



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Σήματα-Συστήματα

Ενότητα 9: Δειγματοληψία

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος  
Τμήμα Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



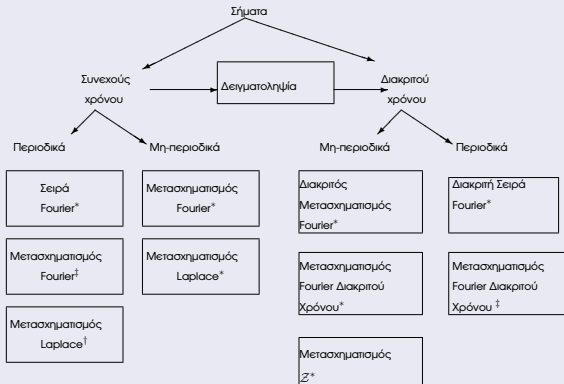
# Δειγματοληψία

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

- 1 Ανασκόπηση
- 2 Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon
- 3 Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier
- 4 Επεξεργασία Δ.Χ. των σημάτων Σ.Χ.

## Αναλυτικά εργαλεία για τις διάφορες κατηγορίες σημάτων



\* Ορίζονται αναλυτικώς.

† Ορίζεται για τα ημιπεριοδικά σήματα.

‡ Απόδοση μετασχηματισμού συνεπεία των ιδιοτήτων.

## Τί λείπει;

- Για καθαρώς παιδευτικούς λόγους θεωρήσαμε τόσο τα σήματα Σ.Χ. και Δ.Χ. όσο και τα προσαρτημένα σ' αυτά αναλυτικά εργαλεία ως λειτουργικώς ανεξάρτητα.
- Ωστόσο τούτο δεν αληθεύει. Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι αναλογικός. Έτσι η πλειοψηφία των σημάτων Δ.Χ. προέρχεται από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων Σ.Χ. Συνεπώς επιβάλλεται να μελετηθεί η διαδικασία της δειγματοληψίας.
- Επιπροσθέτως, "φυσική σημασία" διαθέτει λ.χ. ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. που αναδεικνύει τις φασματικές ιδιότητες του σήματος του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η κυκλική συχνότητα  $\omega$  (μετρήσιμη σε  $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ) ή η συχνότητα  $f$  που μετρείται σε Hz.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier πρέπει μάλλον να αντιμετωπίζονται σαν αλγόριθμοι αριθμητικής ανάλυσης για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.

## Τί λείπει;

- Για καθαρώς παιδευτικούς λόγους θεωρήσαμε τόσο τα σήματα Σ.Χ. και Δ.Χ. όσο και τα προσαρτημένα σ' αυτά αναλυτικά εργαλεία ως λειτουργικώς ανεξάρτητα.
- Ωστόσο τούτο δεν αληθεύει. Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι **αναλογικός**. Έτσι η πλειοψηφία των σημάτων Δ.Χ. προέρχεται από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων Σ.Χ. Συνεπώς επιβάλλεται να μελετηθεί η διαδικασία της **δειγματοληψίας**.
- Επιπροσθέτως, "φυσική σημασία" διαθέτει λ.χ. ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. που αναδεικνύει τις φασματικές ιδιότητες του σήματος του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η κυκλική συχνότητα  $\omega$  (μετρήσιμη σε  $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ) ή η συχνότητα  $f$  που μετριέται σε Hz.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier πρέπει μάλλον να αντιμετωπίζονται σαν αλγόριθμοι αριθμητικής ανάλυσης για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.



## Τί λείπει;

- Για καθαρώς παιδευτικούς λόγους θεωρήσαμε τόσο τα σήματα Σ.Χ. και Δ.Χ. όσο και τα προσαρτημένα σ' αυτά αναλυτικά εργαλεία ως λειτουργικώς ανεξάρτητα.
- Ωστόσο τούτο δεν αληθεύει. Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι **αναλογικός**. Έτσι η πλειοψηφία των σημάτων Δ.Χ. προέρχεται από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων Σ.Χ. Συνεπώς επιβάλλεται να μελετηθεί η διαδικασία της **δειγματοληψίας**.
- Επιπροσθέτως, “φυσική σημασία” διαθέτει λ.χ. ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. που αναδεικνύει τις φασματικές ιδιότητες του σήματος του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η κυκλική συχνότητα  $\omega$  (μετρήσιμη σε  $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ) ή η συχνότητα  $f$  που μετριέται σε Hz.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier πρέπει μάλλον να αντιμετωπίζονται σαν αλγόριθμοι αριθμητικής ανάλυσης για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.

## Τί λείπει;

- Για καθαρώς παιδευτικούς λόγους θεωρήσαμε τόσο τα σήματα Σ.Χ. και Δ.Χ. όσο και τα προσαρτημένα σ' αυτά αναλυτικά εργαλεία ως λειτουργικώς ανεξάρτητα.
- Ωστόσο τούτο δεν αληθεύει. Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι **αναλογικός**. Έτσι η πλειοψηφία των σημάτων Δ.Χ. προέρχεται από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων Σ.Χ. Συνεπώς επιβάλλεται να μελετηθεί η διαδικασία της **δειγματοληψίας**.
- Επιπροσθέτως, “φυσική σημασία” διαθέτει λ.χ. ο μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. που αναδεικνύει τις φασματικές ιδιότητες του σήματος του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η κυκλική συχνότητα  $\omega$  (μετρήσιμη σε  $\frac{rad}{sec}$ ) ή η συχνότητα  $f$  που μετριέται σε Hz.
- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier πρέπει μάλλον να αντιμετωπίζονται σαν αλγόριθμοι **αριθμητικής ανάλυσης** για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.

## Πού πάμε ;

- Παρομοίως ένα δυναμικό σύστημα λ.χ. το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής ομιλίας, ο **φωνητικός σωλήνας** (vocal tract), όπου διαδίδονται ηχητικά κύματα μοντελοποιείται από μερικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις κυματικές εξισώσεις.
- Για να παράξουμε ένα αριθμητικό μοντέλο του συστήματος κατάλληλο για επεξεργασία με τον υπολογιστή, αλλά και για να δημιουργήσουμε αλγορίθμους επεξεργασίας των δειγμάτων που ηροέρχονται από τη δειγματοληψία του σήματος της ομιλίας από τις διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου πρέπει να μεταβούμε στο  $s$ -επίπεδο (μετασχηματισμός Laplace) και στη συνέχεια να απεικονίσουμε το  $s$ -επίπεδο στο  $z$ -επίπεδο (μετασχηματισμός  $Z$ ).
- Μέθοδοι απεικόνισης ενός επιθυμητού μετασχηματισμού Laplace σε μετασχηματισμό  $Z$  απαντούνται επίσης στο πρόβλημα της σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων.

## Πού πάμε ;

- Παρομοίως ένα δυναμικό σύστημα λ.χ. το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής ομιλίας, ο **φωνητικός σωλήνας** (vocal tract), όπου διαδίδονται ηχητικά κύματα μοντελοποιείται από μερικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις κυματικές εξισώσεις.
- Για να παράξουμε ένα **αριθμητικό μοντέλο** του συστήματος κατάλληλο για επεξεργασία με τον υπολογιστή, αλλά και για να δημιουργήσουμε αλγορίθμους **επεξεργασίας των δειγμάτων που προέρχονται από τη δειγματοληψία του σήματος της ομιλίας** από τις διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου πρέπει να μεταβούμε στο **s- επίπεδο** (μετασχηματισμός Laplace) και στη συνέχεια να **απεικονίσουμε το s- επίπεδο στο z- επίπεδο** (μετασχηματισμός  $\mathcal{Z}$ ).
- Μέθοδοι απεικόνισης ενός επιθυμητού μετασχηματισμού Laplace σε μετασχηματισμό  $\mathcal{Z}$  απαντούν επίσης στο πρόβλημα της σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων.

## Πού πάμε ;

- Παρομοίως ένα δυναμικό σύστημα λ.χ. το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής ομιλίας, ο **φωνητικός σωλήνας** (vocal tract), όπου διαδίδονται ηχητικά κύματα μοντελοποιείται από μερικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις κυματικές εξισώσεις.
- Για να παράξουμε ένα **αριθμητικό μοντέλο** του συστήματος κατάλληλο για επεξεργασία με τον υπολογιστή, αλλά και για να δημιουργήσουμε αλγορίθμους **επεξεργασίας των δειγμάτων που προέρχονται από τη δειγματοληψία του σήματος της ομιλίας** από τις διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου πρέπει να μεταβούμε στο **s- επίπεδο** (μετασχηματισμός Laplace) και στη συνέχεια να **απεικονίσουμε το s- επίπεδο στο z- επίπεδο** (μετασχηματισμός  $\mathcal{Z}$ ).
- Μέθοδοι απεικόνισης ενός επιθυμητού μετασχηματισμού Laplace σε μετασχηματισμό  $\mathcal{Z}$  απαντούνται επίσης στο πρόβλημα της **σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων**.

## Αντιεπικάλυψη

- Η δειγματοληψία ενός σήματος Σ.Χ. εισάγει **επικάλυψη (aliasing)** στο **φάσμα**.
- Τούτο είναι απότοκο της ιδιότητας της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier.
- Το τεχνικό πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε είναι πώς θα εκλέξουμε τη **συχνότητα δειγματοληψίας**  $f_s = \frac{1}{T}$  όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας που υπονοείται στη σχέση παραγωγής των δειγμάτων από το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$ :

$$x[n] = x(nT). \quad (1)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Αντιεπικάλυψη

- Η δειγματοληψία ενός σήματος Σ.Χ. εισάγει **επικάλυψη (aliasing)** στο **φάσμα**.
- Τούτο είναι απότοκο της ιδιότητας της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier.
- Το τεχνικό πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε είναι πώς θα εκλέξουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = \frac{1}{T}$  όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας που υπονοείται στη σχέση παραγωγής των δειγμάτων από το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$ :

$$x[n] = x(nT). \quad (1)$$

## Αντιεπικάλυψη

- Η δειγματοληψία ενός σήματος Σ.Χ. εισάγει **επικάλυψη (aliasing)** στο **φάσμα**.
- Τούτο είναι απότοκο της ιδιότητας της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier.
- Το τεχνικό πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε είναι **πώς θα εκλέξουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = \frac{1}{T}$**  όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας που υπονοείται στη σχέση παραγωγής των δειγμάτων από το σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$ :

$$x[n] = x(nT). \quad (1)$$



# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

- Ποιές είναι οι συνθήκες που εγγυώνται την τέλεια ανακατασκευή του σήματος  $x(t)$  από τα δείγματά του  $x[n]$ ; Οι συνθήκες αυτές προβλέπονται από το διάσημο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.
- Πέρα από τα ενδεχόμενα σφάλματα επικάλυψης, όταν δεν γίνει βέλτιστη εκλογή της συχνότητας δειγματοληψίας, ενδεχομένως υπεισέρχονται και σφάλματα αποκοπής, όταν το σήμα δεν είναι χρονοπερατό και πρέπει να αποκοπεί στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιάζοντάς το μ' ένα παράθυρο.
- Ήδη η χρήση των όρων σφάλματα επικάλυψης και αποκοπής μας παραπέμπει σε μελέτη ανάλυσης λαθών αλγορίθμων αριθμητικής ανάλυσης. Πράγματι σε μία τέτοια θεώρηση η περίοδος δειγματοληψίας δεν είναι τίποτε άλλο από το βήμα ενός αλγορίθμου αριθμητικής ανάλυσης, λ.χ. παρεμβολή.

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

- Ποιές είναι οι συνθήκες που εγγυώνται την τέλεια ανακατασκευή του σήματος  $x(t)$  από τα δείγματά του  $x[n]$ ; Οι συνθήκες αυτές προβλέπονται από το διάσημο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.
- Πέρα από τα ενδεχόμενα σφάλματα επικάλυψης, όταν δεν γίνει βέλτιστη εκλογή της συχνότητας δειγματοληψίας, ενδεχομένως υπεισέρχονται και σφάλματα αποκοπής, όταν το σήμα δεν είναι χρονοπερατό και πρέπει να αποκοπεί στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιάζοντάς το μ' ένα παράθυρο.
- Ήδη η χρήση των όρων σφάλματα επικάλυψης και αποκοπής μας παραπέμπει σε μελέτη ανάλυσης λαθών αλγορίθμων αριθμητικής ανάλυσης. Πράγματι σε μία τέτοια θεώρηση η περίοδος δειγματοληψίας δεν είναι τίποτε άλλο από το βήμα ενός αλγορίθμου αριθμητικής ανάλυσης, λ.χ. παρεμβολή.

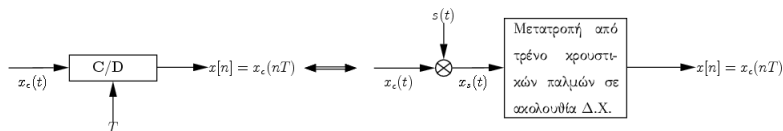
# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

- Ποιές είναι οι συνθήκες που εγγυώνται την τέλεια ανακατασκευή του σήματος  $x(t)$  από τα δείγματά του  $x[n]$ ; Οι συνθήκες αυτές προβλέπονται από το διάσημο θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.
- Πέρα από τα ενδεχόμενα σφάλματα επικάλυψης, όταν δεν γίνει βέλτιστη εκλογή της συχνότητας δειγματοληψίας, ενδεχομένως υπεισέρχονται και σφάλματα αποκοπής, όταν το σήμα δεν είναι χρονοπερατό και πρέπει να αποκοπεί στο πεδίο του χρόνου πολλαπλασιάζοντάς το μ' ένα παράθυρο.
- Ήδη η χρήση των όρων σφάλματα επικάλυψης και αποκοπής μας παραπέμπει σε μελέτη **ανάλυσης λαθών αλγορίθμων αριθμητικής ανάλυσης**. Πράγματι σε μιά τέτοια θεώρηση η **περίοδος δειγματοληψίας** δεν είναι τίποτε άλλο από το **βήμα** ενός αλγορίθμου αριθμητικής ανάλυσης, λ.χ. παρεμβολή.

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ. (1)



## Επεξηγήσεις

Αποφεύγουμε τον όρο μετατροπéας αναλογικού σε ψηφιακό (A/D converter), επειδή δεν θα μας απασχολήσουν σε πρώτη φάση δομικά μέρη ενός τέτοιου μετατροπέα, όπως τα κυκλώματα κράτησης δείγματος (sample and hold) ή ο τελεστικός ενισχυτής που υλοποιεί τη κβάντιση του δείγματος.

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (2)

- Υλοποιεί πολλαπλασιασμό με τρένο κρουστικών παλμών και μετατροπή από τρένο κρουστικών παλμών σε ακολουθία διακριτού χρόνου. Παράμετρος του συστήματος είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T$ .

- Το τρένο κρουστικών παλμών  $s(t)$  και ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

- Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $x(t)$  με το τρένο κρουστικών παλμών παίρνουμε

$$x_s(t) = x_c(t) s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT). \quad (3)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (2)

- Υλοποιεί πολλαπλασιασμό με τρένο κρουστικών παλμών και μετατροπή από τρένο κρουστικών παλμών σε ακολουθία διακριτού χρόνου. Παράμετρος του συστήματος είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T$ .
- Το τρένο κρουστικών παλμών  $s(t)$  και ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

- Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $x(t)$  με το τρένο κρουστικών παλμών παίρνουμε

$$x_s(t) = x_c(t) s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT). \quad (3)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (2)

- Υλοποιεί πολλαπλασιασμό με τρένο κρουστικών παλμών και μετατροπή από τρένο κρουστικών παλμών σε ακολουθία διακριτού χρόνου. Παράμετρος του συστήματος είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T$ .
- Το τρένο κρουστικών παλμών  $s(t)$  και ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

- Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $x(t)$  με το τρένο κρουστικών παλμών παίρνουμε

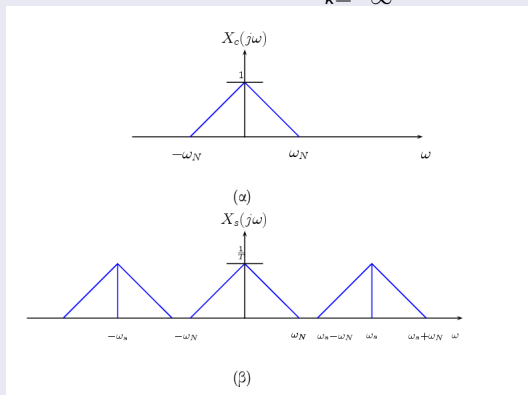
$$x_s(t) = x_c(t) s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT). \quad (3)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (3)

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X_c * S](j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s). \quad (4)$$





## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (4)

- Αν το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  ήταν κατωδιαβατό με ανώτερη συχνότητα  $\omega_N$ , τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μετά τη δειγματοληψία είναι περιοδική επανάληψη του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος με περίοδο  $\omega_s$  κλιμακώμενος κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$ .

- Για να αποφευχθεί επικάλυψη μεταξύ δύο επαναλήψεων του αρχικού φάσματος αρκεί

$$\omega_N \leq \omega_s - \omega_N \iff \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (5)$$

- Η μικρότερη επιτρεπτή συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 2\omega_N$  καλείται **συχνότητα Nyquist**. Όταν ισχύει η (5) το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  μπορεί να ανακτηθεί, επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των φασματικών συνιστωσών.

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (4)

- Αν το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  ήταν κατωδιαβατό με ανώτερη συχνότητα  $\omega_N$ , τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μετά τη δειγματοληψία είναι περιοδική επανάληψη του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος με περίοδο  $\omega_s$  κλιμακώμενος κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$ .
- Για να αποφευχθεί επικάλυψη μεταξύ δύο επαναλήψεων του αρχικού φάσματος αρκεί

$$\omega_N \leq \omega_s - \omega_N \iff \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (5)$$

- Η μικρότερη επιτρεπτή συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 2\omega_N$  καλείται **συχνότητα Nyquist**. Όταν ισχύει η (5) το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  μπορεί να ανακτηθεί, επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των φασματικών συνιστωσών.

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (4)

- Αν το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  ήταν κατωδιαβατό με ανώτερη συχνότητα  $\omega_N$ , τότε ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μετά τη δειγματοληψία είναι περιοδική επανάληψη του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος με περίοδο  $\omega_s$  κλιμακώμενος κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$ .
- Για να αποφευχθεί επικάλυψη μεταξύ δύο επαναλήψεων του αρχικού φάσματος αρκεί

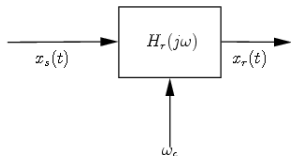
$$\omega_N \leq \omega_s - \omega_N \iff \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (5)$$

- Η μικρότερη επιτρεπτή συχνότητα δειγματοληψίας  $\omega_s = 2\omega_N$  καλείται **συχνότητα Nyquist**. Όταν ισχύει η (5) το αρχικό σήμα  $x_c(t)$  μπορεί να ανακτηθεί, επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των φασματικών συνιστωσών.

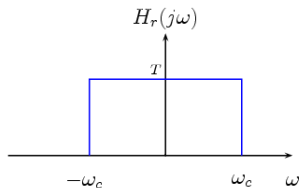
# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (5)

Για την ανάκτηση του σήματος Σ.Χ. από το τρένο των κρουστικών παλμών  $x_s(t)$  αρκεί να τροφοδοτήσουμε το  $x_s(t)$  σ' ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο  $H_r(j\omega)$  με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$ .



(α)



(β)

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (5)

- Για να αντισταθίσουμε τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$  που είναι εγγενής στη διαδικασία της δειγματοληψίας αρκεί το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο να έχει πλάτος  $T$  στη ζώνη διάβασης του πεδίου της συχνότητας αντί μοναδιαίο. Επιθυμούμε

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) = X_c(j\omega) \quad (6)$$

- άρα πρέπει να εκλέξουμε τη συχνότητα αποκοπής έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N, \quad \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (7)$$

- Αν  $\omega_s > 2\omega_N$ , τότε έχουμε ευελιξία να επιλέξουμε μια συχνότητα αποκοπής με μη-μηδενικό εύρος ζώνης μετάβασης. Το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο, γιατί έχει απότομη μετάβαση από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη αποκοπής. Τα υλοποιήσιμα κατωδιαβατά φίλτρα παρεμβάλλουν μια ζώνη μετάβασης μεταξύ των δύο προηγούμενων ζωνών επιτυγχάνοντας μια ομαλή βαθμιαία μετάβαση.

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (5)

- Για να αντισταθίσουμε τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$  που είναι εγγενής στη διαδικασία της δειγματοληψίας αρκεί το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο να έχει πλάτος  $T$  στη ζώνη διάβασης του πεδίου της συχνότητας αντί μοναδιαίο. Επιθυμούμε

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) = X_c(j\omega) \quad (6)$$

- άρα πρέπει να εκλέξουμε τη συχνότητα αποκοπής έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N, \quad \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (7)$$

- Αν  $\omega_s > 2\omega_N$ , τότε έχουμε ευελιξία να επιλέξουμε μια συχνότητα αποκοπής με μη-μηδενικό εύρος ζώνης μετάβασης. Το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο, γιατί έχει απότομη μετάβαση από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη αποκοπής. Τα υλοποιήσιμα κατωδιαβατά φίλτρα παρεμβάλλουν μια ζώνη μετάβασης μεταξύ των δύο προηγούμενων ζωνών επιτυγχάνοντας μια ομαλή βαθμιαία μετάβαση.

## Σύστημα μετατροπής Σ.Χ. σε Δ.Χ. (5)

- Για να αντισταθμίσουμε τον παράγοντα  $\frac{1}{T}$  που είναι εγγενής στη διαδικασία της δειγματοληψίας αρκεί το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο να έχει πλάτος  $T$  στη ζώνη διάβασης του πεδίου της συχνότητας αντί μοναδιαίο. Επιθυμούμε

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) = X_c(j\omega) \quad (6)$$

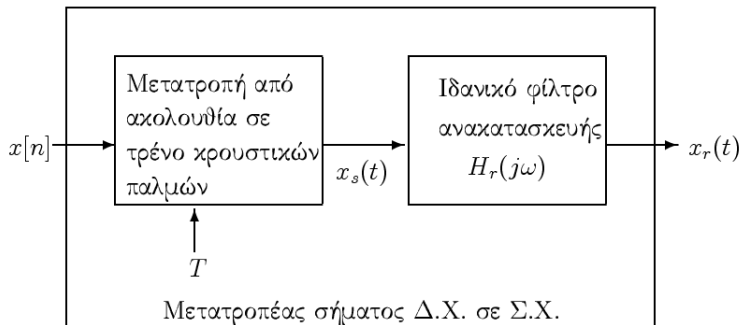
- άρα πρέπει να εκλέξουμε τη συχνότητα αποκοπής έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\omega_N < \omega_c < \omega_s - \omega_N, \quad \omega_s \geq 2\omega_N. \quad (7)$$

- Αν  $\omega_s > 2\omega_N$ , τότε έχουμε ευελιξία να επιλέξουμε μια συχνότητα αποκοπής με μη-μηδενικό εύρος ζώνης μετάβασης. Το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο, γιατί έχει απότομη μετάβαση από τη ζώνη διάβασης στη ζώνη αποκοπής. Τα υλοποιήσιμα κατωδιαβατά φίλτρα παρεμβάλλουν μια ζώνη μετάβασης μεταξύ των δύο προηγούμενων ζωνών επιτυγχάνοντας μια ομαλή βαθμιαία μετάβαση.

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου (1)





# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου (2)

- Το θεώρημα του Shannon εγγυάται την ανακατασκευή ενός ζωνοπερατού (bandlimited) σήματος από τα δείγματά του.
- Ζωνοπερατά σήματα είναι προφανώς τα κατωδιαβατά και τα ζωνοδιαβατά σήματα. Στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ένα κατωδιαβατό σήμα. Ένα οποιοδήποτε ζωνοδιαβατό σήμα μπορεί να αναχθεί σε κατωδιαβατό (ή σήμα βασικής ζώνης) με μία απλή αποδιαμόρφωση.
- Επειδή  $x[n] = x_s(nT)$ , από την (3) προκύπτει

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (8)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου (2)

- Το θεώρημα του Shannon εγγυάται την ανακατασκευή ενός ζωνοπερατού (bandlimited) σήματος από τα δείγματά του.
- **Ζωνοπερατά σήματα** είναι προφανώς τα κατωδιαβατά και τα ζωνοδιαβατά σήματα. Στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ένα κατωδιαβατό σήμα. Ένα οποιοδήποτε ζωνοδιαβατό σήμα μπορεί να αναχθεί σε κατωδιαβατό (ή σήμα βασικής ζώνης) με μιά απλή αποδιαμόρφωση.
- Επειδή  $x[n] = x_s(nT)$ , από την (3) προκύπτει

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (8)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

## Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου (2)

- Το θεώρημα του Shannon εγγυάται την ανακατασκευή ενός ζωνοπερατού (bandlimited) σήματος από τα δείγματά του.
- **Ζωνοπερατά σήματα** είναι προφανώς τα κατωδιαβατά και τα ζωνοδιαβατά σήματα. Στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ένα κατωδιαβατό σήμα. Ένα οποιοδήποτε ζωνοδιαβατό σήμα μπορεί να αναχθεί σε κατωδιαβατό (ή σήμα βασικής ζώνης) με μιά απλή αποδιαμόρφωση.
- Επειδή  $x[n] = x_s(nT)$ , από την (3) προκύπτει

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (8)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(3)

τότε το ανακατασκευασμένο σήμα προκύπτει ως

$$\begin{aligned}x_r(t) &= [x_s * h_r](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\lambda) h_r(t - \lambda) d\lambda \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(\lambda - nT) \right] h_r(t - \lambda) d\lambda \\&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} h_r(t - \lambda) \delta(\lambda - nT) d\lambda \\&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h_r(t - nT).\end{aligned}\tag{9}$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(4)

- Αλλά το φίλτρο ανακατασκευής είναι το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$  και μέτρο  $T$ . Αν εκλέξω ως  $\omega_s$  τη συχνότητα Nyquist και

$$\omega_c = \omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (10)$$

• τότε

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \cos \omega t d\omega = \frac{2T}{2\pi t} \int_0^{\frac{\pi}{T}} \cos \psi d\psi \\ &= \frac{1}{\frac{\pi t}{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}. \end{aligned} \quad (11)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος  $\Sigma.X.$  από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(4)

- Αλλά το φίλτρο ανακατασκευής είναι το ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$  και μέτρο  $T$ . Αν εκλέξω ως  $\omega_s$  τη συχνότητα Nyquist και

$$\omega_c = \omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (10)$$

- τότε

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \cos \omega t d\omega = \frac{2T}{2\pi t} \int_0^{\frac{\pi t}{T}} \cos \psi d\psi \\ &= \frac{1}{\frac{\pi t}{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}. \end{aligned} \quad (11)$$

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(5)

- Αντικαθιστώντας την (11) στην (9) προκύπτει

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}{\pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}. \quad (12)$$

- Παρατηρούμε ότι η σχέση ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του δεν είναι παρά μια σχέση παρεμβολής (interpolation) με πυρήνα (kernel)  $h_r(t)$  τη συνάρτηση  $\text{sinc}()$
- Παρατηρούμε ότι  $h_r(0) = 1$ , ενώ  $h_r(nT) = 0$  για  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Άρα  $x_r(mT) = x_c(mT)$ .
- Αν το σήμα  $x_c(t)$  δεν είναι ζωνοπερατό μπορεί να γίνει τέτοιο αν φιλτραριστεί μ' ένα κατωδιαβατό φίλτρο που θα διατηρήσει το συχνοτικό περιεχόμενο ως τη συχνότητα  $\omega_N$ .

Συνάρτηση  $h_r(t)$ .

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος Σ.Χ. από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(5)

- Αντικαθιστώντας την (11) στην (9) προκύπτει

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}{\pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}. \quad (12)$$

- Παρατηρούμε ότι η σχέση ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του δεν είναι παρά μια σχέση **παρεμβολής** (interpolation) με πυρήνα (kernel)  $h_r(t)$  τη συνάρτηση  $\text{sinc}()$

• Παρατηρούμε ότι  $h_r(0) = 1$ , ενώ  $h_r(nT) = 0$  για  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Άρα  $x_r(mT) = x_c(mT)$ .

• Αν το σήμα  $x_c(t)$  δεν είναι ζωνοπερατό μπορεί να γίνει τέτοιο αν φιλτραριστεί μ' ένα κατωδιαβατό φίλτρο που θα διατηρήσει το συχνοτικό περιεχόμενο ως τη συχνότητα  $\omega_N$ .

Συνάρτηση  $h_r(t)$ .



# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος  $\Sigma.X.$  από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(5)

- Αντικαθιστώντας την (11) στην (9) προκύπτει

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}{\pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}. \quad (12)$$

- Παρατηρούμε ότι η σχέση ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του δεν είναι παρά μια σχέση **παρεμβολής** (interpolation) με πυρήνα (kernel)  $h_r(t)$  τη συνάρτηση  $\text{sinc}()$
- Παρατηρούμε ότι  $h_r(0) = 1$ , ενώ  $h_r(nT) = 0$  για  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Άρα  $x_r(mT) = x_c(mT)$ .

- Αν το σήμα  $x_c(t)$  δεν είναι ζωνοπερατό μπορεί να γίνει τέτοιο αν φιλτραριστεί μ' ένα κατωδιαβατό φίλτρο που θα διατηρήσει το συχνοτικό περιεχόμενο ως τη συχνότητα  $\omega_N$ .

Συνάρτηση  $h_r(t)$ .

# Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon

Ανακατασκευή σήματος  $\Sigma.X.$  από τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου  
(5)

- Αντικαθιστώντας την (11) στην (9) προκύπτει

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin \pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}{\pi \left( \frac{t-nT}{T} \right)}. \quad (12)$$

- Παρατηρούμε ότι η σχέση ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του δεν είναι παρά μια σχέση **παρεμβολής** (interpolation) με πυρήνα (kernel)  $h_r(t)$  τη συνάρτηση  $\text{sinc}()$
- Παρατηρούμε ότι  $h_r(0) = 1$ , ενώ  $h_r(nT) = 0$  για  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Άρα  $x_r(mT) = x_c(mT)$ .
- Αν το σήμα  $x_c(t)$  δεν είναι ζωνοπερατό μπορεί να γίνει τέτοιο αν φιλτραριστεί μ' ένα κατωδιαβατό φίλτρο που θα διατηρήσει το συχνотικό περιεχόμενο ως τη συχνότητα  $\omega_N$ .

Συνάρτηση  $h_r(t)$ .

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (1)

- Τα δείγματα του αναλογικού σήματος  $x_c(nT)$  συγκροτούν μια ακολουθία, οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της ακολουθίας αυτής

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}, \quad x[n] = x_c(nT). \quad (13)$$

- Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] \\ &\quad e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega(nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\omega T)n}. \end{aligned} \quad (14)$$

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (1)

- Τα δείγματα του αναλογικού σήματος  $x_c(nT)$  συγκροτούν μια ακολουθία, οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της ακολουθίας αυτής

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}, \quad x[n] = x_c(nT). \quad (13)$$

- Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \right] \\ &\quad e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega(nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j(\omega T)n}. \end{aligned} \quad (14)$$

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (2)

- Από τις (13) και (14) έχουμε

$$X_s(j\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T} = X(e^{j\omega T}). \quad (15)$$

- Από την (4) και την (15) έχουμε

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s) \quad (16)$$

- ή

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}). \quad (17)$$

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (2)

- Από τις (13) και (14) έχουμε

$$X_s(j\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T} = X(e^{j\omega T}). \quad (15)$$

- Από την (4) και την (15) έχουμε

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s) \quad (16)$$

- ή

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}). \quad (17)$$

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (2)

- Από τις (13) και (14) έχουμε

$$X_s(j\omega) = X(\Omega)|_{\Omega=\omega T} = X(e^{j\omega T}). \quad (15)$$

- Από την (4) και την (15) έχουμε

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s) \quad (16)$$

- ή

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}). \quad (17)$$

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (3)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι απλώς μια **κλιμακωμένη ως προς τη συχνότητα παραλλαγή του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.** Η σχέση κλιμάκωσης (μετασχηματισμός ανεξάρτητης μεταβλητής) είναι

$$\Omega = \omega T. \quad (18)$$

- Η (18) μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση του

$$\omega : [0, \omega_s) \longrightarrow \Omega [0, 2\pi) \quad (19)$$

- Από την (16) αν εκλέξουμε διάστημα μιας περιόδου  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ , τότε

$$X_c(j\omega) = T X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (20)$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.



# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (3)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι απλώς μια **κλιμακωμένη ως προς τη συχνότητα παραλλαγή του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.** Η σχέση κλιμάκωσης (μετασχηματισμός ανεξάρτητης μεταβλητής) είναι

$$\Omega = \omega T. \quad (18)$$

- Η (18) μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση του

$$\omega : [0, \omega_s) \longrightarrow \Omega [0, 2\pi) \quad (19)$$

- Από την (16) αν εκλέξουμε διάστημα μιας περιόδου  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ , τότε

$$X_c(j\omega) = T X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (20)$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμοί Fourier Σ.Χ. και Δ.Χ. (3)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. είναι απλώς μια **κλιμακωμένη ως προς τη συχνότητα παραλλαγή του μετασχηματισμού Fourier Σ.Χ.** Η σχέση κλιμάκωσης (μετασχηματισμός ανεξάρτητης μεταβλητής) είναι

$$\Omega = \omega T. \quad (18)$$

- Η (18) μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση του

$$\omega : [0, \omega_s) \longrightarrow \Omega [0, 2\pi) \quad (19)$$

- Από την (16) αν εκλέξουμε διάστημα μιας περιόδου  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$ , τότε

$$X_c(j\omega) = T X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (20)$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ας θεωρήσουμε ότι η ακολουθία  $x[n] = x_c(nT)$  είναι χρονοπερατή, δηλαδή ορίζεται για  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Τότε

$$X_c(j\omega) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\omega T n}. \quad (21)$$

- Υποβάλλουμε σε ομοιόμορφη δειγματοληψία ως προς  $\omega$  το διάστημα  $[0, \omega_s)$  παίρνοντας  $N$  δείγματα. Τότε για  $\omega = \omega_k$  όπου

$$\omega_k = k \Delta\omega_s = (2\pi \Delta f_s) = k 2\pi \frac{f_s}{N}$$

με  $f_s = \frac{1}{T}$  παίρνουμε

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ας θεωρήσουμε ότι η ακολουθία  $x[n] = x_c(nT)$  είναι χρονοπερατή, δηλαδή ορίζεται για  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Τότε

$$X_c(j\omega) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\omega T n}. \quad (21)$$

- Υποβάλλουμε σε ομοιόμορφη δειγματοληψία ως προς  $\omega$  το διάστημα  $[0, \omega_s)$  παίρνοντας  $N$  δείγματα. Τότε για  $\omega = \omega_k$  όπου

$$\omega_k = k \Delta\omega_s = (2\pi \Delta f_s) = k 2\pi \frac{f_s}{N}$$

με  $f_s = \frac{1}{T}$  παίρνουμε

# Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier

## Μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ. και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2)

$$\begin{aligned}X_c(j\omega_k) &= T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j(k\Delta\omega_s)Tn} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi \frac{f_s}{N} nT} \\&= T \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}}_{N \times \text{DFT}\{x[n]\}_k} = NT X[k]\end{aligned}\quad (22)$$

όπου  $NT$  είναι η συνολική χρονική διάρκεια του σήματος.

## Συμπέρασμα

Επομένως δικαιολογείται η αρχική ρήση περί μεθόδου (μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ.) και αλγορίθμων (μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. - διακριτός μετασχηματισμός Fourier).

## Παράδειγμα 9.1

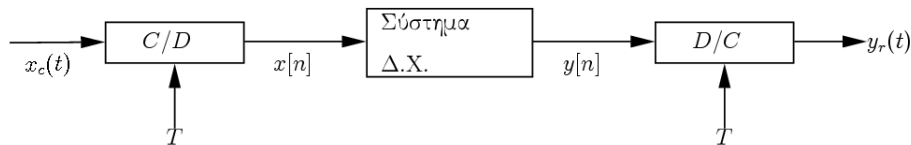
Αν εφαρμόσουμε την ανάλυση που προηγήθηκε στην περίπτωση της ανακατασκευής ενός ζωνοπερατού σήματος από τα δείγματά του. Στο φάσμα έχουμε:

$$\begin{aligned} X_r(j\omega) &= H_r(j\omega)X_s(j\omega) = H_r(j\omega) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega T n} \right] = H_r(j\omega)X(e^{j\omega T}) \\ &= T X_s(j\omega) = T \frac{1}{T} X_c(j\omega) \end{aligned}$$

όπου  $X(e^{j\omega T})$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της ακολουθίας  $x[n]$ .

## Επεξεργασία Δ.Χ. των σημάτων Σ.Χ.

### Επεξεργασία σημάτων Σ.Χ. με χρήση συστήματος Δ.Χ.



## Γνωστές μαθηματικές περιγραφές

- της εισόδου στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, από τη μετατροπή σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ.

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (23)$$

- της εξόδου από την ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(\frac{t-nT}{T})]}{\pi(\frac{t-nT}{T})} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y_r(j\omega) = H_r(j\omega) Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} T Y(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (24)$$

- όπου  $Y_r(j\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_r(t)$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ.) και  $Y(e^{j\omega T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.).



## Γνωστές μαθηματικές περιγραφές

- της εισόδου στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, από τη μετατροπή σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ.

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (23)$$

- της εξόδου από την ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(\frac{t-nT}{T})]}{\pi(\frac{t-nT}{T})} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ Y_r(j\omega) &= H_r(j\omega)Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} T Y(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

- όπου  $Y_r(j\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_r(t)$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ.) και  $Y(e^{j\omega T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.).

## Γνωστές μαθηματικές περιγραφές

- της εισόδου στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, από τη μετατροπή σήματος Σ.Χ. σε σήμα Δ.Χ.

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\frac{\Omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (23)$$

- της εξόδου από την ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(\frac{t-nT}{T})]}{\pi(\frac{t-nT}{T})} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ Y_r(j\omega) &= H_r(j\omega)Y(e^{j\omega T}) = \begin{cases} T Y(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

- όπου  $Y_r(j\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_r(t)$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Σ.Χ.) και  $Y(e^{j\omega T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$  (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ.).

## Συσχέτιση μεταξύ $y[n]$ και $x[n]$ (1)

- Επειδή το  $x_c(t)$  είναι ζωνοπερατό, κατ' απαίτηση του θεωρήματος δειγματοληψίας, έχουμε  $X_c(j\omega) = 0$ , για  $|\omega| > \frac{\pi}{T}$ .

• Για ένα γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$  άρα

$$\begin{aligned} Y_r(j\omega) &= H_r(j\omega) \underbrace{H(e^{j\omega T}) X(e^{j\omega T})}_{Y(e^{j\omega T})} \\ &= H_r(j\omega) H(e^{j\omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}) \\ &= \begin{cases} H(e^{j\omega T}) X_c(j\omega) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

## Συσχέτιση μεταξύ $y[n]$ και $x[n]$ (1)

- Επειδή το  $x_c(t)$  είναι ζωνοπερατό, κατ' απαίτηση του θεωρήματος δειγματοληψίας, έχουμε  $X_c(j\omega) = 0$ , για  $|\omega| > \frac{\pi}{T}$ .
- Για ένα γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου  $Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$  άρα

$$\begin{aligned} Y_r(j\omega) &= H_r(j\omega) \underbrace{H(e^{j\omega T}) X(e^{j\omega T})}_{Y(e^{j\omega T})} \\ &= H_r(j\omega) H(e^{j\omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}) \\ &= \begin{cases} H(e^{j\omega T}) X_c(j\omega) & \text{av } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{av } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

### Συσχέτιση μεταξύ $y[n]$ και $x[n]$ (2)

- δηλαδή

$$Y_r(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega) X_c(j\omega) \quad (26)$$

- όπου  $H_{\text{eff}}(j\omega)$  το ισοδύναμο σύστημα Σ.Χ. που ορίζεται ως

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (27)$$

- Η (27) υποδεικνύει μία μέθοδο για τη μετατροπή μιας αναλογικής σχεδίασης σε ψηφιακή, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουσικής απόκρισης (impulse-invariance).

## Συσχέτιση μεταξύ $y[n]$ και $x[n]$ (2)

- δηλαδή

$$Y_r(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega) X_c(j\omega) \quad (26)$$

- όπου  $H_{\text{eff}}(j\omega)$  το ισοδύναμο σύστημα Σ.Χ. που ορίζεται ως

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (27)$$

- Η (27) υποδεικνύει μία μέθοδο για τη μετατροπή μιας αναλογικής σχεδίασης σε ψηφιακή, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουσικής απόκρισης (impulse-invariance).

### Συσχέτιση μεταξύ $y[n]$ και $x[n]$ (2)

- δηλαδή

$$Y_r(j\omega) = H_{\text{eff}}(j\omega) X_c(j\omega) \quad (26)$$

- όπου  $H_{\text{eff}}(j\omega)$  το ισοδύναμο σύστημα Σ.Χ. που ορίζεται ως

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega T}) & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| > \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (27)$$

- Η (27) υποδεικνύει μία μέθοδο για τη μετατροπή μιας αναλογικής σχεδίασης σε ψηφιακή, τη μέθοδο της **αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης** (impulse-invariance).

## Παράδειγμα 9.2 (1)

- Για να σχεδιάσουμε ένα **ιδανικό ζωνοπερατό διαφοριστή** ξεκινούμε από την ιδιότητα της διαφορίσης του μετασχηματισμού Fourier. Ένας διαφοριστής είναι σύστημα Σ.Χ. με σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t) \quad (28)$$

- και απόκριση συχνότητας  $H_c(j\omega) = j\omega$ .
- Για ζωνοπερατή είσοδο εφαρμόζοντας την (27) προκύπτει

$$H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} j\omega & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (29)$$

μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του ισοδύναμου συστήματος Σ.Χ.



## Παράδειγμα 9.2 (1)

- Για να σχεδιάσουμε ένα **ιδανικό ζωνοπερατό διαφοριστή** ξεκινούμε από την ιδιότητα της διαφορίσης του μετασχηματισμού Fourier. Ένας διαφοριστής είναι σύστημα Σ.Χ. με σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t) \quad (28)$$

- και απόκριση συχνότητας  $H_c(j\omega) = j\omega$ .

• Για ζωνοπερατή είσοδο εφαρμόζοντας την (27) προκύπτει

$$H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} j\omega & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (29)$$

μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του ισοδύναμου συστήματος Σ.Χ.

## Παράδειγμα 9.2 (1)

- Για να σχεδιάσουμε ένα **ιδανικό ζωνοπερατό διαφοριστή** ξεκινούμε από την ιδιότητα της διαφορίσης του μετασχηματισμού Fourier. Ένας διαφοριστής είναι σύστημα Σ.Χ. με σχέση εισόδου-εξόδου

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t) \quad (28)$$

- και απόκριση συχνότητας  $H_c(j\omega) = j\omega$ .
- Για ζωνοπερατή είσοδο εφαρμόζοντας την (27) προκύπτει

$$H_{\text{eff}}(j\omega) = \begin{cases} j\omega & \text{αν } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{αν } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}. \end{cases} \quad (29)$$

μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του ισοδύναμου συστήματος Σ.Χ.

## Παράδειγμα 9.2 (2)

- Το αντίστοιχο σύστημα διακριτού χρόνου έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{j\Omega}{T}, \quad |\Omega| < \pi. \quad (30)$$

- Η απόκριση συχνότητας είναι τώρα περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$ .  
Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{αν } 0 < \Omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } -\pi < \Omega < 0. \end{cases} \quad (31)$$

- Η κρουστική του απόκριση του διαφοριστή διακριτού χρόνου είναι:

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T} = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & \text{αν } n \neq 0. \end{cases} \quad (32)$$

μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του διαφοριστή Δ.Χ.

## Παράδειγμα 9.2 (2)

- Το αντίστοιχο σύστημα διακριτού χρόνου έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{j\Omega}{T}, \quad |\Omega| < \pi. \quad (30)$$

- Η απόκριση συχνότητας είναι τώρα περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$ .  
Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{αν } 0 < \Omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } -\pi < \Omega < 0. \end{cases} \quad (31)$$

- Η κρουστική του απόκριση του διαφοριστή διακριτού χρόνου είναι:

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T} = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & \text{αν } n \neq 0. \end{cases} \quad (32)$$

## Παράδειγμα 9.2 (2)

- Το αντίστοιχο σύστημα διακριτού χρόνου έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{j\Omega}{T}, \quad |\Omega| < \pi. \quad (30)$$

- Η απόκριση συχνότητας είναι τώρα περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$ .  
Η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{αν } 0 < \Omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } -\pi < \Omega < 0. \end{cases} \quad (31)$$

- Η κρουστική του απόκριση του διαφοριστή διακριτού χρόνου είναι:

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T} = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\cos \pi n}{nT} & \text{αν } n \neq 0. \end{cases} \quad (32)$$



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

