# Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

## Ενότητα 4η : Όρια και Συνέχεια

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Σκοποί ενότητας

Η επέκταση των εννοιών των ορίων και της συνέχειας που είναι γνωστές από τα Γενικά μαθηματικά 1 επιχειρείται στην ενότητα αυτή και δίνουμε και πολλά παραδείγματα. Είναι φανερό ότι το θέμα αυτό παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και χρειάζεται προσεκτική μελέτη και άσκηση από τους φοιτητές/τριες.

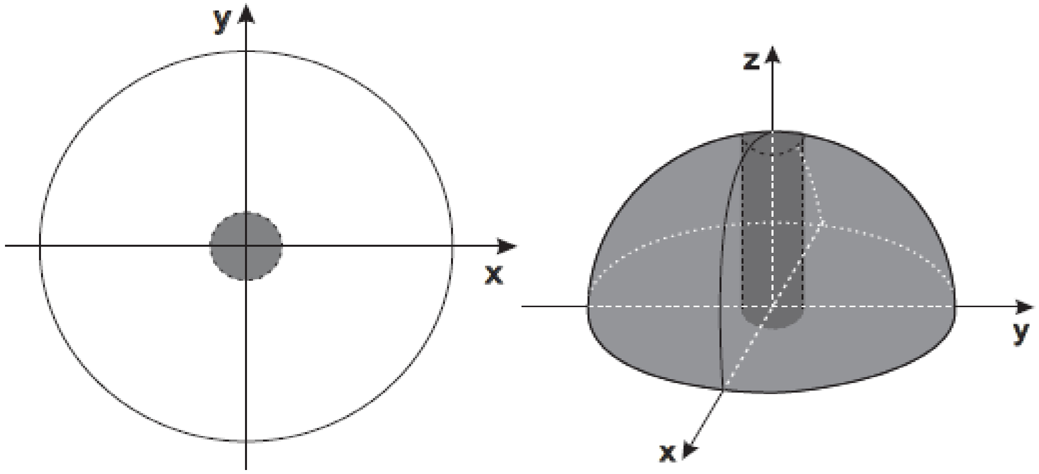
# Περιεχόμενα ενότητας

1. Όρια
2. Επαναλαμβανόμενα Όρια
3. Συνέχεια

# Όρια

# Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f(x, y) =$\sqrt{9-x^2-y^2}$ κοντά στην αρχή των αξόνων .




Μπορούμε να ξεκινήσουμε με τον ορισμό ενός κύκλου με ακτίνα δ και κέντρο την αρχή των αξόνων. Είναι φανερό ότι, η τιμή της συνάρτησης θα πλησιάζει το 3 (το όριο) με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια, όσο το δ πλησιάζει το μηδέν .

# Συνέχεια Παρ. 1

Συμβολικά μπορούμε να παραστήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με τη σχέση

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 3$$

Διότι σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου ισχύει ότι:

**ΟΡΙΣΜΟΣ** : Η συνάρτηση f(x, y) έχει όριο τον αριθμό k, όταν πλησιάζουμε το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ του πεδίου ορισμού της D, όταν για κάθε θετικό αριθμό ε, υπάρχει θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε για κάθε σημείο M(x, y) του πεδίου ορισμού της f(x, y) για το οποίο $0 \le [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \le \delta$ (ή $|x - x_0| \le \delta$ και $|y - y_0| \le \delta$) να ισχύει η ανισότητα $|f(x, y) - k| < \varepsilon$.

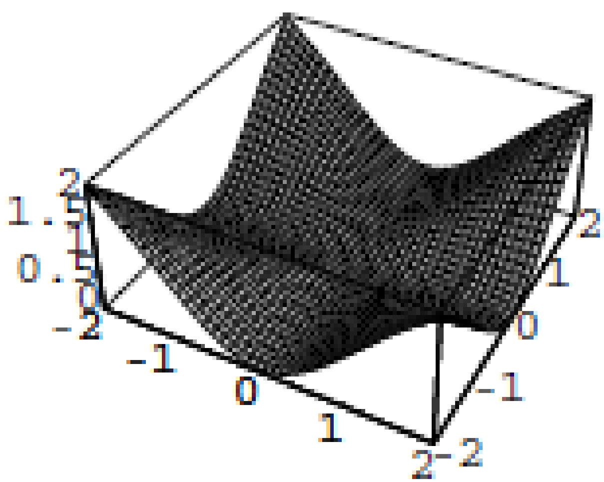
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = k$$

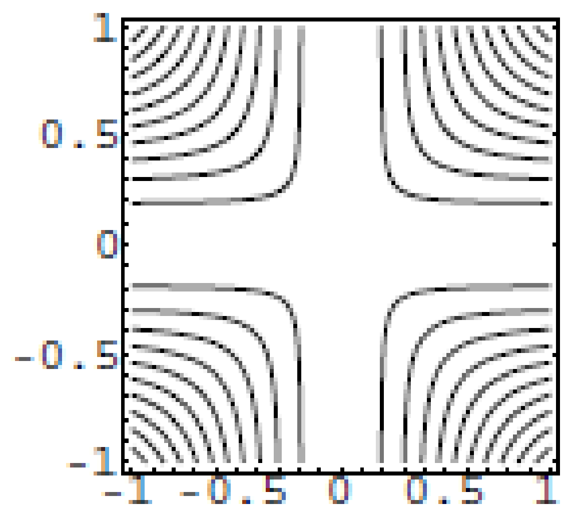
# Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}$$

Δείξτε ότι το όριο της συνάρτησης στην αρχή των αξόνων είναι το μηδέν .



# Απόδειξη

Επειδή $x^2 \le x^2 + y^2$ και $y^2 \le y^2 + x^2$ έχουμε

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2\, y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$$

$$=(x^2 + y^2)$$

και επειδή $x^2 + y^2 \le \delta^2$ έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ έτσι

ώστε

$$|f(x, y) - 0| < \delta^2$$

θέτοντας $\delta^2 = \varepsilon$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου είναι φανερό ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

άρα το όριο της $f(x, y)$ όταν $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ είναι το μηδέν.

# Το όριο της συνάρτησης f όταν υπάρχει είναι μοναδικό 1/2

Αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = k_1$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = k_2$$

σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι για κάθε ε > 0 υπάρχει περιοχή με ακτίνα δ ώστε

$$|f_1 - k_1| \le \varepsilon_1 \text{ και } |f_2 - k_2| \le \varepsilon_2.$$

Από τις ανισότητες αυτές προκύπτει

$$\begin{aligned} |k_1 - k_2| &= |k_1 - f + f - k_2| \\ &\le |f - k_1| + |f - k_2| \le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

# Το όριο της συνάρτησης f όταν υπάρχει είναι μοναδικό 2/2

Γνωρίζουμε από τον ορισμό ότι το ε πρέπει να μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, ενώ η διαφορά $k_1 - k_2$ έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να υπάρχουν τα όρια θα πρέπει το $k_1$ και $k_2$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

# Σχόλιο

Η παραπάνω ιδιότητα του ορίου είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό των ορίων μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, επειδή αν καταλήγουν σε διαφορετικά όρια, τότε το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει. Τα διαφορετικά όρια μπορούν να προκύψουν από δύο διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του σημείου $(x_0, y_0)$.

