ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 7η : Σύνθετες Συναρτήσεις

Λουκάς Βλάχος

Καθηγητής Αστροφυσικής

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Η εξοικείωση με τις σύνθετες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και τις παραγώγους τους (είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη φυσική για να ορίσουμε για παράδειγμα την εξέλιξη ενός μεγέθους (πχ της πίεσης) για ένα κινούμενο παρατηρητή
- Η κατανόηση των ομογενών συναρτήσεων
- Η εφαρμογή του θεωρήματος Euler σε ομογενείς συναρτήσεις

Περιεχόμενα ενότητας

1. Παραγώγιση Σύνθετων Συναρτήσεων

2. Θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις

Παραγώγιση Σύνθετων Συναρτήσεων

Σύνθετη Συνάρτηση 1/2

Με τον όρο σύνθετη συνάρτηση θα εννοούμε τη συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών που τη θέση των μεταβλητών της παίρνουν άλλες συναρτήσεις.

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

είναι ισοδύναμη με την έκφραση

$$f(u) = u^{½}$$

όπου $u = x^2 + y^2$. ΄Αλλο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(x, y) = xy + \log(x/y)$$

ή αν ορίσουμε τα $u = xy$, $v = x/y$ τότε

$$f(u, v) = u + \log v$$

Σύνθετη Συνάρτηση 2/2

Συχνά για την περιγραφή της κίνησης υλικού σημείου στη κλασική μηχανική, χρησιμοποιούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η τροχιά του υλικού σημείου περιγράφεται από τις παραμετρικές συναρτήσεις

$$x(t) = 3t^2 + t,\ y(t) = t^3,\ z(t) = 4t$$

που ορίζουν τη θέση του υλικού σημείου ως συνάρτηση του χρόνου. ΄Ενα φυσικό μέγεθος που μεταβάλεται κατα μήκος της τροχιάς του υλικού σημείου θα περιγράφεται από τη συνάρτηση $V(t) = V(t, x(t), y(t), z(t))$.

Θεωρήματα

Αξίζει να αναφερθούμε σε δύο σημαντικά θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Μία σύνθετη συνάρτηση είναι συνεχής, όταν αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις.

Μπορούμε να αναλύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής: Εάν μία συνάρτηση $z = f(u, v)$ είναι συνεχής στη περιοχή Π_1 και οι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι συνεχής στη περιοχή Π_1, τότε η συνάρτηση z είναι επίσης συνεχής στη περιοχή Π_1.

Επίσης ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Εάν $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των x και y στη περιοχή Π_1 και $f(u, v)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση των u και v στη περιοχή Π_1, τότε η σύνθετη συνάρτηση $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ είναι επίσης διαφορίσιμη ως προς x και y.

Υπολογισμός Παραγώγου Σύνθετης Συνάρτησης 1/2

Με βάση τα παραπάνω θεωρήματα, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε ότι w= f(u, v) είναι συνάρτηση των u, v αλλά τα u(x, y) και v(x, y) είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των x, y, τότε

$$\mathrm{dw} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\,\mathrm{du} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\,\mathrm{dv} \qquad (1)$$

Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης w(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) είναι

$$\mathrm{dw} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dy} \qquad (2)$$

Όμως,

$$\mathrm{du} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy} \qquad (3)$$

Και

$$\mathrm{dv} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy} \qquad (4)$$

Υπολογισμός Παραγώγου Σύνθετης Συνάρτησης 2/2

Αντικαθιστώντας τα du, dv στην εξίσωση (1), έχουμε

$$\mathrm{dw} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dy}$$

Από την σύγκριση των παραπάνω εξισώσεων συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}$$

και

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}$$

Αλυσιδωτή Παραγώγιση

Στην απλούστερη περίπτωση που f(t, x, y) = f(t) επειδή x(t), y(t), ισχύει

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (5)$$

Η παραγώγιση αυτή είναι γνωστή και με τον όρο “αλυσιδωτή παραγώγιση”.

Παράδειγμα Αλυσιδωτής Παραγώγισης

Ποιά ειναι η ολική μεταβολή της πυκνότητας, εάν αυτή έχει την μορφή ρ(t, x(t), y(t), z(t)), για έναν ακίνητο και έναν κινούμενο παρατηρητή;

Απάντηση:

Η ολική μεταβολή της πυκνότητας για έναν κινούμενο παρατηρητή:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Η ολική μεταβολή της πυκνότητας για έναν ακίνητο παρατηρητή:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Παράγωγος Δεύτερης Τάξης 1/3

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η παράγωγος δεύτερης τάξης της συνάρτησης f(u, v) όπου u(x, y), v(x, y) ως προς x είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Παράγωγος Δεύτερης Τάξης 2/3

Όμοια, η δεύτερη παράγωγος ως προς y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Παράγωγος Δεύτερης Τάξης 3/3

Και αντίστοιχα, η δεύτερη παράγωγος ως προς x και y

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u} \partial \mathrm{v}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{u} \partial \mathrm{v}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{v}}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}\right).$$

Γενικά

Στη γενική περίπτωση $f(x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_j(t_1, \ldots, t_m)$ έχουμε

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t_k} \partial \mathrm{t_j}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_\lambda}\, \partial x_i} \frac{\partial \mathrm{x_\lambda}}{\partial \mathrm{t_k}} \frac{\partial \mathrm{x_i}}{\partial \mathrm{t_j}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}} \frac{\partial^2 \mathrm{x_i}}{\partial \mathrm{t_k}\, \partial \mathrm{t_j}}$$

Χρονοεξαρτώμενες Συντεταγμένες

Ενώ, όταν οι συντεταγμένες εξαρτώνται από το χρόνο, $f(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$, προκύπτει ότι

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_k}\, \partial x_i}\frac{dx_k}{dt}\frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}}\frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

Παράδειγμα 1

Έστω $w = f(x, y) = e^{x(x-y)}$, όπου $x = 2t \cos t$, $y = 2t \sin t$. Υπολογίστε την παράγωγο dw/dt όταν $t = \pi$.

Απάντηση:

Μπορούμε είτε να αντικαταστήσουμε τα x, y στη συνάρτηση και μετά να παραγωγίσουμε, είτε να εφαρμόσουμε τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης, αφού το w είναι σύνθετη συνάρτηση μόνο του t και να πάρουμε

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2x - y)\, e^{x(x-y)}(2 \cos t - 2t \sin t)$$

$$- x e^{x(x-y)}(2 \sin t + 2t \cos t).$$

Απάντηση

Όταν $t = \pi$, τότε $x = -2$ και $y = 0$. Οπότε έχουμε

$$\frac{dw}{dt} = (-4\pi)\, e^{4\pi^2}(-2) - (-2\pi)\, e^{4\pi^2}(-2\pi)$$

$$= 4\pi(2 - \pi)\, e^{4\pi^2}$$

Παράδειγμα 2

Αν x = r cos θ και y = r sinθ (τα r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες και τα x, y καρτεσιανές συντεταγμένες) δείξτε ότι, η εξίσωση Laplace για τη V(x, y)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \ .$$

Απόδειξη 1/5

Εχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -\, r\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial y}\,. \qquad (7)$$

Απόδειξη 2/5

΄Ετσι, οι τελεστές

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$$

μπορούν να αντικατασταθούν από τους ισοδύναμους

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = - r \sin\theta \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + r \cos\theta \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \qquad (9)$$

Από την (7) προκύπτει,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} + \sin\theta \ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}}\right) = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

$$+ \ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial r} \cos\theta + \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial r} \sin\theta \qquad (10)$$

Απόδειξη 3/5

Χρησιμοποιούμε τώρα την (9) για να αντικαταστήσουμε τον τελεστή $\partial/\partial r$ στον πρώτο και στον τρίτο όρο μόνο. Η παραγώγιση των άλλων δύο όρων ως προς z δε μπορεί να γίνει άμεσα. Αυτό συμβαίνει, επειδή τα r και θ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, και $(\partial/\partial r)\cos\theta = 0$, $(\partial/\partial r)\sin\theta = 0$. Έτσι ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$+ \sin\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \qquad (11)$$

Επειδή

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$$

Απόδειξη 4/5

Όμοια

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = r^2 \sin^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2\, r \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - r\left(\cos\theta \frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial V}{\partial y}\right), \qquad (12)$$

Απόδειξη 5/5

Από τις (7), (11), (12),

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}^2}$$

απ’οπου προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα .

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$z(x, y) = g(y + \sin x) + f(y - \sin x)$, όπου g, f τυχαίες συναρτήσεις επαληθεύουν τη σχέση $z_x \tan x + z_{xx} - z_{yy} \cos 2x = 0$.

Λύση 1/2

Η συνάρτηση z μπορεί να πάρει τη μορφή

$$z = g(u) + f(v),$$

όπου $u = y + \sin x$ και $v = y - \sin x$. Παραγωγίζοντας την $z(x, y)$ και έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g' \cos x - f' \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = g'' \cos 2x - g' \sin x + f'' \cos 2x + f' \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = g'' + f'' .$$

Λύση 2/2

Με απλή αντικατάσταση στη σχέση

$$A = z_x \tan x + z_{xx} - z_{yy} \cos 2x$$

βρίσκουμε ότι το $A = 0$.

Θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις

Ορισμός Ομογενούς Συνάρτησης

Συχνά συναντάμε μια κατηγορία συναρτήσεων που λέγονται ομογενείς.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενής βαθμού m, αν στο πεδίο ορισμού της ισχύει η σχέση

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y) \qquad (13)$$

για κάθε τιμή της παραμέτρου .

Θεώρημα Euler

Το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ (του Euler): Εάν f είναι μια διαφορίσιμη και ομογενής συνάρτηση βαθμού m τότε ισχύει η σχέση

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf\,. \qquad (14)$$

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας ως προς x την εξίσωση (15) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}f(\lambda x, \lambda y)}{\mathrm{d}\lambda} = m\, \lambda^{m-1} f(x, y). \qquad (15)$$

Ορίζουμε νέες μεταβλητές u = λx και v = λy και παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}f(\lambda x, \lambda y)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u}\, x + \frac{\partial f}{\partial v}\, y \qquad (16)$$

Από τις σχέσεις (16) και (17) για λ = 1, έχουμε την

$$x\,\frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v} = mf \qquad (17)$$

που είναι ο τύπος του Euler.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y)$, η οποία είναι ομογενής βαθμού n και διαφορίσιμη. Δείξτε ότι, οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού $n - 1$.

Απάντηση

Επειδή η f(x, y) είναι ομογενής και διαφορίσιμη ισχύει το θεώρημα του Euler

$$x\,\frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v} = nf$$

Με διαφόριση παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,(nf) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$+\, y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = n\,\frac{\partial f}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (n-1)\,\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (18)$$

Το θεώρημα του Euler για συναρτήσεις n μεταβλητών

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι, το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να προεκταθεί και για συναρτήσεις n μεταβλητών.
Αν $f(x_1, ..., x_n)$, $D \subseteq R^n$, και η f είναι ομογενής βαθμού m, τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = mf$$

Απόδειξη

Παραγωγίζουμε ως προς x_k :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = m\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = (m-1)\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. *Κεφ. 5*
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 2,6*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης