



# Γενικά Μαθηματικά II

Ενότητα 1<sup>η</sup> : Μαθηματικά και Φυσική

Λουκάς Βλάχος  
Καθηγητής Αστροφυσικής  
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σκοποί μαθήματος

1. Η εξοικείωση με το λογισμό των μεταβολών σε περισσότερες διαστάσεις
2. Η άνετη χρήση του διανυσματικού λογισμού και των μετασχηματισμών συστημάτων συντεταγμένων
3. Η σύνδεση του διαφορικού λογισμού πολλών μεταβλητών με φυσικά προβλήματα



# Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή προσπαθούμε να τοποθετήσουμε τα μαθηματικά στο γενικότερο πλαίσιο της συνολικής μόρφωσης του σύγχρονου φυσικού, και να περιγράψουμε σύντομα την ύλη του μαθήματος.



# Περιεχόμενα ενότητας

---

1. Η σχέση των Μαθηματικών με τη Φυσική
2. Οι βασικοί νόμοι της φύσης είναι γραμμένοι με μαθηματικά
3. Η ομορφιά των προσεγγίσεων





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Η σχέση των Μαθηματικών με τη Φυσική

# Εισαγωγή 1/2

- Η φυσική και τα μαθηματικά συνεργάζονται στενά, θα μπορούσε να πει κανένας ότι θα ήταν αδύνατη η διατύπωση των βασικών νόμων της φύσης χωρίς να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά.
- Για να μελετήσει τη φύση ο φυσικός έχει δύο εργαλεία (1) τα **πειράματα** και τις **παρατηρήσεις** (2) τη **μαθηματική σκέψη** .





# Εισαγωγή 2/2

- Ο τρόπος σκέψης του μαθηματικού παρουσιάζει μεγάλες διαφορές από τη σκέψη του φυσικού. Η σημαντικότερη διαφορά είναι στο ότι ο φυσικός μιλάει για συγκεκριμένες ποσότητες που περιγράφουν τη φύση, ενώ ο μαθηματικός για γενικές και αφηρημένες παραμέτρους που ακολουθούν μια αλληλουχία, αξιώματα και θεωρήματα.
- Ο μαθηματικός αναζητά γενικές και ακριβείς λύσεις και με αυτό περιορίζει το εύρος του ερευνητικού του πεδίου ενώ ο φυσικός και ο αστροφυσικός είναι ικανοποιημένοι και με προσεγγιστικές λύσεις (θα το δούμε αυτό στη συνέχεια).



# Βασικοί νόμοι της Φύσης 1/5

Στη μελέτη της κίνησης των μαζών τα πεδία δυνάμεων (Κλασική Μηχανική) και ο νόμος της παγκόσμιας έλξης (Newton) .

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{e}_r$$

Ο Νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα γενικεύεται όταν η ταχύτητα των σωμάτων πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός από την Ειδική θεωρία της σχετικότητας από τον *Einstein* και στη συνέχεια ο ίδιος γενικεύει τη θεωρία του Νεύτωνα με την εξίσωση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας όταν η πυκνότητα μάζας και ενέργειας είναι πολύ ισχυρές.



# Βασικοί νόμοι της Φύσης 2/5

Στη μελέτη της ρευστομηχανικής η εξίσωση κίνησης του ρευστού

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla P + \vec{F}$$

Όπου  $\rho(\vec{r}, t)$  είναι η πυκνότητα το ρευστού,  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  είναι η ταχύτητα του ρευστού,  $P(\vec{r}, t)$  η πίεση και  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  η δύναμη.



# Βασικοί νόμοι της Φύσης 3/5

Στη μελέτη του Ηλεκτρομαγνητισμού οι εξισώσεις *Maxwell*.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$



# Βασικοί νόμοι της Φύσης 4/5

Στη μελέτη της στατιστικής μηχανικής και Θερμοδυναμικής.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \vec{F} \cdot \nabla_v f = 0$$

και ο περίφημος δεύτερος νόμος της Θερμοδυναμικής.

$$\Delta s = \frac{\nabla Q}{T}$$



# Βασικοί νόμοι της Φύσης 5/5

Στη μελέτη της κβαντομηχανικής και την εξίσωση του *Schrodinger* .

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Η ομορφιά των προσεγγίσεων

# Η τέχνη των προσεγγίσεων και τα προβλήματα *Fermi*

Ως λέκτορας, ο Enrico Fermi προκαλούσε με τα προβλήματα στις διαλέξεις του, που εκ πρώτης όψεως, φαινόταν αδύνατα να επιλυθούν. Ένα τέτοιο πρόβλημα ήταν η εκτίμηση του αριθμού των επισκευαστών πιάνου στο Σικάγο δίνοντας μόνο τον πληθυσμό της πόλης. Όταν η τάξη του επέστρεψε ένα κενό βλέμμα, αυτός προχώρησε προς την εξής κατεύθυνση: Από το εορτολόγιο, γνωρίζουμε ότι το Σικάγο έχει πληθυσμό περίπου 3 εκατομμύρια ανθρώπους. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι μια μέση οικογένεια έχει τέσσερα μέλη, τότε ο αριθμός των οικογενειών στο Σικάγο θα πρέπει να είναι περίπου 750.000. Αν μια στις πέντε οικογένειες έχει πιάνο, θα υπάρχουν 150.000 πιάνο στο Σικάγο. Αν ο μέσος επισκευαστής εξυπηρετεί τέσσερα πιάνο κάθε μέρα της εβδομάδας για πέντε ημέρες, και έκανε διακοπές μόνο δύο εβδομάδες κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, τότε μέσα σε ένα έτος (52 εβδομάδες) θα εξυπηρετήσει 1.000 πιάνο.  $150.000 / (4 \times 5 \times 50) = 150$ , έτσι εκτιμάται ότι πρέπει να υπάρχουν περίπου 150 επισκευαστές στο Σικάγο!





# Αριστοτέλης

---

**Είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα μορφωμένο άτομο να μελετήσει τη φύση με την ακρίβεια που του επιτρέπει το φαινόμενο που μελετά και να μην αναζητήσει ακριβείς λύσεις όταν μόνο η προσέγγιση στην αλήθεια είναι δυνατή.**



# Πόσα αστέρια έχει ο γαλαξίας της Ανδρομέδας;

- Η απόσταση  $d$  του γαλαξία της Ανδρομέδας από τη Γη είναι  $2.4 \times 10^9 \text{ km}$
- Η λαμπρότητα (ενέργεια που δεχόμαστε από το Γαλαξία της Ανδρομέδας στην επιφάνεια της Γης)

$$\ell_a = L_a / (4\pi d^2)$$

και αν τη διαιρέσουμε με τη γνωστή λαμπρότητα που δεχόμαστε από τον Ήλιο

$$(\ell_a / \ell_{\odot}) = (L_a / L_{\odot})(d_{\odot} / d_a)^2 \rightarrow L_a = 2.6 \times 10^{10} L_{\odot}$$

- Η λαμπρότητα του Ήλιου είναι  $\ell_{\odot} = 1.3106 \text{ erg}/(\text{cm}^2 \text{sec})$  και βρίσκεται σε απόσταση από τη Γη.



# Πόσες τρίχες έχει το κεφάλι μας;

Αν θεωρήσουμε ότι το κεφάλι μας είναι μια 'σφαίρα' με ακτίνα  $r = 15 \text{ cm}$  και ότι σε κάθε τετραγωνικό εκατοστό έχουμε 80 τρίχες, και ότι το μισό είναι καλυμμένο από τρίχες, τότε ο συνολικός αριθμός θα είναι  $N = [(4\pi r^2)/2] \times 80 \approx 110.000$  τρίχες έχει το κεφάλι μας.



# Επίλογος

- Η στενή συνεργασία των μαθηματικών με τους φυσικούς έδωσε τεράστια ώθηση στην φυσική και την αστρονομία. Οι δύο επιστήμες διαφέρουν όμως πολύ γιατί η μια είναι γενική και αφηρημένη ενώ η άλλη αναλύει τον πραγματικό κόσμο.
- Οι βασικοί νόμοι της φύσης περιγράφονται με μαθηματικές εξισώσεις... η φύση είναι 'γραμμένη' με μαθηματικά.
- Είναι τεράστια η σημασία των προσεγγίσεων στην κατανόηση της φύσης.

Εάν σας ενδιαφέρει το θέμα αυτό, ακούστε μια ομιλία από τον Richard Feynman.

[www.youtube.com/watch?v=obCjODeoLVw](http://www.youtube.com/watch?v=obCjODeoLVw)





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία  
Θεσσαλονίκη, 2014