# Παράδειγμα 3

Να μελετηθεί το όριο της συνάρτησης στην αρχή των αξόνων.

$$f(x,y) = \frac{x^2\, y^2}{x^2+y^2}$$

**Απάντηση**: Εάν αντικαταστήσουμε το y = mx, τότε η συνάρτηση

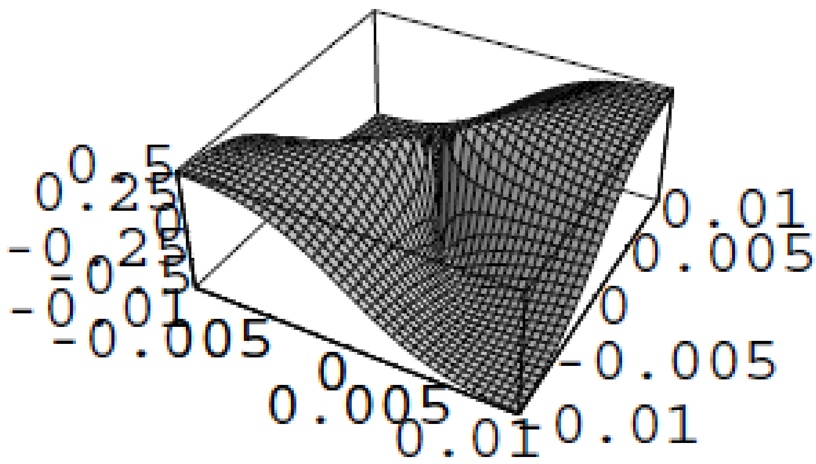
$$f(x,y)=\frac{m\, x^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

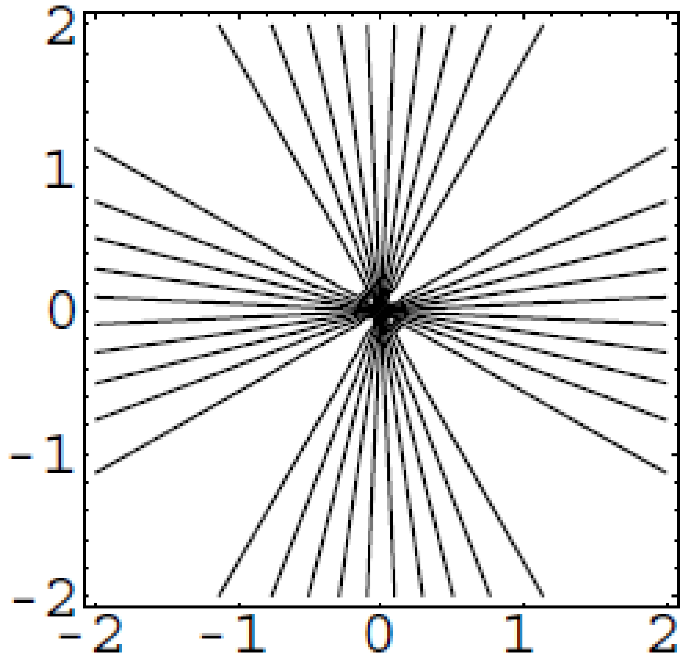
οπότε και το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{m}{1+m^2}$$

Άρα το όριο της συνάρτησης f δεν υπάρχει γιατί εξαρτάται από την καμπύλη (την κλίση m) που προσεγγίζουμε το σημείο (0, 0)

# Γραφική παράσταση παρ. 3



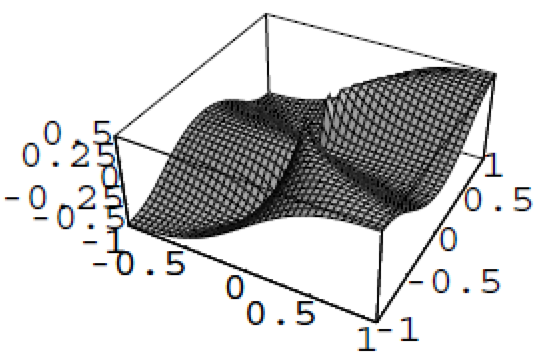



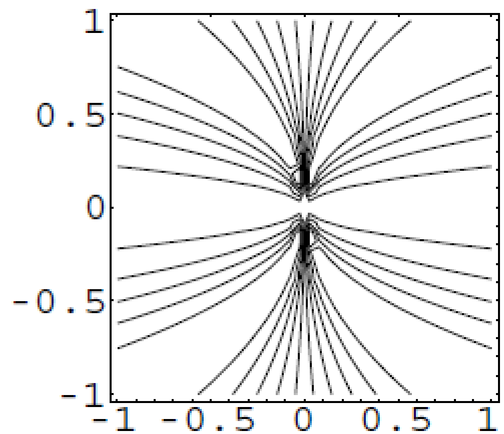
# Παράδειγμα 4

Υπάρχει το όριο της συνάρτησης στην αρχή των αξόνων;

$$f(x,y)=\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}$$

**Απάντηση**: Αν προσεγγίσουμε την αρχή των αξόνων κατά μήκος της ευθείας y = x βρίσκουμε ότι το όριο είναι μηδέν, αλλά αν πλησιάσουμε την αρχή κατά μήκος της καμπύλης $x = y^2$ το όριο είναι 1/2. ΄Αρα το όριο της συνάρτησης f(x, y) στο σημείο (0, 0) δεν υπάρχει .



# Ιδιότητες των ορίων 1/2

Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = k_1$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = k_2$, τότε

*1)* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [\,f(x,y) + g(x,y)] =$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = k_1 + k_2$$

2) οταν $k_2 \neq 0$ , $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} = \frac{k_1}{k_2}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [\,f(x,y) \cdot g(x,y)] =$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = k_1 \cdot k_2$$, τότε

# Ιδιότητες των ορίων 2/2

4) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[m]{f(x,y)} = \sqrt[m]{k_1}, \quad m \in N$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{a} = [k_1]^{\alpha}, \alpha \in R$$

6) όταν $f(x, y) \geq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x, y| = k_1$$

# Ορισμός για το όριο στο άπειρο 1/2

Αν η συνάρτηση f έχει όριο το μηδέν, τότε η συνάρτηση 1/f θα έχει όριο το άπειρο $\pm\infty$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Το όριο της συνάρτησης f είναι το k όταν πλησιάζουμε το άπειρο, αν για κάθε οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία $M(x, y)$ του πεδίου ορισμού της f, για τα οποία $|OM| > \delta$, όπου O ένα σταθερό σημείο, να είναι $|f(M) - k| \leq \varepsilon$.

# Ορισμός για το όριο στο άπειρο 2/2

Θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f(x, y) στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ είναι το άπειρο (ή το – ∞) αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \to \infty$ (ή $-\infty$) όταν για κάθε έναν οσοδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό Κ, υπάρχει περιοχή $\pi(M_0, \delta)$ του σημείου $M_0$ του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

$$f(M) > K \quad (\text{ή } f(M) < -K \text{ για } -\infty)$$

Ισχύει επίσης ότι το

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x, y) = \lim_{(w,z)\to(0,0)} f(1/w, 1/z)$$

# Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν (x, y)⟶(∞, ∞)

$$f(x,y)= \frac{x^2+ y^2+2}{x^2+y^2}$$

**Απάντηση**: Η συνάρτηση μπορεί να μετασχηματισθεί στην

$$f\left(\frac{1}{w},\frac{1}{z}\right) = 1 + 2\,\frac{w^2\,z^2}{w^2+z^2}$$

τότε

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(\frac{1}{w},\frac{1}{z}\right) =1+2 \lim_{(w,z)\to(0,0)} \frac{w^2\,z^2}{w^2+z^2}$$

# Συνέχεια Παρ. 5

επειδή το

$$\lim_{(\mathrm{w},z)\to(0,0)} \frac{w^2\, z^2}{\mathrm{w}^2+z^2} = 0$$

όπως δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα . Επομένως,

$$\lim_{(\mathrm{x},\mathrm{y})\to(\infty,\infty)} \mathrm{f}(\mathrm{x},\, \mathrm{y}) = \lim_{(\mathrm{w},z)\to(0,0)} \mathrm{f}\left(\frac{1}{w}, \frac{1}{z}\right) = 1$$

# Προτάσεις 1/2

Θα διατυπώσουμε στη συνέχεια πέντε προτάσεις, χωρίς απόδειξη.

**Πρόταση 1**: Εάν ισχύει |f(x, y)| < |g(x, y)| για κάθε (x, y) εντός του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων f και g και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ g (x, y) =0 τότε και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ f(x, y) = 0 .

**Πρόταση 2**: Αν η συνάρτηση f(x, y) μπορεί να γραφεί ως f(x, y) = g(x, y)h(x, y) όπου |g(x, y)| ≤ M για κάθε ζεύγος τιμών (x, y) εντός του πεδίου ορισμού της g και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ h (x, y) = 0 0, τότε η f θα τείνει στο μηδέν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$ f(x, y) = 0 .

# Προτάσεις 2/2

**Πρόταση 3**: Αν υπάρχει περιοχή π του $(x_0, y_0)$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο $M(x, y)$ της π να ισχύει $f(x, y) \le g(x, y) \le h(x, y)$, τότε αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h = \ell$ ισχύει και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g = \ell$.

**Πρόταση 4**: Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ μπορεί, με το μετασχηματισμό $t = \phi(x, y)$, να μετατραπεί σε συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(t)$ και αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = t_o$, τότε ισχύει η σχέση

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{t\to t_0} f(t)$$

**Πρόταση 5:** Αν δεν υπάρχει περιοχή $\pi((x_0, y_0), \delta)$ στην οποία η συνάρτηση να είναι φραγμένη, τότε το όριο της συνάρτησης $f(x, y)$ δεν υπάρχει στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$.

# Παρατήρηση

Αξίζει επίσης να προσθέσουμε και μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση. Εαν το όριο μιας συνάρτησης f(x, y) στο σημείο $(x_0, y_0)$ του πεδίου ορισμού της είναι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \frac{0}{0} \quad \text{ή} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \frac{\infty}{\infty}$$

δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περαιτέρω ανάλυση της συνάρτησης και τον προσδιορισμό του ορίου της τον κανόνα L' Hopital, όπως στην ανάλυση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

# Επαναλαμβανόμενα Όρια

# Ορισμός

Μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να προσεγγίσει μια συγκεκριμένη τιμή, όταν το σημείο (x, y) προσεγγίζει το $(x_0, y_0)$ διαδοχικά, δηλ. όταν πρώτα το $x \longrightarrow x_0$ και στη συνέχεια το $y \longrightarrow y_0$ ή και αντιστρόφως. Εάν το όριο της f(x, y) υπάρχει όταν το $x \longrightarrow x_0$, τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε το όριο της φ(y) όταν το $y \longrightarrow y_0$ δηλαδή,

$$\lim_{x \to x_0} \left[ \lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] = k_1$$

ή αντίστροφα μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f(x, y) όταν το $y \longrightarrow y_0$ και στη συνέχεια όταν το $x \longrightarrow x_0$ ,

$$\lim_{y \to y_0} \left[ \lim_{x \to x_0} f(x, y) \right] = k_2$$

# Επαναλαμβανόμενα ή διαδοχικά ή πλευρικά όρια

Τα όρια αυτά ονομάζονται επαναλαμβανόμενα ή διαδοχικά ή πλευρικά όρια. Με βάση όσα έχουμε αναφέρει μεχρι τώρα μπορούμε να καταλήξουμε σε μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

# Παρατηρήσεις

- Αν το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει και είναι το k, τότε $k_1 = k_2 = k$, επειδή τα επαναλαμβανόμενα όρια ορίζουν δύο διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του σημείου $(x_0, y_0)$.
- Αν τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους ($k_1 = k_2$) ή δεν υπάρχουν, τότε το όριο της συνάρτησης δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει, τα διαδοχικά όρια καλύπτουν μόνο δύο από τους άπειρους τρόπους προσέγγισης του σημείου $(x_0, y_0)$.
- ΄Οταν τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει.

# Παράδειγμα 6

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f(x,y)= $\frac{x^2\, y^2}{x^2+y^2}$ στο (x,y)→(0,0) , αφού πρώτα μετασχηματισθεί σε πολικές συντεταγμένες.

**<u>Απαντηση</u>**:

Η συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta\sin\theta)^2$$

Αφού x=rcosθ και y=rsinθ.

Άρα το όριο της f σε πολικές συντεταγμένες είναι (ανεξάρτητα από την τιμή της θ)

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} f(r,\theta) \to 0$$

# Παράδειγμα 7

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f(x,y)= $\frac{x\,y}{x^2+y^2}$ στο (x,y)→(0,0) αφού πρώτα μετασχηματισθεί σε πολικές συντεταγμένες.

**<u>Απαντηση</u>**:

Η συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$f(r,\theta)= \cos\theta\sin\theta$$

Αφού x=rcosθ και y=rsinθ.

Άρα το όριο της f δεν υπάρχει γιατί η τιμή της αλλάζει ανάλογα με την τιμή που παίρνει το θ

# Παράδειγμα 8

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f(x,y)= $\frac{\mathrm{x\,y}}{\mathrm{x^2+y^2}}$ στο (x,y)→(0,0) κάνοντας χρήση του ορισμού των επαναλαμβανόμενων ορίων και του ορισμού του ορίου.

<u>**Απαντηση**</u>:

Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{\mathrm{x\,y}}{\mathrm{x^2+y^2}} - 0\right| \le \frac{|x||y|}{\mathrm{x^2+y^2}} \le \frac{\mathrm{x^2+y^2}}{\mathrm{x^2+y^2}} = 1$$

Αφού, |x|≤$\sqrt{\mathrm{x^2+y^2}}$ και |y|≤$\sqrt{\mathrm{x^2+y^2}}$.

Αντίστοιχα, ο ορισμός των επαναλαμβανόμενων ορίων δίνει

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0}\left[\lim_{\mathrm{y}\to 0} \mathrm{f(x,\, y)}\right] = 0$$

$$\lim_{\mathrm{y}\to 0}\left[\lim_{\mathrm{x}\to 0} \mathrm{f(x,\, y)}\right] = 0$$

Άρα το όριο της f δεν υπάρχει.

# Παράδειγμα 9

Να υπολογισθούν τα όρια.

A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$

B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[x + ysin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

**<u>Απαντηση</u>**:

A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-n)x^2+x^3(1+n)}{x^2(1+n^2)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-n)+x(1+n)}{(1+n^2)} = \frac{1-n}{1+n^2}$$

Υποθέτωντας οτι y=nx. Βλέπουμε ότι το όριο εξαρτάται από το n άρα το όριο δεν υπάρχει.

# Συνέχεια Παρ. 9 1/2

Αντίστοιχο αποτέλεσμα βγάζουμε και αν εκφράσουμε τό όριο A σε πολικές συντεταγμένες.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \frac{\rho^2(cos^2\theta - sin^2\theta) + \rho^3(cos^3\theta + sin^3\theta)}{\rho^2}$$

$$= \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} [(cos^2\theta - sin^2\theta) + \rho(cos^3\theta + sin^3\theta)]$$

Άρα το όριο και πάλι δεν υπάρχει αφού εξαρτάται από την  τιμή του θ.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν κάνουμε χρήση του ορισμού των επαναλαμβανομένων ορίων.

# Συνέχεια Παρ. 9 2/2

Β) Υποθέτωντας μια εξάρτηση y=mx το όριο γίνεται

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[x+ysin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[x+mxsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

Για να επαληθεύσουμε την ορθότητα του αποτελέσματος, εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου .

$$\left|x+ysin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|+|y|=2\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\leq 2\delta$$

Αφού, $|x|\leq\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$ και $|y|\leq\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$. Άρα το όριο υπάρχει.

# Συνέχεια

# Ορισμός Συνέχειας

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: **Αν** $(x_0, y_0)$ **είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού** $D \subseteq R^2$ **μιάς συνάρτησης** $f(x, y)$, **θα λέμε ότι η** $f(x, y)$ **είναι συνεχής στο σημείο** $(x_0, y_0)$ **αν**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)= f(x_0, y_0).$$

Ο ορισμός αυτός μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά, π.χ. αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ορισμένη στο σύνολο $D \subseteq R^2$, τότε λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ του D αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία του συνόλου $\pi(M_0, \delta)$ ισχύει $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$.

# Συνέχεια

Αν το σημείο $(x_0, y_0)$ είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f, τότε ο τρόπος προσέγγισής του δεν έχει περιορισμούς, αλλά αν το σημείο $(x_0, y_0)$ είναι συνοριακό τότε το (x, y) πρέπει να πλησιάζει το $(x_0, y_0)$, ενώ παράλληλα θα παραμένει στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

Όταν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της D, τότε θα λέμε ότι ‘η συνάρτηση f είναι συνεχής στο D’.

# Ασυνέχεια πρώτου είδους

Συμβαίνει πολλές φορές η συνάρτηση f(x, y) να έχει όριο στο σημείο $M_0 \in D$, όπου D είναι το πεδίο ορισμού της, αλλά το όριο αυτό να διαφέρει από την τιμή της συνάρτησης στο $M_0$,

$$\lim_{M \to 0} f(x, y) = \lambda \neq f(x_0, y_0).$$

Η ασυνέχεια αυτή λέγεται πρώτου είδους και είναι απαλείψιμη γιατί μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση που να έχει τιμή λ στο $M_0$.

# Ιδιότητες

Εάν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού D και η κάθε μία είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0)$ του D, τότε

❶ το άθροισμα f + g και το γινόμενο f · g είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0)$.

❷ το πηλίκο (f/g) αν φυσικά $g(x_0, y_0) \neq 0$, αλλά και οι σχέσεις |f|, $\frac{1}{f^n}$ , $\sqrt[n]{f}$ είναι επίσης συνεχείς όταν υπάρχουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις.

# Θεώρημα

**ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα συγκεκριμένο σημείο $M_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει πάντοτε μια περιοχή του σημείου $M_0$ στην οποία η συνάρτηση f είναι φραγμένη**.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι απλή αφού από τον ορισμό έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όλα τα σημεία της περιοχής $\pi(M_0, \delta)$ να ισχύει η σχέση

$$|f - f(M_0)| < \varepsilon$$

άρα

$$f(M_0) - \varepsilon < f < \varepsilon + f(M_0).$$

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία ενός συμπαγούς συνόλου, τότε οι τιμές της συνάρτησης ορίζουν ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.

# Παράδειγμα 10

Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} (1 + x^2)\left(\frac{\sin y}{y}\right) & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lambda & \text{όταν } (x, y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Να προσδιορισθεί το λ για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

# Απάντηση

Το όριο της συνάρτησης στο (0, 0) είναι η μονάδα γιατί, όπως γνωρίζουμε,

$$\lim_{y \to 0} \left( \frac{\sin y}{y} \right) = 1$$

Άρα αν το λ = 1 πράγματι η συνάρτηση f(x, y) θα είναι συνεχής. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ασυνέχειας πρώτου είδους, όταν το λ έχει τιμή διάφορη της μονάδας, αλλά η ασυνέχεια αυτή μπορεί να απαλειφθεί με τον επαναπροσδιορισμό του λ.

# Να λυθούν οι ασκήσεις

1. Να μελετηθεί η συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^{\mu}}{x^2+y^2} & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{όταν } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Να μελετηθεί αν η συνάρτηση είναι συνεχής

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{όταν} \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ \dfrac{1}{\exp\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{όταν } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

3. Να μελετηθεί η συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\, y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{όταν } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

# Βιβλιογραφία


1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 3
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 1*

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης