ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 5η : Μερική Παράγωγος Ι

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

1. Ορισμός της μερικής παραγώγου ως προς άξονα και η γεωμετρική ερμηνεία αυτής

2. Επέκταση της μερικής παραγώγου σε παραγώγους ανώτερης τάξης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μερική Παράγωγος

2. Παραδείγματα

Μερική Παράγωγος

Ορισμός Μερικής Παραγώγου

Εάν η συνάρτηση $f\,(x, y)$ είναι ορισμένη στον τόπο D του R^2 και το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ ανήκει στο D, τότε αν η μεταβλητή y πάρει τη τιμή y_0=σταθερά, η συνάρτηση $f\,(x, y)$ θα μετατραπεί σε συνάρτηση μιας μεταβλητής $f\,(x, y_0)$.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε τη μερική μεταβολή της συνάρτησης f(x, y), ως προς x,

$$\Delta_x f = f\,(x_0 + \Delta x, y_0) - f\,(x_0, y_0)$$

που αντιστοιχεί στη μεταβολή x της μεταβλητής x στην περιοχή (M_0,δ), όπου $\delta > 0$.

Ορισμός Μερικής παραγώγου ως προς άξονα

Η μερική παράγωγος συνάρτησης f(x, y) ως προς τη κατευθυνση του άξονα Ox στο σημείο M_0 ορίζεται το όριο του πηλίκου ($\Delta_x f/\Delta x$), όταν το $\Delta x \longrightarrow 0$ και συμβολίζεται με ($\partial f/ \partial x$), δηλαδή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{Mo}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

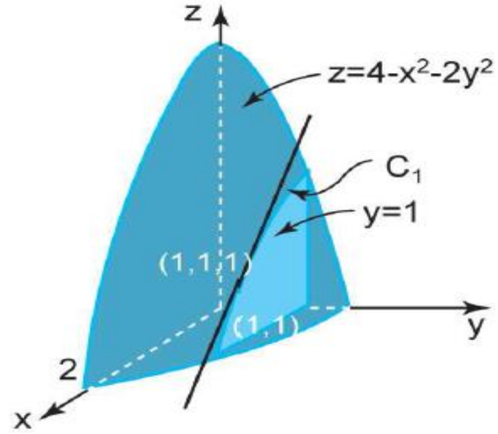
Αντιστοιχα, η μερική παράγωγος της f (x, y) ως προς τη κατεύθυνση του άξονα Oy είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\right)_{\mathrm{Mo}} = \lim_{\Delta \mathrm{y} \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία 1/2

Η γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου είναι η ακόλουθη: Αν ονομάσουμε C_1 την καμπύλη $f\,(x, y_0)$ που προκύπτει από τη τομή της επιφάνειας που ορίζουν τα σημεία της $f\,(x, y)$ με το επίπεδο $y = y_0$ (βλέπε το παράδειγμα του Σχήματος), τότε η μερική παράγωγος ισούται με τη κλίση που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $M(x_0, y_0)$ με το επίπεδο Oxy.

Για παράδειγμα, η μερική παράγωγος της $f\,(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ ως προς x και y στο σημείο (1,1) μπορεί να αναλυθεί ως εξής:



Σχήμα 1: Η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς το σημειο (1,1)

Γεωμετρική Ερμηνεία 2/2

Η τομή της επιφάνειας $z(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ με το επίπεδο $y = 1$ είναι η καμπύλη C_1 ($z(x, 1) = 2 - x^2$). Η εφαπτομένη στο σημείο (1,1) της καμπύλης C_1 σχηματίζει γωνία φ με την προβολή της επιφάνειας $y = 1$ στο επίπεδο (xy). Οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y αντίστοιχα είναι:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{1,1} = (-2x)_{1,1} = -2 \,,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{1,1} = (-2y)_{1,1} = -2 \,.$$

Συμβολισμοί Μερικής Παραγώγου

Χρησιμοποιούμε διάφορους τρόπους για να συμβολίσουμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης f ως προς x, π.χ. f_x ή $\partial_x f$.

Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι, η μερική παράγωγος αποτελεί συμβολισμό και δεν είναι ισοδύναμη με το κλάσμα δύο μεταβολών, όπως η παράγωγος df/dx στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Παράδειγμα

Εάν u = $x^2y + e^{-xy^3}$ να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους (∂u/∂x), και (∂u/ ∂y).

Απάντηση:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right) = 2xy - y^3\, e^{-\mathrm{xy}^3}$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right) = x^2 - 3xy^2\, e^{-\mathrm{xy}^3}$$

Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Αν η συνάρτηση που προκύπτει από τη μερική παράγωγο της f είναι ορισμένη στο D και έχει συνεχείς παραγώγους στην περιοχή π(M_0,δ) του D, τότε μπορούμε να ορίσουμε και να υπολογίσουμε παραγώγους ανώτερης τάξης στην περιοχή του σημείου M_0 .

π.χ.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\mathrm{Mo}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\mathrm{Mo}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{Mo}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\mathrm{Mo}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{\mathrm{Mo}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\mathrm{Mo}}$$

Παράδειγμα

Έστω η συναρτηση $f(x)= x^3y^2+x^2+y^2$. Να υπολογιστεί η μεικτή παράγωγος.

Απάντηση:

Γνωριζουμε ότι η μεικτή παράγωγος είναι η

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο προκείπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2+2x) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y+2y) = 6x^2y$$

Άρα η σειρά παραγώγισης δεν έχει σημασία.

Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν υπάρχουν οι παράγωγοι $(\partial f/ \partial \mathrm{x})$, $(\partial f/ \partial \mathrm{y})$ και η $(\partial^2 f/ \partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y})$ και είναι συνεχείς σε μια περιοχή του M_0, τότε υπάρχει και $(\partial^2 f/ \partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x})$ και μάλιστα ισχύει

$$\left(\frac{\partial^2 f\,(\mathrm{x_o},\mathrm{y_o})}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}}\right) = \left(\frac{\partial^2 f\,(\mathrm{x_o},\mathrm{y_o})}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}}\right)$$

Απόδειξη 1/4

Το θεώρημα της μέσης τιμής είναι ήδη γνωστό από τη μελέτη των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Θα το επαναλάβουμε εδώ και θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για την απόδειξή μας.

Εάν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα x και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα Δx, τότε

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

όπου $0 < \theta < 1$.

΄Εστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο του D στο οποίο υπάρχουν και είναι συνεχείς οι μικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της συνάρτησης f. Σχηματίζουμε την ποσότητα

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$$
$$- f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

που είναι συνάρτηση των μεταβολών Δx και Δy των x και y. Αν ορίσουμε τις συναρτήσεις

Απόδειξη 2/4

$$\mathrm{F}(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Phi(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (1)$$

τότε η σχέση A γράφεται

$$A = \mathrm{F}(x_0, y_0 + \Delta y) - \mathrm{F}(x_0, y_0)$$

$$= \Phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \Phi(x_0, y_0).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις μιας μεταβλητής στη σχέση αυτή προκύπτει

$$A = \mathrm{F}_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y)\, \Delta y$$

$$= \Phi_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0)\, \Delta x, \qquad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

$$A = [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y)]\Delta y$$

$$= [f_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

Απόδειξη 3/4

Συνεπώς

$$f_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)$$

$$= f_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y).$$

Εφόσον όμως οι f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ έπεται ότι

$$f_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f_{xy}(x_0, y_0) + O_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$f_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y) = f_{yx}(x_0, y_0) + O_2(\Delta x, \Delta y)$$

όπου O_1 και O_2 είναι απειροστές συναρτήσεις των x και y.

Επομένως όταν $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0, 0)$ και $O_1 \longrightarrow 0$, $O_2 \longrightarrow 0$

Απόδειξη 4/4

οπότε λόγω της (4.3) έπεται ότι

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \qquad (4)$$

σχέση που αποδεικνύει το θεώρημα

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε τις παραγώγους ($\partial f/\partial$x), ($\partial f/\ \partial$y) και ($\partial f/\ \partial$z) αν

$$f(x, y, z) = e^{xy} \ln z \, .$$

Απόδειξη: Εάν κρατήσουμε τα y και z σταθερά και παραγωγίσουμε ως προς x, έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y e^{xy} \ln z \, .$$

΄Ομοια ($\partial f/\ \partial$y) = x e^{xy} ln z και ($\partial f/\ \partial$z) = e^{xy} /z

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

επαληθεύει την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (5)$$

Η εξίσωση (5) λέγεται εξίσωση Laplace, ενώ οι συναρτήσεις που επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε πρώτα τη μερική παράγωγο πρώτης τάξης ως προς x $(\partial f/ \partial x) = 3x^2 - 3y^2$ και στη συνέχεια την παράγωγο $(\partial^2 f/ \partial x^2) = 6x$, όμοια $(\partial^2 f/ \partial y^2) = -6x$, άρα η εξίσωση Laplace επαληθεύεται.

Παράδειγμα 3

Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$y = \sin(x - \alpha t) + \cos(x + \alpha t)$$

είναι λύση της εξίσωσης του κύματος

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad .$$

Απόδειξη: Η παράγωγος πρώτης τάξης ως προς x είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos(x - \alpha t) - \sin(x + \alpha t)$$

και της δευτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin(x - \alpha t) - \cos(x + \alpha t).$$

Παράδειγμα 4

Η παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2[-\sin(x - \alpha t) + \cos(x + \alpha t)] \ .$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους αυτές στην εξίσωση του κύματος βλέπουμε ότι την επαληθεύουν.

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 4
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 2,3*

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης