη-μηδενικό μέτρο των πόλων του $X(z)$ συμπεριλαμβάνοντας ενδεχομένως και το $z = 0$ (όπως στην περίπτωση ανταιτιατών σημάτων).

Ευθύς μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Σύνοψη ιδιοτήτων περιοχής σύγκλισης μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ (3)

- Ιδιότητα 7: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, του σήματος $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του φράσσεται από τους πόλους ή εκτείνεται ως το άπειρο.
- Ιδιότητα 8: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος δεξιάς πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου έξω από τον πιό απομακρυσμένο πόλο, δηλαδή εκτός του κύκλου ακτίνας ίσης με το μεγαλύτερο μέτρο των πόλων του $X(z)$. Επιπλέον αν το $x[n]$ είναι αιτιατό, τότε η ROC περιέχει και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 9: Αν ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z)$, ενός σήματος αριστερής πλευράς $x[n]$ είναι ρητή συνάρτηση του z, τότε η ROC του μετασχηματισμού είναι η περιοχή του z- επιπέδου στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας ίσης με τη μικρότερο μη-μηδενικό μέτρο των πόλων του $X(z)$ συμπεριλαμβάνοντας ενδεχομένως και το $z = 0$ (όπως στην περίπτωση ανταιτιατών σημάτων).

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει και την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει και την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει και την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει και την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει **και** την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Εξαγωγή (1)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ υπολογίζεται από
  1. πίνακες γνωστών μετασχηματισμών
  2. τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, όπως και για τους άλλους μετασχηματισμούς, λ.χ. Fourier, Laplace
  3. την εξίσωση ορισμού, όμως τότε απαιτείται μιγαδική ολοκλήρωση.
- Έστω C κλειστή καμπύλη εντός της περιοχής σύγκλισης του $X(z)$, η οποία περικλείει και την αρχή των αξόνων. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n+k-1} dz. \tag{10}$$

- Εναλλάσουμε την άθροιση και την ολοκλήρωση στο δεξί μέρος της (10):

$$\oint_C z^{k-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1} dz. \tag{11}$$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz = 2\pi j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1}dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1}dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:
  1. Χρήση θεωρήματος υπολοίπων
  2. Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
  3. Διαίρεση πολυωνύμων
  4. Επέκταση σε δυναμοσειρά.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n=k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\,z^{k-1}dz = 2\pi\,j\,x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\,z^{n-1}dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:
  1. Χρήση θεωρήματος υπολοίπων
  2. Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
  3. Διαίρεση πολυωνύμων
  4. Επέκταση σε δυναμοσειρά.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:
  1. Χρήση θεωρήματος υπολοίπων
  2. Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
  3. Διαίρεση πολυωνύμων
  4. Επέκταση σε δυναμοσειρά

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1}dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1}dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:
  1. Χρήση θεωρήματος υπολοίπων
  2. Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
  3. Διαίρεση πολυωνύμων
  4. Επέκταση σε δυναμοσειρά.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Εξαγωγή (2)

- Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

- και θέσουμε $n = k$ στην (11), τότε

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1}dz = 2\pi\, j\, x[k]. \tag{13}$$

- Δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ορίζεται ως $x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1}dz$.
- Επιλέγουμε μια από τις εξής μεθόδους:
  1. Χρήση θεωρήματος υπολοίπων
  2. Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων
  3. Διαίρεση πολυωνύμων
  4. Επέκταση σε δυναμοσειρά.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Χρήση θεωρήματος υπολοίπων

- Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x[n] = \sum \Big[\text{ υπόλοιπα (residuals) της } X(z)z^{n-1} \text{ στους πόλους}$$
$$\text{που βρίσκονται στο εσωτερικό της τροχιάς } C. \Big] \quad (14)$$

- Αν

$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{A(z)}{(z-z_0)^s} \quad (15)$$

όπου $A(z)$ δεν έχει ρίζες στο $z = z_0$,

- τότε το υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ για $z = z_0$ ορίζεται ως

$$\mathrm{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_0} = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1}A(z)}{dz^{s-1}} \right|_{z=z_0} . \quad (16)$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Χρήση θεωρήματος υπολοίπων

- Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x[n] = \sum \Big[\text{υπόλοιπα (residuals) της } X(z)z^{n-1} \text{ στους πόλους που βρίσκονται στο εσωτερικό της τροχιάς } C. \Big] \quad (14)$$

- Αν

$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{A(z)}{(z - z_0)^s} \quad (15)$$

όπου $A(z)$ δεν έχει ρίζες στο $z = z_0$,

- τότε το υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ για $z = z_0$ ορίζεται ως

$$\mathrm{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_0} = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1} A(z)}{dz^{s-1}} \right|_{z=z_0} . \quad (16)$$

Χρήση θεωρήματος υπολοίπων

- Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x[n] = \sum \Big[\text{ υπόλοιπα (residuals) της } X(z)z^{n-1} \text{ στους πόλους που βρίσκονται στο εσωτερικό της τροχιάς } C. \Big] \quad (14)$$

- Αν

$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{A(z)}{(z - z_0)^s} \quad (15)$$

όπου $A(z)$ δεν έχει ρίζες στο $z = z_0$,

- τότε το υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ για $z = z_0$ ορίζεται ως

$$\mathrm{Res}\left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{z=z_0} = \frac{1}{(s-1)!} \left.\frac{d^{s-1}A(z)}{dz^{s-1}}\right|_{z=z_0} . \quad (16)$$

Παράδειγμα 8.2 (1)

- Έστω

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad |z| > |\alpha|$$

- τότε

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z^n}{z-\alpha}. \tag{17}$$

- $n > 0$: Εκλέγεται ως C κύκλος ακτίνας μεγαλύτερης του $|\alpha|$, ο οποίος περιβάλλει τον πόλο $z = \alpha$. Άρα

$$x[n] = \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0\,!} z^n\big|_{z=\alpha} = \alpha^n. \tag{18}$$

- $n < 0$: Υπάρχει πολλαπλός πόλος στο 0. Για να βρούμε το υπόλοιπο στο μηδέν επιλέγεται

$$A(z) = \frac{1}{z-\alpha} \tag{19}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.2 (1)

- Έστω
$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \qquad |z| > |\alpha|$$
- τότε
$$X(z) z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z^n}{z - \alpha}. \tag{17}$$
- $n > 0$: Εκλέγεται ως C κύκλος ακτίνας μεγαλύτερης του $|\alpha|$, ο οποίος περιβάλλει τον πόλο $z = \alpha$. Άρα
$$x[n] = \mathrm{Res}\left[X(z) z^{n-1}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0\,!} z^n\Big|_{z=\alpha} = \alpha^n. \tag{18}$$
- $n < 0$: Υπάρχει πολλαπλός πόλος στο 0. Για να βρούμε το υπόλοιπο στο μηδέν επιλέγεται
$$A(z) = \frac{1}{z - \alpha} \tag{19}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.2 (1)

- Έστω
$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \qquad |z| > |\alpha|$$
- τότε
$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z^n}{z - \alpha}. \tag{17}$$
- $n > 0$: Εκλέγεται ως C κύκλος ακτίνας μεγαλύτερης του $|\alpha|$, ο οποίος περιβάλλει τον πόλο $z = \alpha$. Άρα
$$x[n] = \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0\,!}\, z^n\big|_{z=\alpha} = \alpha^n. \tag{18}$$
- $n < 0$: Υπάρχει πολλαπλός πόλος στο 0. Για να βρούμε το υπόλοιπο στο μηδέν επιλέγεται
$$A(z) = \frac{1}{z - \alpha} \tag{19}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.2 (1)

- Έστω
$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \qquad |z| > |\alpha|$$
- τότε
$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z^n}{z - \alpha}. \tag{17}$$
- $n > 0$: Εκλέγεται ως C κύκλος ακτίνας μεγαλύτερης του $|\alpha|$, ο οποίος περιβάλλει τον πόλο $z = \alpha$. Άρα
$$x[n] = \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0\,!}\, z^n\Big|_{z=\alpha} = \alpha^n. \tag{18}$$
- $n < 0$: Υπάρχει πολλαπλός πόλος στο 0. Για να βρούμε το υπόλοιπο στο μηδέν επιλέγεται
$$A(z) = \frac{1}{z - \alpha} \tag{19}$$

Παράδειγμα 8.2 (2)

- οπότε

$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}. \tag{20}$$

- Οι πόλοι της (20) είναι

$$\begin{cases} z = 0 & \text{τάξης } m = -n \\ z = \alpha & \text{1ης τάξης.} \end{cases} \tag{21}$$

- Τα υπόλοιπα της (20) για $z = 0$ δίνονται από την

$$\text{Res}\left[\frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]\Bigg|_{z=0}. \tag{22}$$

Παράδειγμα 8.2 (2)

- οπότε

$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}. \tag{20}$$

- Οι πόλοι της (20) είναι

$$\begin{cases} z = 0 & \text{τάξης } m = -n \\ z = a & \text{1ης τάξης.} \end{cases} \tag{21}$$

- Τα υπόλοιπα της (20) για $z = 0$ δίνονται από την

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]\Bigg|_{z=0}. \tag{22}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.2 (2)

- οπότε
$$X(z)\, z^{n-1} = \frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}. \tag{20}$$
- Οι πόλοι της (20) είναι
$$\begin{cases} z = 0 & \text{τάξης } m = -n \\ z = a & \text{1ης τάξης.} \end{cases} \tag{21}$$
- Τα υπόλοιπα της (20) για $z = 0$ δίνονται από την
$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{-n}(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]\Bigg|_{z=0}. \tag{22}$$

Παράδειγμα 8.2 (3)

- Ας αναλύσουμε την περίπτωση $n = -1$. Με βάση την (20) θα έχουμε

$$X(z)z^{n-1}\,|_{n=-1} = \frac{z^{-1}}{z-\alpha} = \frac{1}{z(z-\alpha)} \tag{23}$$

- οπότε δυνάμει της (22) για $m = -n = 1$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]_{z=0} = -\alpha^{-1}. \tag{24}$$

- Το υπόλοιπο στο $z = \alpha$ είναι:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(z-\alpha)}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z}\right]_{z=\alpha} = \alpha^{-1}. \tag{25}$$

- άρα $x[n] = -\alpha^{-1} + \alpha^{-1} = 0$. Το ίδιο θα ισχύει για $n = -2, -3, \ldots$ Συνεπώς, για γενικό n, $x[n] = \alpha^n u[n]$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.2 (3)

- Ας αναλύσουμε την περίπτωση $n = -1$. Με βάση την (20) θα έχουμε

$$X(z)z^{n-1}\,|_{n=-1} = \frac{z^{-1}}{z-\alpha} = \frac{1}{z(z-\alpha)} \tag{23}$$

- οπότε δυνάμει της (22) για $m = -n = 1$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]_{z=0} = -\alpha^{-1}. \tag{24}$$

- Το υπόλοιπο στο $z = \alpha$ είναι:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z}\right]_{z=\alpha} = \alpha^{-1}. \tag{25}$$

- άρα $x[n] = -\alpha^{-1} + \alpha^{-1} = 0$. Το ίδιο θα ισχύει για $n = -2, -3, \ldots$ Συνεπώς, για γενικό n, $x[n] = \alpha^{n}\,u[n]$.

Παράδειγμα 8.2 (3)

- Ας αναλύσουμε την περίπτωση $n = -1$. Με βάση την (20) θα έχουμε

$$X(z)z^{n-1}\big|_{n=-1} = \frac{z^{-1}}{z-\alpha} = \frac{1}{z(z-\alpha)} \tag{23}$$

- οπότε δυνάμει της (22) για $m = -n = 1$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]_{z=0} = -\alpha^{-1}. \tag{24}$$

- Το υπόλοιπο στο $z = \alpha$ είναι:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z}\right]_{z=\alpha} = \alpha^{-1}. \tag{25}$$

- άρα $x[n] = -\alpha^{-1} + \alpha^{-1} = 0$. Το ίδιο θα ισχύει για $n = -2, -3, \ldots$ Συνεπώς, για γενικό n, $x[n] = \alpha^n u[n]$.

Παράδειγμα 8.2 (3)

- Ας αναλύσουμε την περίπτωση $n = -1$. Με βάση την (20) θα έχουμε

$$X(z)z^{n-1}\,|_{n=-1} = \frac{z^{-1}}{z-\alpha} = \frac{1}{z(z-\alpha)} \tag{23}$$

- οπότε δυνάμει της (22) για $m = -n = 1$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]_{z=0} = -\alpha^{-1}. \tag{24}$$

- Το υπόλοιπο στο $z = \alpha$ είναι:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(z-\alpha)}\right]_{z=\alpha} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z}\right]_{z=\alpha} = \alpha^{-1}. \tag{25}$$

- άρα $x[n] = -\alpha^{-1} + \alpha^{-1} = 0$. Το ίδιο θα ισχύει για $n = -2, -3, \ldots$ Συνεπώς, για γενικό n, $x[n] = \alpha^n\, u[n]$.

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (1)

- Αναλύουμε το μετασχηματισμό $X(z)$ σε

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{26}$$

όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $D(z)$.

- Τότε για απλούς πόλους

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{27}$$

όπου z_k είναι οι πόλοι της $X(z)$

- και τα A_k είναι τα υπόλοιπα στους πόλους

$$A_k = (z - z_k)\, X(z)\big|_{z=z_k}. \tag{28}$$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (1)

- Αναλύουμε το μετασχηματισμό $X(z)$ σε

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{26}$$

όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $D(z)$.

- Τότε για απλούς πόλους

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{27}$$

όπου z_k είναι οι πόλοι της $X(z)$

- και τα A_k είναι τα υπόλοιπα στους πόλους

$$A_k = (z - z_k)\, X(z)\big|_{z=z_k}. \tag{28}$$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (1)

- Αναλύουμε το μετασχηματισμό $X(z)$ σε

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{26}$$

  όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $D(z)$.

- Τότε για απλούς πόλους

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{27}$$

  όπου z_k είναι οι πόλοι της $X(z)$

- και τα A_k είναι τα υπόλοιπα στους πόλους

$$A_k = (z - z_k)\, X(z)\,\big|_{z=z_k}. \tag{28}$$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (2)

- Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $D(z)$ και $m =$ βαθμός $\{N(z)\}-$ βαθμός $\{D(z)\}$, τότε εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z^1 + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{29}$$

- Αν ο $X(z)$ έχει πολλαπλό πόλο τάξης s στο z_i τότε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} + \sum_{l=1}^{s} \frac{C_l}{(z - z_i)^l} \tag{30}$$

- με

$$C_l = \frac{1}{(s-l)!} \frac{d^{s-l}}{dz^{s-l}} [z - z_i]^s X(z) \Big|_{z=z_i}, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{31}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (2)

- Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $D(z)$ και $m =$ βαθμός $\{N(z)\}-$ βαθμός $\{D(z)\}$, τότε εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z^1 + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{29}$$

-

- Αν ο $X(z)$ έχει πολλαπλό πόλο τάξης s στο z_i τότε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} + \sum_{l=1}^{s} \frac{C_l}{(z - z_i)^l} \tag{30}$$

- με

$$C_l = \frac{1}{(s-l)!} \frac{d^{s-l}}{dz^{s-l}} [z - z_i]^s X(z) \Big|_{z=z_i}, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{31}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (2)

- Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $N(z)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $D(z)$ και $m =$ βαθμός $\{N(z)\}-$ βαθμός $\{D(z)\}$, τότε εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z^1 + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{29}$$

-

- Αν ο $X(z)$ έχει πολλαπλό πόλο τάξης s στο z_i τότε:

$$X(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - z_k} + \sum_{l=1}^{s} \frac{C_l}{(z - z_i)^l} \tag{30}$$

- με

$$C_l = \frac{1}{(s-l)!} \frac{d^{s-l}}{dz^{s-l}} [z - z_i]^s X(z) \bigg|_{z=z_i}, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{31}$$

Παράδειγμα 8.3 (1)

- Έστω $x[n]$ ακολουθία δεξιάς πλευράς $x[n]$ με μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ που δίνεται από την

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-b)} = \frac{z^2}{z^2 - (\alpha+b)z + \alpha b}. \tag{32}$$

- Για να βρούμε την ακολουθία $x[n]$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - (\alpha+b)z + \alpha b} = \frac{A_1}{z-\alpha} + \frac{A_2}{z-b} \tag{33}$$

- όπου

$$A_1 = \left.\frac{(z-\alpha)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \left.\frac{z}{(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-b} \tag{34}$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-b)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=b} = \frac{b}{b-\alpha}. \tag{35}$$

Παράδειγμα 8.3 (1)

- Έστω $x[n]$ ακολουθία δεξιάς πλευράς $x[n]$ με μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ που δίνεται από την

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-b)} = \frac{z^2}{z^2-(\alpha+b)z+\alpha b}. \tag{32}$$

- Για να βρούμε την ακολουθία $x[n]$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-(\alpha+b)z+\alpha b} = \frac{A_1}{z-\alpha} + \frac{A_2}{z-b} \tag{33}$$

- όπου

$$A_1 = \left.\frac{(z-\alpha)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \left.\frac{z}{(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-b} \tag{34}$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-b)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=b} = \frac{b}{b-\alpha}. \tag{35}$$

Παράδειγμα 8.3 (1)

- Έστω $x[n]$ ακολουθία δεξιάς πλευράς $x[n]$ με μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ που δίνεται από την

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-b)} = \frac{z^2}{z^2-(\alpha+b)z+\alpha b}. \tag{32}$$

- Για να βρούμε την ακολουθία $x[n]$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-(\alpha+b)z+\alpha b} = \frac{A_1}{z-\alpha} + \frac{A_2}{z-b} \tag{33}$$

- όπου

$$A_1 = \left.\frac{(z-\alpha)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \left.\frac{z}{(z-b)}\right|_{z=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-b} \tag{34}$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-b)z}{(z-\alpha)(z-b)}\right|_{z=b} = \frac{b}{b-\alpha}. \tag{35}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.3 (2)

- Συνεπώς

$$\frac{X(z)}{z} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\frac{1}{z-\alpha} + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right)\frac{1}{z-b}. \tag{36}$$

- Επομένως

$$X(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\frac{z}{z-\alpha} + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right)\frac{z}{z-b} \tag{37}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x[n] = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\alpha^n u[n] + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right) b^n u[n]. \tag{38}$$

Παράδειγμα 8.3 (2)

- Συνεπώς
$$\frac{X(z)}{z} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\frac{1}{z-\alpha} + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right)\frac{1}{z-b}. \tag{36}$$
- Επομένως
$$X(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\frac{z}{z-\alpha} + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right)\frac{z}{z-b} \tag{37}$$
$$\stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = \left(\frac{\alpha}{\alpha - b}\right)\alpha^n u[n] + \left(\frac{b}{b-\alpha}\right) b^n u[n]. \tag{38}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Μέθοδος συνεχούς διαίρεσης

Επιδιώκεται να γραφεί ο $X(z)$ σε άθροισμα σειράς δυνάμεων του z. Τότε η ακολουθία $x[n]$ δίνεται από τους συντελεστές της σειράς.

Παράδειγμα 8.4

Δίνεται ότι

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{3z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}. \tag{39}$$

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{l|l}
3z^2 - \frac{5}{2}z & z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \\ \hline
-3z^2 + \frac{9}{2}z - \frac{3}{2} & \color{red}{3} + \color{red}{\frac{4}{2}}z^{-1} + \color{red}{\frac{6}{4}}z^{-2} \quad \text{κ.ο.κ} \\ \hline
\frac{4}{2}z - \frac{3}{2} & \\
-\frac{4}{2}z + \frac{12}{4} - \frac{4}{4}z^{-1} & \\ \hline
+\frac{6}{4} - z^{-1} & \\
-\frac{6}{4} - \frac{18}{8}z^{-1} - \frac{6}{8}z^{-2} &
\end{array}$$

Επέκταση σε δυναμοσειρά

- Εφαρμόζεται μόνο στα αιτιατά σήματα. Με τη μέθοδο αυτή αναπτύσσουμε τον $X(z)$ σε δυναμοσειρά, όπως η σειρά Taylor, οπότε η ακολουθία $x[n]$ θα δίνεται από τους συντελεστές των δυνάμεων του z^{-1}:
-
$$X(z) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_n z^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \tag{40}$$
- Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα έχουμε:
$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 x[0] \\ p_1 &= q_0 x[1] + q_1 x[0] \\ &\vdots \\ p_n &= q_0 x[n] + q_1 x[n-1] + \cdots + q_n x[0] \end{aligned} \tag{41}$$
οπότε αρκεί να επιλυθεί το κάτω τριγωνικό σύστημα (41) ως προς $x[0]$, $x[1], \ldots, x[n]$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Επέκταση σε δυναμοσειρά

- Εφαρμόζεται μόνο στα αιτιατά σήματα. Με τη μέθοδο αυτή αναπτύσσουμε τον $X(z)$ σε δυναμοσειρά, όπως η σειρά Taylor, οπότε η ακολουθία $x[n]$ θα δίνεται από τους συντελεστές των δυνάμεων του z^{-1}:
- $$X(z) = \frac{p_0 + p_1\,z^{-1} + \cdots + p_n\,z^{-n}}{q_0 + q_1\,z^{-1} + \cdots + q_n\,z^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,z^{-n}. \tag{40}$$
- Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα έχουμε:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 x[0] \\ p_1 &= q_0 x[1] + q_1 x[0] \\ &\vdots \\ p_n &= q_0 x[n] + q_1 x[n-1] + \cdots + q_n x[0] \end{aligned} \tag{41}$$

οπότε αρκεί να επιλυθεί το κάτω τριγωνικό σύστημα (41) ως προς $x[0]$, $x[1], \ldots, x[n]$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Επέκταση σε δυναμοσειρά

- Εφαρμόζεται μόνο στα αιτιατά σήματα. Με τη μέθοδο αυτή αναπτύσσουμε τον $X(z)$ σε δυναμοσειρά, όπως η σειρά Taylor, οπότε η ακολουθία $x[n]$ θα δίνεται από τους συντελεστές των δυναμεων του z^{-1}:
- $$X(z) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_n z^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \tag{40}$$
- Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα έχουμε:

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 x[0] \\ p_1 &= q_0 x[1] + q_1 x[0] \\ &\vdots \\ p_n &= q_0 x[n] + q_1 x[n-1] + \cdots + q_n x[0] \end{aligned} \tag{41}$$

οπότε αρκεί να επιλυθεί το κάτω τριγωνικό σύστημα (41) ως προς $x[0]$, $x[1], \ldots, x[n]$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Γραμμικότητα

Αν $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ με ROC: $R_{X-} < |z| < R_{X+}$ και $y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$ με ROC: $R_{Y-} < |z| < R_{Y+}$, τότε

$$Ax[n] + By[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} AX(z) + BY(z), \qquad \text{με ROC: } R_{Z-} < |z| < R_{Z+} \tag{42}$$

όπου η περιοχή σύγκλισης $R_{Z-} < |z| < R_{Z+}$ είναι τουλάχιστον η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης.

Πολλαπλασιασμός με εκθετική ακολουθία

Αν $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ με ROC: $R_{X-} < |z| < R_{X+}$, τότε

$$\alpha^n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(\alpha^{-1} z), \qquad \text{με ROC: } |\alpha| R_{X}^{-1} < |z| < |\alpha| R_{X+} \tag{43}$$

όπου α πραγματικός ή μιγαδικός. Αν ο $X(z)$ έχει πόλο στο $z = z_1$, τότε ο $X(\alpha^{-1} z)$ θα έχει πόλο στο $z = \alpha z_1$. Το ίδιο ισχύει για τα μηδενικά του $X(z)$. Αν α είναι πραγματικός γίνεται μετατόπιση των πόλων και των μηδενικών κατά μήκος ακτίνων στο z-επίπεδο. Αν α είναι μιγαδικός, τότε γίνεται και περιστροφή.

Διαφόριση του $X(z)$

Αν $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ με ROC: $R_{X-} < |z| < R_{X+}$, τότε

$$nx[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\,\frac{dX(z)}{dz}, \qquad \text{με ROC: } R_{X-} < |z| < R_{X+}. \tag{44}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Μετασχηματισμός συζυγούς ακολουθίας

Αν $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ με ROC: $R_{X-} < |z| < R_{X+}$, τότε

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*), \qquad \text{με ROC: } R_{X-} < |z| < R_{X+}. \tag{45}$$

Θεώρημα αρχικής τιμής

Αν $x[n] = 0$ για $n < 0$, τότε

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z). \tag{46}$$

Συνέλιξη ακολουθιών

Αν $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ με ROC: $R_1 = R_{X-} < |z| < R_{X+}$ και $y[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$ με ROC: $R_2 = R_{Y-} < |z| < R_{Y+}$, τότε

$$[x * y](n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)\,Y(z), \quad \text{με ROC που περιέχει την } R_1 \cap R_2. \tag{47}$$

Αν ένας πόλος της μιας ακολουθίας ακυρώνεται από μηδενικό της άλλης, τότε η περιοχή σύγκλισης της $X(z)\,Y(z)$ είναι μεγαλύτερη.

Μετατόπιση ακολουθίας

- Αυτή η ιδιότητα είναι μεγάλης σημασίας για την ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Έστω $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Με καθυστέρηση της ακολουθίας κατά n_0 δείγματα, όπου $n_0 > 0$, προκύπτει η $x[n-n_0]$. Αν η $x[n]$ είναι αιτιατή, δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < 0$, τότε $x[n-n_0] = 0$ για $n < n_0$.
- Άρα

$$\mathcal{Z}\left\{x[n-n_0]\right\} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} \overset{n-n_0=m}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\, z^{-m-n_0} = z^{-n_0} X(z). \tag{48}$$

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της μετατοπισμένης ακολουθίας είναι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της αρχικής ακολουθίας με πιθανή προσθήκη ή απαλοιφή της αρχής ή του απείρου. Η (48) ισχύει όχι μόνο για αιτιατές ακολουθίες, αλλά για οποιαδήποτε ακολουθία.

Μετατόπιση ακολουθίας

- Αυτή η ιδιότητα είναι μεγάλης σημασίας για την ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Έστω $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Με καθυστέρηση της ακολουθίας κατά n_0 δείγματα, όπου $n_0 > 0$, προκύπτει η $x[n-n_0]$. Αν η $x[n]$ είναι αιτιατή, δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < 0$, τότε $x[n-n_0] = 0$ για $n < n_0$.
- Άρα

$$\mathcal{Z}\left\{x[n-n_0]\right\} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} \stackrel{n-n_0=m}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\, z^{-m-n_0} = z^{-n_0} X(z). \tag{48}$$

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της μετατοπισμένης ακολουθίας είναι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της αρχικής ακολουθίας με πιθανή προσθήκη ή απαλοιφή της αρχής ή του απείρου. Η (48) ισχύει όχι μόνο για αιτιατές ακολουθίες, αλλά για οποιαδήποτε ακολουθία.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Μετατόπιση ακολουθίας

- Αυτή η ιδιότητα είναι μεγάλης σημασίας για την ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Έστω $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Με καθυστέρηση της ακολουθίας κατά n_0 δείγματα, όπου $n_0 > 0$, προκύπτει η $x[n-n_0]$. Αν η $x[n]$ είναι αιτιατή, δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < 0$, τότε $x[n-n_0] = 0$ για $n < n_0$.
- Άρα

$$\mathcal{Z}\left\{x[n-n_0]\right\} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} \stackrel{n-n_0=m}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\, z^{-m-n_0} = z^{-n_0} X(z). \tag{48}$$

- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της μετατοπισμένης ακολουθίας είναι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της αρχικής ακολουθίας με πιθανή προσθήκη ή απαλοιφή της αρχής ή του απείρου. Η (48) ισχύει όχι μόνο για αιτιατές ακολουθίες, αλλά για οποιαδήποτε ακολουθία.

Μετατόπιση ακολουθίας - Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1)

Σημειώνονται ορισμένες διαφορές στο μονόπλευρο μετασχηματισμό $\mathcal{UZ}$ ακολουθιών, όπως και στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace. Πράγματι·

- Αν $x[n]$ είναι αιτιατή ακολουθία, τότε ισχύει η (48).
- Αν η $x[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, τότε ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της μετατοπισμένης ακολουθίας δίνεται από την

$$\begin{aligned}
\mathcal{UZ}\left\{x[n-n_0]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n_0} z^{-n} \\
&= z^{-n_0}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\, z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]\, z^{-m}\right] \\
&= z^{-n_0}\left[\mathcal{X}(z) + \underbrace{\sum_{m=-n_0}^{-1} x[m] z^{-m}}_{\text{αρχικές συνθήκες}}\right]. \qquad (49)
\end{aligned}$$

Μετατόπιση ακολουθίας - Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (1)

Σημειώνονται ορισμένες διαφορές στο μονόπλευρο μετασχηματισμό $\mathcal{UZ}$ ακολουθιών, όπως και στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace. Πράγματι·

- Αν $x[n]$ είναι αιτιατή ακολουθία, τότε ισχύει η (48).
- Αν η $x[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, τότε ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της μετατοπισμένης ακολουθίας δίνεται από την

$$\begin{aligned}
\mathcal{UZ}\left\{x[n-n_0]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n_0} z^{-n} \\
&= z^{-n_0}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\, z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]\, z^{-m}\right] \\
&= z^{-n_0}\left[\mathcal{X}(z) + \underbrace{\sum_{m=-n_0}^{-1} x[m] z^{-m}}_{\text{αρχικές συνθήκες}}\right]. \qquad (49)
\end{aligned}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Μετατόπιση ακολουθίας - Μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ (2)

- Αν η μετατοπισμένη ακολουθία είναι της μορφής $x[n+n_0]$, τότε ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ για ακολουθία δεξιάς πλευράς είναι

$$\mathcal{UZ}\left\{x[n+n_0]\right\} = z^{n_0}\left[\mathcal{X}(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]\, z^{-m}\right]. \tag{50}$$

Ιδιότητες του δίπλευρου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$
Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (1)

- Για την ακολουθία $a^n\, u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι

$$\mathcal{Z}\left\{\alpha^n\, u[n]\right\} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|. \tag{51}$$

- Για το σήμα μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n]\right\} = 1. \tag{52}$$

- Για το σήμα μετατοπισμένου μοναδιαίου δείγματος $\delta[n-k]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n-k]\right\} = z^{-k}. \tag{53}$$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (1)

- Για την ακολουθία $a^n\, u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι

$$\mathcal{Z}\left\{\alpha^n\, u[n]\right\} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|. \tag{51}$$

- Για το σήμα μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n]\right\} = 1. \tag{52}$$

- Για το σήμα μετατοπισμένου μοναδιαίου δείγματος $\delta[n-k]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n-k]\right\} = z^{-k}. \tag{53}$$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (1)

- Για την ακολουθία $a^n\, u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι

$$\mathcal{Z}\left\{\alpha^n\, u[n]\right\} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|. \tag{51}$$

- Για το σήμα μοναδιαίου δείγματος $\delta[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n]\right\} = 1. \tag{52}$$

- Για το σήμα μετατοπισμένου μοναδιαίου δείγματος $\delta[n-k]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n-k]\right\} = z^{-k}. \tag{53}$$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (2)

- Για το σήμα $u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{u[n]\right\} = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1 \tag{54}$$

- Ισχύει

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}. \tag{55}$$

- Όμως το άθροισμα (55) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{z}$. Έτσι, αν $|z^{-1}| < 1$, τότε

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1. \tag{56}$$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (2)

- Για το σήμα $u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{u[n]\right\} = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1 \tag{54}$$

- Ισχύει

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}. \tag{55}$$

- Όμως το άθροισμα (55) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{z}$. Έτσι, αν $|z^{-1}| < 1$, τότε

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1. \tag{56}$$

Συνήθη ζεύγη μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$

Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ μερικών χαρακτηριστικών σημάτων (2)

- Για το σήμα $u[n]$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι:

$$\mathcal{Z}\left\{u[n]\right\} = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1 \tag{54}$$

- Ισχύει

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}. \tag{55}$$

- Όμως το άθροισμα (55) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{z}$. Έτσι, αν $\left|z^{-1}\right| < 1$, τότε

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1. \tag{56}$$

Συνήθη ζεύγη μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$

Γενικά (1)

- Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στην περίπτωση σημάτων συνεχούς χρόνου.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ($\mathcal{FT}-\mathcal{DT}$) δίνεται από τις σχέσεις (ευθύς και αντίστροφος):

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{57}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{58}$$

- και είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω με περίοδο 2π, ενώ η απόσταση των δειγμάτων είναι $\Delta T = 1$.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Γενικά (1)

- Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στην περίπτωση σημάτων συνεχούς χρόνου.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ($\mathcal{FT} - \mathcal{DT}$) δίνεται από τις σχέσεις (ευθύς και αντίστροφος):

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{57}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{58}$$

- και είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω με περίοδο 2π, ενώ η απόσταση των δειγμάτων είναι $\Delta T = 1$.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Γενικά (1)

- Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στην περίπτωση σημάτων συνεχούς χρόνου.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. ($\mathcal{FT} - \mathcal{DT}$) δίνεται από τις σχέσεις (ευθύς και αντίστροφος):

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{57}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{58}$$

- και είναι περιοδική συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής Ω με περίοδο 2π, ενώ η απόσταση των δειγμάτων είναι $\Delta T = 1$.

Γενικά (2)

- Αν $\Delta T \neq 1$

$$X(e^{j\Omega\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T)\, e^{-j\Omega n\Delta T} \qquad (59)$$

$$x(n\Delta T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{\Delta T}} X(e^{j\Omega\Delta T})\, e^{j\Omega n\Delta T}\, d\Omega \qquad (60)$$

- η περίοδος τότε είναι

$$\Omega_p' = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad \text{ενώ η συχνότητα } F = \frac{1}{\Delta T}. \qquad (61)$$

- Σε κάθε περίπτωση, ο αριθμός των δειγμάτων $x(n\Delta T)$ είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Γενικά (2)

- Αν $\Delta T \neq 1$

$$X(e^{j\Omega\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T)\, e^{-j\Omega n\Delta T} \tag{59}$$

$$x(n\Delta T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{\Delta T}} X(e^{j\Omega\Delta T})\, e^{j\Omega n\Delta T}\, d\Omega \tag{60}$$

- η περίοδος τότε είναι

$$\Omega_p^{'} = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad \text{ενώ η συχνότητα } F = \tfrac{1}{\Delta T}. \tag{61}$$

- Σε κάθε περίπτωση, ο αριθμός των δειγμάτων $x(n\Delta T)$ είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Γενικά (2)

- Αν $\Delta T \neq 1$

$$X(e^{j\Omega\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T)\, e^{-j\Omega n\Delta T} \tag{59}$$

$$x(n\Delta T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{\Delta T}} X(e^{j\Omega\Delta T})\, e^{j\Omega n\Delta T}\, d\Omega \tag{60}$$

- η περίοδος τότε είναι

$$\Omega_p^{'} = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad \text{ενώ η συχνότητα } F = \tfrac{1}{\Delta T}. \tag{61}$$

- Σε κάθε περίπτωση, ο αριθμός των δειγμάτων $x(n\Delta T)$ είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

Γενικά (3)

Στην πράξη όμως υπολογίζουμε δείγματα του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ., δηλαδή το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της ακολουθίας σε πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων με τη χρήση των αλγορίθμων FFT, ανεξάρτητα αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη ή όχι. Κατά συνέπεια στον υπολογισμό των δειγμάτων του DFT εισάγονται δύο είδη σφαλμάτων:

- σφάλμα επικάλυψης: το οποίο
  1. είναι πιο έντονο στις υψηλές συχνότητες
  2. μειώνεται αυξάνοντας τον αριθμό των δειγμάτων N ή ισοδύναμα μειώνοντας το βήμα δειγματοληψίας ΔT αν $\Delta T = \frac{T}{N}$ και T κρατείται σταθερό.
- σφάλμα αποκοπής: όταν το σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι χρονοπερατό, οπότε πρέπει να πολλαπλασιαστεί μ' ένα παράθυρο στο πεδίο του χρόνου που θα περιορίσει τον αριθμό των δειγμάτων. Αν $x[n]$ προκύπτει από δειγματοληψία χρονοπερατού σήματος $x(t)$ διάρκειας T, τότε $\Delta T = \frac{T}{N} = \frac{1}{f_s}$, όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας και το σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Γενικά (3)

Στην πράξη όμως υπολογίζουμε δείγματα του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ., δηλαδή το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της ακολουθίας σε πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων με τη χρήση των αλγορίθμων FFT, ανεξάρτητα αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη ή όχι. Κατά συνέπεια στον υπολογισμό των δειγμάτων του DFT εισάγονται δύο είδη σφαλμάτων:

- σφάλμα επικάλυψης: το οποίο
    1. είναι πιο έντονο στις υψηλές συχνότητες
    2. μειώνεται αυξάνοντας τον αριθμό των δειγμάτων N ή ισοδύναμα μειώνοντας το βήμα δειγματοληψίας ΔT αν $\Delta T = \frac{T}{N}$ και T κρατιέται σταθερό.
- σφάλμα αποκοπής: όταν το σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι χρονοπερατό, οπότε πρέπει να πολλαπλασιαστεί μ' ένα παράθυρο στο πεδίο του χρόνου που θα περιορίσει τον αριθμό των δειγμάτων. Αν $x[n]$ προκύπτει από δειγματοληψία χρονοπερατού σήματος $x(t)$ διάρκειας T, τότε $\Delta T = \frac{T}{N} = \frac{1}{f_s}$, όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας και το σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν.

Γενικά (3)

Στην πράξη όμως υπολογίζουμε δείγματα του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ., δηλαδή το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της ακολουθίας σε πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων με τη χρήση των αλγορίθμων FFT, ανεξάρτητα αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη ή όχι. Κατά συνέπεια στον υπολογισμό των δειγμάτων του DFT εισάγονται δύο είδη σφαλμάτων:

- σφάλμα επικάλυψης: το οποίο
  1. είναι πιο έντονο στις υψηλές συχνότητες
  2. μειώνεται αυξάνοντας τον αριθμό των δειγμάτων N ή ισοδύναμα μειώνοντας το βήμα δειγματοληψίας ΔT αν $\Delta T = \frac{T}{N}$ και T κρατιέται σταθερό.
- σφάλμα αποκοπής: όταν το σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι χρονοπερατό, οπότε πρέπει να πολλαπλασιαστεί μ' ένα παράθυρο στο πεδίο του χρόνου που θα περιορίσει τον αριθμό των δειγμάτων. Αν $x[n]$ προκύπτει από δειγματοληψία χρονοπερατού σήματος $x(t)$ διάρκειας T, τότε $\Delta T = \frac{T}{N} = \frac{1}{f_s}$, όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας και το σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν.

Γενικά (3)

Στην πράξη όμως υπολογίζουμε δείγματα του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ., δηλαδή το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της ακολουθίας σε πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων με τη χρήση των αλγορίθμων FFT, ανεξάρτητα αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη ή όχι. Κατά συνέπεια στον υπολογισμό των δειγμάτων του DFT εισάγονται δύο είδη σφαλμάτων:

- σφάλμα επικάλυψης: το οποίο
  1. είναι πιο έντονο στις υψηλές συχνότητες
  2. μειώνεται αυξάνοντας τον αριθμό των δειγμάτων N ή ισοδύναμα μειώνοντας το βήμα δειγματοληψίας ΔT αν $\Delta T = \frac{T}{N}$ και T κρατιέται σταθερό.
- σφάλμα αποκοπής: όταν το σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι χρονοπερατό, οπότε πρέπει να πολλαπλασιαστεί μ' ένα παράθυρο στο πεδίο του χρόνου που θα περιορίσει τον αριθμό των δειγμάτων. Αν $x[n]$ προκύπτει από δειγματοληψία χρονοπερατού σήματος $x(t)$ διάρκειας T, τότε $\Delta T = \frac{T}{N} = \frac{1}{f_s}$, όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας και το σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν.

Σχέση μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ και μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ.

Αν στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ βρίσκεται ο μοναδιαίος κύκλος, τότε μπορούμε να μεταβούμε από το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ στον μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. της ακολουθίας με αντικατάσταση $z = e^{j\Omega}$, δηλαδή

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{62}$$

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (1)

- Όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας $x[n]$ μπορούμε να μεταβούμε στο μετασχηματισμό Laplace της ακολουθίας με αντικατάσταση $z = e^s$:

$$X(s) = X(z)|_{z=e^s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-sn} \tag{63}$$

- Γενικότερα όταν $\Delta T \neq 1$ ο μετασχηματισμός Laplace ακολουθίας δειγμάτων είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta T}$ στο φανταστικό άξονα[a], επειδή

$$X(s + j\frac{2\pi}{\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-sn\Delta T}\, e^{-j2\pi n} = X(s). \tag{64}$$

[a] καταχρηστικά λέμε περιοδική συνάρτηση με περίοδο $j\omega_s = j\,\frac{2\pi}{T}$

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (1)

- Όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας $x[n]$ μπορούμε να μεταβούμε στο μετασχηματισμό Laplace της ακολουθίας με αντικατάσταση $z = e^s$:

$$X(s) = X(z)|_{z=e^s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-sn} \tag{63}$$

- Γενικότερα όταν $\Delta T \neq 1$ ο μετασχηματισμός Laplace ακολουθίας δειγμάτων είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta T}$ στο φανταστικό άξονα[α΄], επειδή

$$X(s + j\frac{2\pi}{\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-sn\Delta T}\, e^{-j2\pi n} = X(s). \tag{64}$$

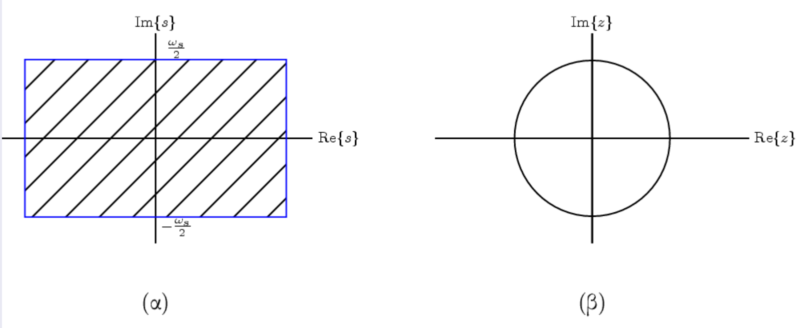
[α΄] καταχρηστικά λέμε περιοδική συνάρτηση με περίοδο $j\,\omega_s = j\,\frac{2\pi}{T}$

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Αν μας ενδιαφέρει ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, τότε μια μετάβαση από το s- επίπεδο στο z- επίπεδο είναι η απεικόνιση:

$$z = e^{s\Delta T} = e^{(j\omega+\sigma)\,\Delta T} = \underbrace{e^{\sigma\Delta T}}_{|z|}\, e^{j\omega\Delta T} \tag{65}$$

Μετάβαση από το μετασχηματισμό Laplace (α) στο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ (β).



Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (2)

- Παρατηρούμε πως η αντικατάσταση $e^{s\Delta T} = z$ απεικονίζει κάθε λωρίδα εύρους ω_s ως προς $\mathrm{Im}\{s\}$ του s- επιπέδου σ' όλο το z- επίπεδο (δηλαδή, είναι μια πλειότιμη απεικόνιση). Για να καταστήσουμε την απεικόνιση μονότιμη, δεχόμαστε την απεικόνιση μόνο της λωρίδας για $\omega \in [-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ στο z- επίπεδο.
- Από την (65) προκύπτει

$$|z| \begin{cases} < 1 & \text{αν } \sigma < 0 \\ = 1 & \text{αν } \sigma = 0 \\ > 1 & \text{αν } \sigma > 0, \end{cases} \tag{66}$$

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (2)

- Παρατηρούμε πως η αντικατάσταση $e^{s\Delta T} = z$ απεικονίζει κάθε λωρίδα εύρους ω_s ως προς $\mathrm{Im}\{s\}$ του s- επιπέδου σ' όλο το z- επίπεδο (δηλαδή, είναι μια πλειότιμη απεικόνιση). Για να καταστήσουμε την απεικόνιση μονότιμη, δεχόμαστε την απεικόνιση μόνο της λωρίδας για $\omega \in [-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ στο z- επίπεδο.
- Από την (65) προκύπτει

$$|z| \begin{cases} < 1 & \text{αν } \sigma < 0 \\ = 1 & \text{αν } \sigma = 0 \\ > 1 & \text{αν } \sigma > 0, \end{cases} \tag{66}$$

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέσεις μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$, Laplace και Fourier

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Σχέση μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ και Laplace (3)

1. Το αριστερό s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
2. Ο φανταστικός άξονας του s-επιπέδου ($j\omega$ άξονας) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.)
3. Το δεξί s- ημιεπίπεδο απεικονίζεται εξωτερικά του μοναδιαίου κύκλου στο z-επίπεδο.
4. Γραμμές παράλληλες προς το φανταστικό άξονα του s-επιπέδου απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους με ακτίνα $|z| = e^{\sigma \Delta T}$.
5. Γραμμές παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα του s επιπέδου (σ άξονα) απεικονίζονται στο z- επίπεδο σε ακτίνες με γωνία $\arg z = \omega \Delta T$.
6. Αν $s \to 0$, τότε $z \to 1$. Δηλαδή, η αρχή των αξόνων στο s- επίπεδο απεικονίζεται στο $z = 1$ στο z- επίπεδο.
7. Αν ω μεταβάλλεται από $\frac{-\omega_s}{2}$ σε $\frac{\omega_s}{2}$, τότε $\arg z = \omega \Delta T$ μεταβάλλεται από $-\pi$ ως π.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Συνάρτηση συστήματος

- Από την ιδιότητα της συνέλιξης συνάγουμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου $y[n]$ προκύπτει ως

$$Y(z) = H(z)\,X(z) \tag{67}$$

- όπου $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εισόδου $x[n]$ και $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$, ο οποίος ονομάζεται συνάρτηση συστήματος (system function) ή συνάρτηση μεταφοράς (transfer function).
- Για $z = e^{j\Omega}$, η συνάρτηση συστήματος εκφυλίζεται στην απόκριση συχνότητας, εφόσον βέβαια ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(z)$. Στο Κεφάλαιο 8 είδαμε ότι η συνάρτηση συστήματος $H(z)$ ήταν η ιδιοτιμή του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Συνάρτηση συστήματος

- Από την ιδιότητα της συνέλιξης συνάγουμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου $y[n]$ προκύπτει ως

$$Y(z) = H(z)\,X(z) \tag{67}$$

- όπου $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εισόδου $x[n]$ και $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$, ο οποίος ονομάζεται συνάρτηση συστήματος (system function) ή συνάρτηση μεταφοράς (transfer function).
- Για $z = e^{j\Omega}$, η συνάρτηση συστήματος εκφυλίζεται στην απόκριση συχνότητας, εφόσον βέβαια ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(z)$. Στο Κεφάλαιο 8 είδαμε ότι η συνάρτηση συστήματος $H(z)$ ήταν η ιδιοτιμή του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Συνάρτηση συστήματος

- Από την ιδιότητα της συνέλιξης συνάγουμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εξόδου $y[n]$ προκύπτει ως

$$Y(z) = H(z)\,X(z) \tag{67}$$

- όπου $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της εισόδου $x[n]$ και $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$, ο οποίος ονομάζεται συνάρτηση συστήματος (system function) ή συνάρτηση μεταφοράς (transfer function).
- Για $z = e^{j\Omega}$, η συνάρτηση συστήματος εκφυλίζεται στην απόκριση συχνότητας, εφόσον βέβαια ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $X(z)$. Στο Κεφάλαιο 8 είδαμε ότι η συνάρτηση συστήματος $H(z)$ ήταν η ιδιοτιμή του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση z^n.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Ιδιότητες της συνάρτησης συστήματος

- Ιδιότητα 1: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου συμπεριλαμβάνοντας και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 2: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν (α) η ROC είναι το εξωτερικό ενός κύκλου έξω από τον πιο απομακρυσμένο πόλο και (β) με το $H(z)$ εκφρασμένο ως λόγο δύο πολυωνύμων του z, η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή δεν υπερβαίνει την τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή.
- Ιδιότητα 3: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.
- Ιδιότητα 4: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης συστήματος $H(z)$ κείνται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Ιδιότητες της συνάρτησης συστήματος

- Ιδιότητα 1: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου συμπεριλαμβάνοντας και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 2: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν (α) η ROC είναι το εξωτερικό ενός κύκλου έξω από τον πιο απομακρυσμένο πόλο και (β) με το $H(z)$ εκφρασμένο ως λόγο δύο πολυωνύμων του z, η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή δεν υπερβαίνει την τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή.
- Ιδιότητα 3: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.
- Ιδιότητα 4: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης συστήματος $H(z)$ κείνται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Ιδιότητες της συνάρτησης συστήματος

- Ιδιότητα 1: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου συμπεριλαμβάνοντας και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 2: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν (α) η ROC είναι το εξωτερικό ενός κύκλου έξω από τον πιο απομακρυσμένο πόλο και (β) με το $H(z)$ εκφρασμένο ως λόγο δύο πολυωνύμων του z, η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή δεν υπερβαίνει την τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή.
- Ιδιότητα 3: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.
- Ιδιότητα 4: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης συστήματος $H(z)$ κείνται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Ιδιότητες της συνάρτησης συστήματος

- Ιδιότητα 1: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ είναι το εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου συμπεριλαμβάνοντας και το $z = \infty$.
- Ιδιότητα 2: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι αιτιατό εάν και μόνο εάν (α) η ROC είναι το εξωτερικό ενός κύκλου έξω από τον πιο απομακρυσμένο πόλο και (β) με το $H(z)$ εκφρασμένο ως λόγο δύο πολυωνύμων του z, η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή δεν υπερβαίνει την τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή.
- Ιδιότητα 3: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η ROC του $H(z)$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.
- Ιδιότητα 4: Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με ρητή συνάρτηση συστήματος είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης συστήματος $H(z)$ κείνται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Γεωμετρικός υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών

- Κατ΄ αναλογία προς το μετασχηματισμό Laplace που επιτρέπει το γεωμετρικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. μπορεί να υπολογιστεί γεωμετρικώς θεωρώντας τα διανύσματα πόλων και μηδενικών στο z- επίπεδο.
- Ωστόσο επειδή στην περίπτωση αυτή η ρητή συνάρτηση πρόκειται να υπολογιστεί πάνω στο μοναδιαίο κύκλο z=1, θεωρούμε τα διανύσματα που άγονται από τους πόλους και τα μηδενικά και καταλήγουν σ΄ ένα σημείο επί του μοναδιαίου κύκλου αντί του φανταστικού άξονα του s-επιπέδου.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Γεωμετρικός υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών

- Κατ΄ αναλογία προς το μετασχηματισμό Laplace που επιτρέπει το γεωμετρικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. μπορεί να υπολογιστεί γεωμετρικώς θεωρώντας τα διανύσματα πόλων και μηδενικών στο z- επίπεδο.
- Ωστόσο επειδή στην περίπτωση αυτή η ρητή συνάρτηση πρόκειται να υπολογιστεί πάνω στο μοναδιαίο κύκλο z=1, θεωρούμε τα διανύσματα που άγονται από τους πόλους και τα μηδενικά και καταλήγουν σ΄ ένα σημείο επί του μοναδιαίου κύκλου αντί του φανταστικού άξονα του s-επιπέδου.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (1)

- Έστω πρωτοβάθμιο αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$. Από το Παράδειγμα 8.1 γνωρίζουμε ότι

$$H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|. \tag{68}$$

- Για $|a| < 1$ η ROC συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και επομένως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της κρουστικής απόκρισης συγκλίνει και ισούται με $H(z)$ για $z = e^{j\Omega}$, οπότε η απόκριση συχνότητας δίνεται από την

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}. \tag{69}$$

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (1)

- Έστω πρωτοβάθμιο αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. με κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$. Από το Παράδειγμα 8.1 γνωρίζουμε ότι

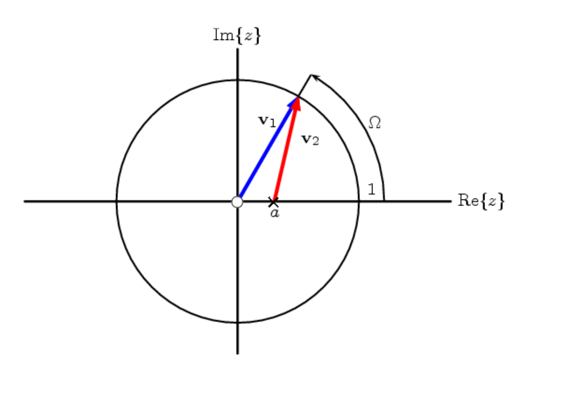
$$H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|. \tag{68}$$

- Για $|a| < 1$ η ROC συμπεριλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και επομένως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της κρουστικής απόκρισης συγκλίνει και ισούται με $H(z)$ για $z = e^{j\Omega}$, οπότε η απόκριση συχνότητας δίνεται από την

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}. \tag{69}$$

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (2)



Παράδειγμα 8.5 (3)

- Στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$ συμπεριλαμβάνονται τα διανύσματα από τον πόλο στο $z = a$ και το μηδενικό στο $z = 0$ προς ένα σημείο σε γωνία Ω επί του μοναδιαίου κύκλου.
- Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα Ω είναι ο λόγος του μήκους του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ προς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον πραγματικό άξονα μείον τη γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Προφανώς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ είναι μοναδιαίο για κάθε Ω. Η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι Ω.

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Φάση της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (3)

- Στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$ συμπεριλαμβάνονται τα διανύσματα από τον πόλο στο $z = a$ και το μηδενικό στο $z = 0$ προς ένα σημείο σε γωνία Ω επί του μοναδιαίου κύκλου.
- Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα Ω είναι ο λόγος του μήκους του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ προς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον πραγματικό άξονα μείον τη γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Προφανώς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ είναι μοναδιαίο για κάθε Ω. Η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι Ω.

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Φάση της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Παράδειγμα 8.5 (3)

- Στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$ συμπεριλαμβάνονται τα διανύσματα από τον πόλο στο $z = a$ και το μηδενικό στο $z = 0$ προς ένα σημείο σε γωνία Ω επί του μοναδιαίου κύκλου.
- Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα Ω είναι ο λόγος του μήκους του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ προς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον πραγματικό άξονα μείον τη γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Προφανώς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ είναι μοναδιαίο για κάθε Ω. Η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι Ω.

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.
Φάση της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (3)

- Στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της $H(z)$ συμπεριλαμβάνονται τα διανύσματα από τον πόλο στο $z = a$ και το μηδενικό στο $z = 0$ προς ένα σημείο σε γωνία Ω επί του μοναδιαίου κύκλου.
- Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα Ω είναι ο λόγος του μήκους του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ προς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον πραγματικό άξονα μείον τη γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_2$.
- Προφανώς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ είναι μοναδιαίο για κάθε Ω. Η γωνία του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι Ω.

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Φάση της απόκρισης συχνότητας για $a = 0.4$ και $a = 0.9$.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (4)

- Για $0 < a < 1$, το διάνυσμα που άγεται από τον πόλο έχει το μικρότερο μήκος για $\Omega = 0$, ενώ το μήκος του αυξάνεται μονότονα καθώς Ω μεταβάλλεται από το 0 προς το π. Κατά συνέπεια το μέτρο της απόκρισης συχνότητας θα μεγιστοποιείται για $\Omega = 0$ και θα φθίνει μονότονα καθώς το Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Η γωνία του διανύσματος που άγεται από τον πόλο ξεκινά από το 0 και αυξάνεται μονότονα καθώς το ο Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Το μέτρο της παραμέτρου a παίζει ρόλο παραπλήσιο προς την σταθερά χρόνου τ του πρωτοβάθμιου Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. Παρατηρούμε ότι το μέτρο στην κορυφή της απόκρισης συχνότητας (δηλαδή για $\Omega = 0$) ελαττώνεται καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν.
- Μπορεί να δειχθεί ότι καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν, τότε η κρουστική απόκριση αποσβέννυται πιό απότομα και η βηματική απόκριση τείνει προς τη μονάδα πιό γρήγορα.

Παράδειγμα 8.5 (4)

- Για $0 < a < 1$, το διάνυσμα που άγεται από τον πόλο έχει το μικρότερο μήκος για $\Omega = 0$, ενώ το μήκος του αυξάνεται μονότονα καθώς Ω μεταβάλλεται από το 0 προς το π. Κατά συνέπεια το μέτρο της απόκρισης συχνότητας θα μεγιστοποιείται για $\Omega = 0$ και θα φθίνει μονότονα καθώς το Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Η γωνία του διανύσματος που άγεται από τον πόλο ξεκινά από το 0 και αυξάνεται μονότονα καθώς το ο Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Το μέτρο της παραμέτρου a παίζει ρόλο παραπλήσιο προς την σταθερά χρόνου τ του πρωτοβάθμιου Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. Παρατηρούμε ότι το μέτρο στην κορυφή της απόκρισης συχνότητας (δηλαδή για $\Omega = 0$) ελαττώνεται καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν.
- Μπορεί να δειχθεί ότι καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν, τότε η κρουστική απόκριση αποσβέννυται πιό απότομα και η βηματική απόκριση τείνει προς τη μονάδα πιό γρήγορα.

Παράδειγμα 8.5 (4)

- Για $0 < a < 1$, το διάνυσμα που άγεται από τον πόλο έχει το μικρότερο μήκος για $\Omega = 0$, ενώ το μήκος του αυξάνεται μονότονα καθώς Ω μεταβάλλεται από το 0 προς το π. Κατά συνέπεια το μέτρο της απόκρισης συχνότητας θα μεγιστοποιείται για $\Omega = 0$ και θα φθίνει μονότονα καθώς το Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Η γωνία του διανύσματος που άγεται από τον πόλο ξεκινά από το 0 και αυξάνεται μονότονα καθώς το ο Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Το μέτρο της παραμέτρου a παίζει ρόλο παραπλήσιο προς την σταθερά χρόνου τ του πρωτοβάθμιου Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. Παρατηρούμε ότι το μέτρο στην κορυφή της απόκρισης συχνότητας (δηλαδή για $\Omega = 0$) ελαπώνεται καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν.
- Μπορεί να δειχθεί ότι καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν, τότε η κρουστική απόκριση αποσβέννυται πιό απότομα και η βηματική απόκριση τείνει προς τη μονάδα πιό γρήγορα.

Ανάλυση και χαρακτηρισμός γραμμικών χρονοαμετάβλητων συστημάτων χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

Παράδειγμα 8.5 (4)

- Για $0 < a < 1$, το διάνυσμα που άγεται από τον πόλο έχει το μικρότερο μήκος για $\Omega = 0$, ενώ το μήκος του αυξάνεται μονότονα καθώς Ω μεταβάλλεται από το 0 προς το π. Κατά συνέπεια το μέτρο της απόκρισης συχνότητας θα μεγιστοποιείται για $\Omega = 0$ και θα φθίνει μονότονα καθώς το Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Η γωνία του διανύσματος που άγεται από τον πόλο ξεκινά από το 0 και αυξάνεται μονότονα καθώς το ο Ω αυξάνει από το 0 προς το π.
- Το μέτρο της παραμέτρου a παίζει ρόλο παραπλήσιο προς την σταθερά χρόνου τ του πρωτοβάθμιου Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. Παρατηρούμε ότι το μέτρο στην κορυφή της απόκρισης συχνότητας (δηλαδή για $\Omega = 0$) ελαπτώνεται καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν.
- Μπορεί να δειχθεί ότι καθώς το $|a|$ φθίνει προς το μηδέν, τότε η κρουστική απόκριση αποσβέννυται πιό απότομα και η βηματική απόκριση τείνει προς τη μονάδα πιό γρήγορα.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης