ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 2η : Εισαγωγικές Έννοιες Ι

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή γίνεται μια προσπάθεια να ορίσουμε τη συνάρτηση πολλών μεταβλητών σε χώρους δυο ή περισσοτέρων διαστάσεων. Δίνουμε επίσης μερικά στοιχεία από τα σύνολα σημείων που είναι χρήσιμα για τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Εισαγωγικές Έννοιες
2. Σημεία και σύνολα σημείων στο επίπεδο και τον χώρο
3. Παραδείγματα

Εισαγωγικές Έννοιες

Εισαγωγικές Έννοιες

Είναι δύσκολο να περιγράψουμε ένα φυσικό φαινόμενο χωρίς τη βοήθεια των συναρτήσεων περισσοτέρων της μιας μεταβλητών.

- Το δυναμικό της βαρύτητας γύρω από ένα υλικό σημείο U(x, y, z)
- Η πίεση P(x, y, z) και η θερμοκρασία T(x, y, z) στην ατμόσφαιρα της Γης
- Η πυκνότητα (x, y, z) του αερίου μέσα σε ένα δοχείο

Τα παραπάνω είναι παραδείγματα φυσικών μεγεθών που περιγράφονται από πραγματικές συναρτήσεις πολλών πραγματικών μεταβλητών.

Ορισμός Ευκλείδειου Χώρου

Είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με την επιπλέον συνθήκη της απόστασης δύο σημείων A (x_1, x_2, x_3) και B (y_1, y_2, y_3) .

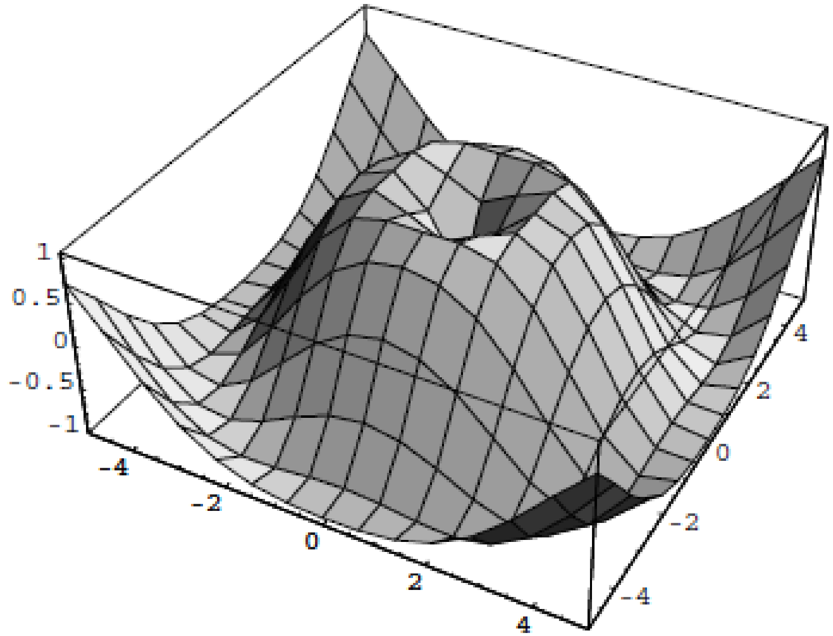
$$ds^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$$

- $\mathbb{R}^1 \longrightarrow$ ταυτίζεται με την ευθεία των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ ταυτίζεται με το επίπεδο Oxy, δηλαδή στο επίπεδο στο οποίο έχουμε εκλέξει ένα ορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων
- $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ ταυτίζεται με το χώρο Oxyz, δηλαδή το χώρο στον οποίο έχουμε εκλέξει ένα τρισορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.
- $\mathbb{R}^n$ $(n > 3) \longrightarrow$ δεν έχουμε γεωμετρική εποπτεία

Ερώτηση: Ποιους άλλους χώρους συναντάμε στη φυσική και γιατί;

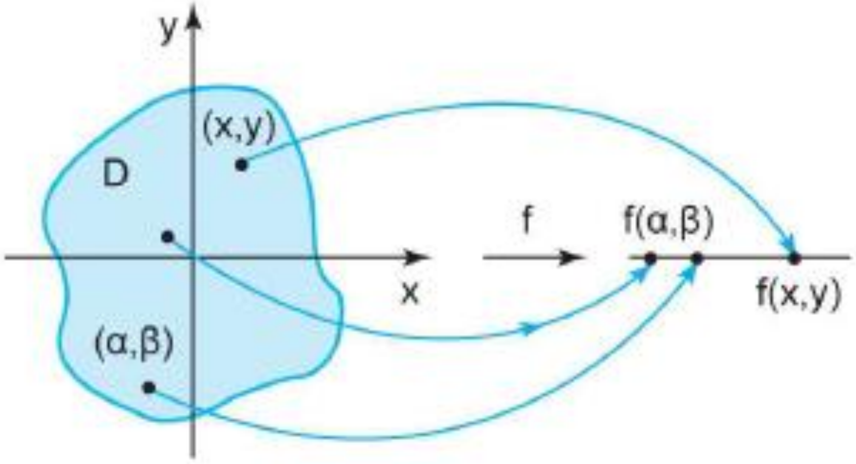
Βασικά μέρη της συνάρτησης πολλών μεταβλητών 1/3

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών $z = f(x, y)$



Βασικά μέρη της συνάρτησης πολλών μεταβλητών 2/3

- το πεδίο ορισμού αποτελεί μια συλλογή από σημεία $M_j(x, y)$ στο
- υποσύνολο D του R^2
- τον κανόνα με τον οποίο καθένα από τα σημεία αυτά αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό



Βασικά μέρη της συνάρτησης πολλών μεταβλητών 3/3

΄Ετσι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ έχει πεδίο ορισμού, D, το εσωτερικό και την περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 \leq 1$.

Είναι φανερό ότι, για κάθε τιμή των x, y στο εσωτερικό ή στην περιφέρεια του κύκλου η μεταβλητή z παίρνει **μια και μοναδική πραγματική τιμή**.

Για το λόγο αυτό οι μεταβλητές x, y λέγονται ανεξάρτητες και η μεταβλητή z λέγεται εξαρτημένη.

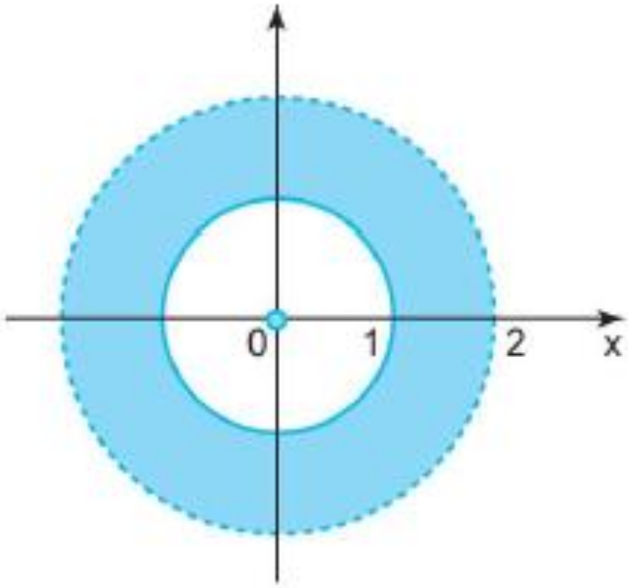
Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2} + \log(4 - x^2 - y^2) .$$

Απάντηση

Η συνάρτηση F(x, y) ορίζεται όταν $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ και $4 - x^2 - y^2 > 0$. Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 < 4\}$ δηλαδή το σύνολο των σημείων του επιπέδου μεταξύ των κύκλων $x^2 + y^2 \geq 1$ και $x^2 + y^2 < 4$.



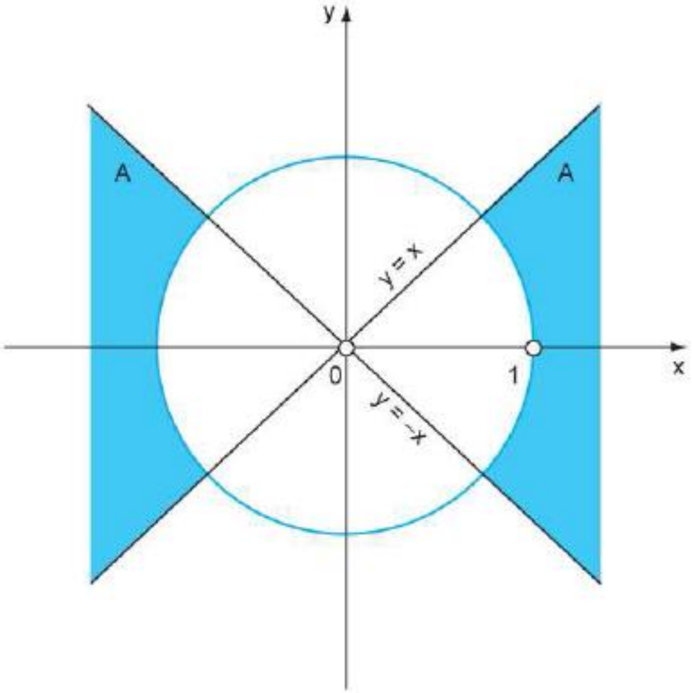
Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$G(x, y) = (x^2 - y^2)^{1/2} + (x^2 + y^2 - 1)^{1/2} .$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης G είναι το σύνολο $\{(x, y) : x^2 > y^2,$ και $x^2 + y^2 \geq 1\}$



Ορισμός Συνάρτησης Πολλών Μεταβλητών

ΟΡΙΣΜΟΣ : Αριθμητική συνάρτηση ή απλά συνάρτηση $f : D \longrightarrow E$, πολλών μεταβλητών, είναι μια μονότιμη απεικόνιση f ενός υποσυνόλου D του R^n σε ένα υποσύνολο E του R^1 και περιγράφεται συμβολικά από τη σχέση $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$.

Η n-άδα των πραγματικών αριθμών $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και το z είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

Σημεία και σύνολα σημείων στο επίπεδο και στο χώρο

Σημεία και σύνολα σημείων στο επίπεδο και στο χώρο

Αναφέραμε ήδη ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων P(x, y) και P′(x′, y′) στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ορίζεται από τη σχέση,

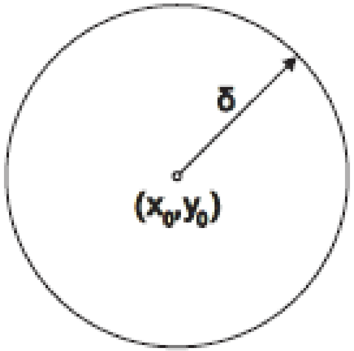
$$d(PP') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\,.$$

Με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης δύο σημείων, θα ορίσουμε στη συνέχεια τη **γειτονιά ή περιοχή σημείου**.

Κλειστά-Ανοικτά και συνοριακή περιοχή

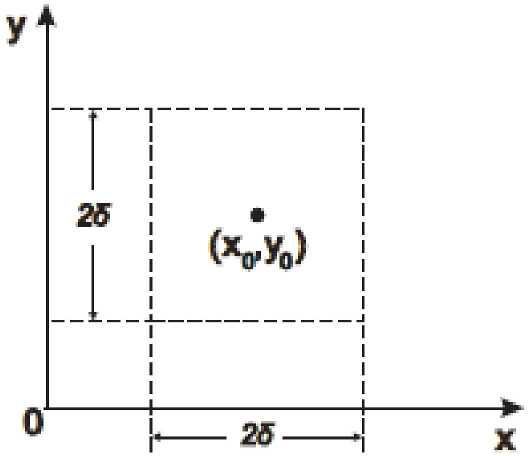
Θα χρειαστεί στη συνέχεια να ορίσουμε τα **κλειστά, τα ανοικτά σύνολα και τη συνοριακή περιοχή**. Ας αρχίσουμε με τον ορισμό της περιοχής σημείου (x_0, y_0).

ΟΡΙΣΜΟΣ : ΄Εστω $M_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο στον R^2 και ένας θετικός αριθμός, τότε ορίζουμε ως δ - κλειστή κυκλική περιοχή κλειστή κυκλική περιοχή του M_0 το σύνολο $\pi(M_0,\delta)$ = $\{(x, y) : \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \leq \delta\}$. Η περιοχή ($M_0$,) είναι τα σημεία του κύκλου και ο κυκλικός δίσκος που έχει κέντρο το σημείο M_0 και ακτίνα δ.



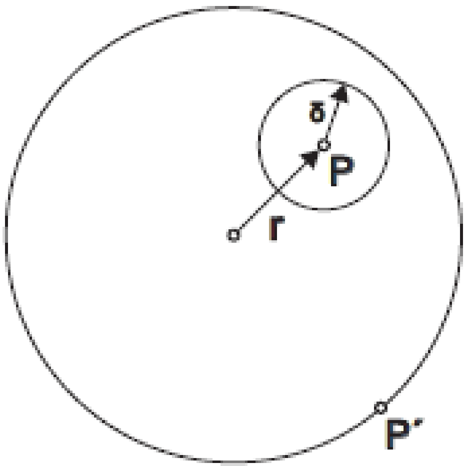
Τετραγωνική Περιοχή

Εκτός από την κυκλική περιοχή μπορούμε να δώσουμε και τον ορισμό της τετραγωνικής περιοχής $|x - x_0| \leq \delta$ και $|y - y_0| \leq \delta$.



Πότε ένα σύνολο σημείων είναι ανοικτό;

Ένα σύνολο σημείων D ονομάζεται **ανοικτό** όταν για κάθε σημείο του P υπάρχει μια κυκλική (ή τετραγωνική) ανοικτή περιοχή που ανήκει στο D.



ΟΡΙΣΜΟΣ : ΄Ενα σύνολο σημείων λέγεται **κλειστό**, όταν το **συμπληρωματικό** του C(D) = $\mathbb{R}^2 - D$ είναι ανοικτό.

Συνοριακό σημείο

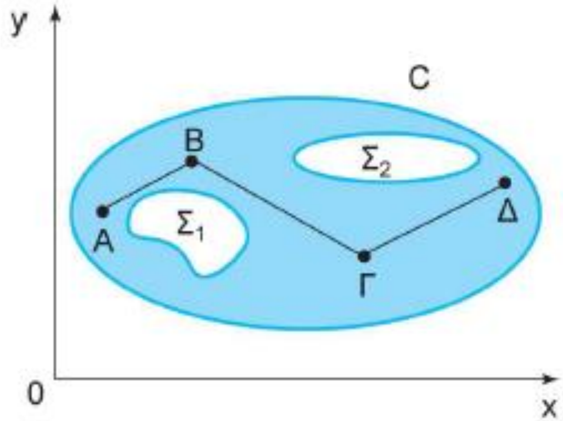
Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο στον ορισμό των συνόλων είναι το **συνοριακό σημείο .**

> **ΟΡΙΣΜΟΣ** : Εάν D είναι ένα σύνολο σημείων, το σημείο P′ λέγεται συνοριακό, όταν σε κάθε περιοχή του P′ περιέχονται τουλάχιστον ένα σημείο του D και ένα σημείο του C(D) .

Όλα τα συνοριακά σημεία ενός συνόλου D αποτελούν το σύνορο του D, που συμβολίζεται με B(D) ΄Ενα σημείο P του συνόλου σημείων D λέγεται **εσωτερικό**, εάν υπάρχει περιοχή του P που ανήκει εξ΄ ολοκλήρου στο D.

Εσωτερικό ενός συνόλου

Εσωτερικό ενός συνόλου είναι το σύνολο των εσωτερικών του σημείων, ενώ ένα σύνολο λέγεται **συναφές ή συνεκτικό** όταν δύο οποιαδήποτε σημεία του μπορούν να συνδεθούν με **πολυγωνική γραμμή**, όλα τα σημεία της οποίας ανήκουν στο σύνολο.



Στην ειδική περίπτωση που το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει οποιαδήποτε σημεία του συνόλου ανήκει ολοκληρωτικά στο σύνολο λέγεται **κυρτό**.

Φραγμένο-Συμπαγές Σύνολο

Ένα σύνολο λέγεται **φραγμένο** αν η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του είναι πεπερασμένος αριθμός και τέλος ένα υποσύνολο του R^2 λέγεται **συμπαγές**, αν είναι **κλειστό και φραγμένο.**

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f_1(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$,

ii) $f_2(x, y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$,

iii) $f_3(x, y) = \ln(y - x)$.

Λύσεις

(i) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, η συνάρτηση $f_1(x, y, z)$ παίρνει τη μορφή $f_1(r) = \ln(1 - r^2)$ και ορίζεται για $0 \leq r < 1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου ακτίνας $r = 1$.

(ii) Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι και η συνάρτηση f_2 έχει πεδίο ορισμού ολόκληρο το επίπεδο (xy) εκτός της περιφέρειας του κύκλου $r = 1$.

(iii) Για να ορίζεται η συνάρτηση f_3 θα πρέπει να ισχύει $y - x > 0$ δηλαδή $y > x$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_3 το αποτελούν όλα τα σημεία του ημιεπιπέδου πάνω από την ευθεία $y = x$.

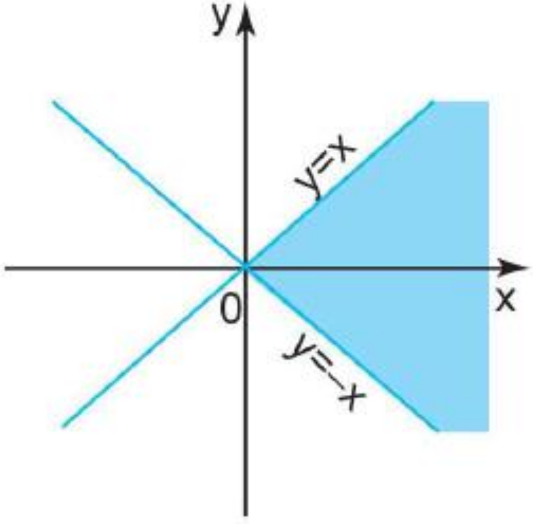
Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} + 2\,.$$

Απάντηση

Για να είναι η συνάρτηση $f(x, y)$ πραγματική θα πρέπει το $x - y > 0$ και $x + y > 0$, ή $x > y$ και $x > -y$. Το σύστημα των ανισώσεων μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο από τη γραμμοσκιασμένη περιοχή (χωρίς τα σημεία των ευθειών $x = y$ και $x = -y$).



Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{3-\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Λύση: Θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως $1 - z^2 \geq 0$ και $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή $z^2 \leq 1$ ή $-1 \leq z \leq 1$ και $r^2 \leq 4$. Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό και η επιφάνεια του κυλίνδρου με βάση τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ και ύψος 2.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x, y, z)= \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$$

Λύση: Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

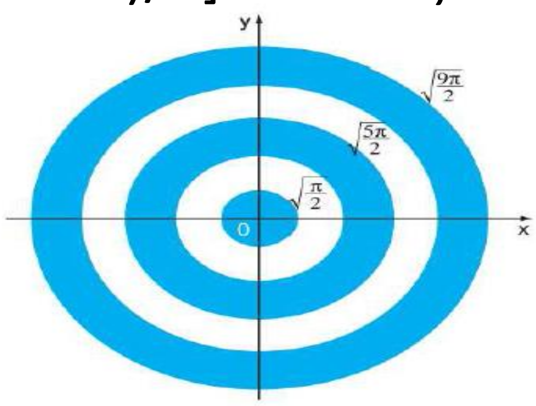
$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \text{ και } 1 \leq z \leq 1.$$

Έτσι τα σημεία (x, y, z) που ορίζεται η f είναι τα σημεία της επιφάνειας και του εσωτερικού ενός κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

Παράδειγμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$, να μελετηθεί και να σχεδιασθεί το πεδίο ορισμού της.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής αποτελείται από σημεία για τα οποία είναι $\cos(x^2 + y^2) \geq 0$, και $2k\pi - \pi/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2k\pi + \pi/2$, $k = 1, 2, ...$ Συνεπώς το πεδίο ορισμού της z αποτελείται από τον κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\sqrt{\pi/2}$ και τους δακτυλίους με εσωτερική ακτίνα $[\pi(4k - 1)/2]^{1/2}$ και εξωτερική $[\pi(4k + 1)/2]^{1/2}$, για $k = 0, 1, 2, ...$



Τί σπουδάιο είπαμε σήμερα!

- Ορίσαμε την πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών
- Μελετήσαμε το πεδίο ορισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών
- Ορίσαμε την περιοχή σημείου
- Παρουσιάσαμε μερικούς ορισμούς από τη θεωρία συνόλων (*ανοικτό/κλειστό σύνολο, συνοριακό σημείο, συμπληρωματικό σύνολο, συναφές/ κυρτό σύνολο, πεπερασμένο σύνολο, συμπαγές σύνολο*)

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 1
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. Κεφ. 9,10

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης