ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 9η : Διανυσματικές Συναρτήσεις

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

1. Ο ορισμός του διανυσματικού πεδίου, της διανυσματικής συνάρτησης και των παραγώγων των διανυσματικών συναρτήσεων.
2. Η εισαγωγή της στροφής, κλίσης και απόκλισης της συνάρτησης, που αποτελούν βασικούς διανυσματικούς τελεστές για την μαθηματική ανάλυση πολλών φυσικών προβλημάτων.

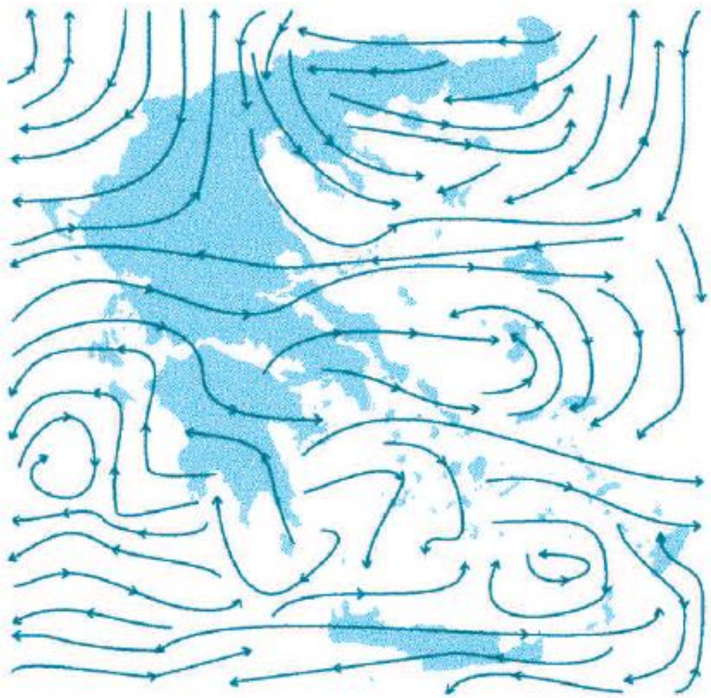
Περιεχόμενα ενότητας

1. Διανυσματικά Πεδία
2. Παράγωγος κατά Κατεύθυνση
3. Κλίση Αριθμητικής Συνάρτησης
4. Απόκλιση Διανυσματικής Συνάρτησης
5. Στροφή Διανυσματικής Συνάρτησης

Διανυσματικά Πεδία

Διανυσματικό Πεδίο Ταχύτητας

Εάν παραστήσουμε την κίνηση του ρευστού ή του ανέμου με το διάνυσμα της ταχύτητας σε κάθε σημείο του χώρου, τότε δημιουργούμε το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας (βλέπε Σχήμα).



Ορισμός

Αν σε κάθε σημείο M(x, y, z) του τρισδιάστατου χώρου αντιστοιχίσουμε με κάποιο νόμο το μέτρο και τη φορά του διανύσματος της πίεσης ή του ηλεκτρικού πεδίου ή του πεδίου δυνάμεων δημιουργούμε ένα διανυσματικό πεδίο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1: Το διανυσματικό πεδίο **S** είναι ένα υποσύνολο σημείων του χώρου R^3 εφοδιασμένο με ένα κανόνα που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο M(x, y, z) του S ένα διάνυσμα $\vec{V}$ (x, y, z).

Απεικόνιση Διανυσμάτικών συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Η μελέτη των διανυσματικών πεδίων γίνεται με τη βοήθεια των διανυσματικών συναρτήσεων. Η διανυσματική συνάρτηση $\vec{E}$ μπορεί να αναλυθεί στο επίπεδο σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να παρασταθεί ως εξής:

$$\vec{E}(x, y) = u(x, y)\widehat{e_x} + v(x, y)\,\widehat{e_y}$$

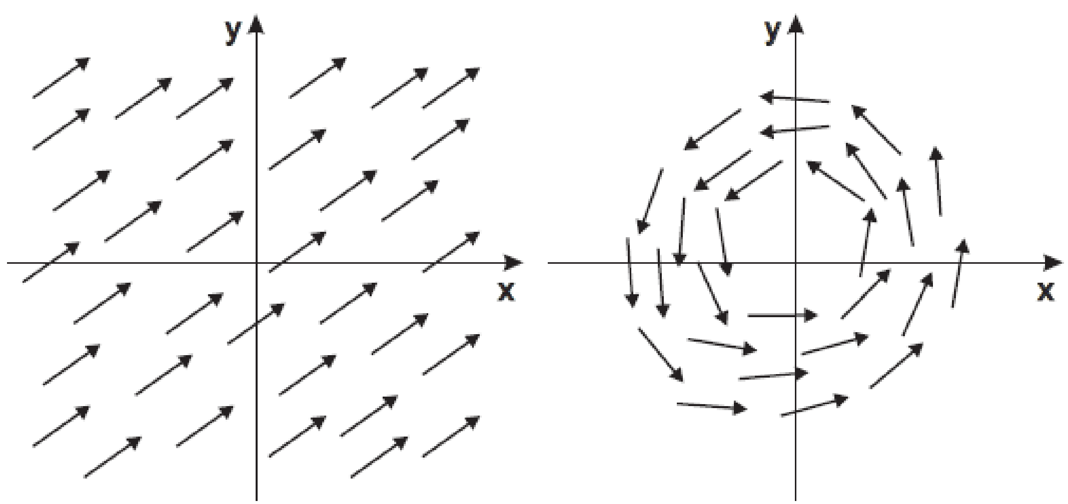
όμοια στον τριδιάστατο χώρο έχουμε:

$$\vec{E}(x, y, z) = u(x, y, z)\widehat{e_x} + v(x, y, z)\widehat{e_y} + w(x, y, z)\,\widehat{e_z}\ .$$

Οι συναρτήσεις u, v, w είναι αριθμητικές συναρτήσεις και αποτελούν τις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου.

Γραφική Παράσταση διανυσματικού πεδίου

Η γραφική παράσταση του διανυσματικού πεδίου αναδεικνύει ένα πλήθος από ενδιαφέρουσες ιδιότητες του υπό μελέτη φυσικού συστήματος, για το λόγο αυτό έχουν δημιουργηθεί μια σειρά απο ειδικά προγράμματα γραφικών για τα διανυσματικά πεδία (βλέπε Σχήμα).



Όρια, Συνέχεια και Παράγωγος Διανυσματικής Συνάρτησης 1/2

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f} = f_1\,\widehat{e_x} + f_2\,\widehat{e_y} + f_3\,\widehat{e_z}$ διανυσματικής μεταβλητής $\vec{x} = x_1\widehat{e_x} + x_2\,\widehat{e_y} + x_3\,\widehat{e_z}$ γράφεται ως

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}_o\,,$$

όπου $\vec{f}_0 = f_{01}\,\widehat{e_x} + f_{02}\,\widehat{e_y} + f_{03}\,\widehat{e_z}$ Αυτό σημαίνει ότι για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, όταν

$$|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$$

να ισχύει

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}_0| < \varepsilon.$$

Θα λέμε ότι μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{f} : D \to E$ όπου $D \subseteq R^n$ και $E \subseteq R^m$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ είναι συνεχές στο σημείο $\vec{x}_0$ όταν κάθε ένα από τα αριθμητικά πεδία $f_1, f_2, \ldots, f_m$ είναι συνεχή στο $\vec{x}_0$.

Όρια, Συνέχεια και Παράγωγος Διανυσματικής Συνάρτησης 2/2

Η παράγωγος της συνάρτησης $\vec{f}(\vec{t}) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ είναι

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{df_i}{dt}\,\hat{e}_i$$

Στη γενικότερη περίπτωση της συνάρτησης $\vec{f}(\vec{x})$,η παράγωγος ως προς τη συνιστώσα x είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right)$$

΄Ομοια

$$d\vec{f} = (df_1, df_2, df_3)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i\right), \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i$$

Τελεστής ∇

Ο τελεστής ∇ (ανάδελτα) όρίζεται ως

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{z}}}$$

και εκφράζει την παράγωγο.

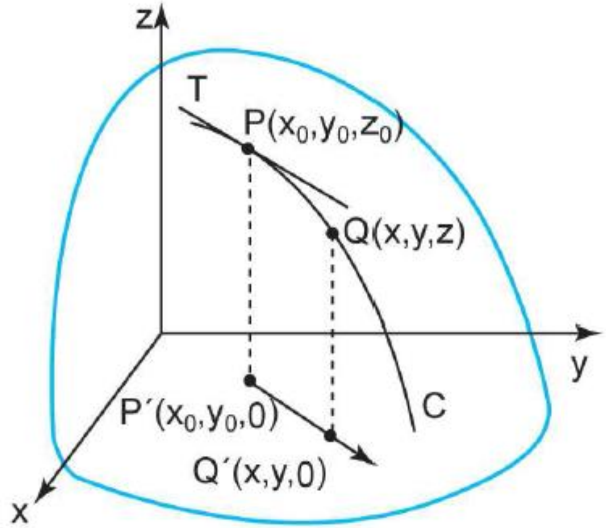
Ο τελεστής έχει εφαρμογή σε πολλές εκφράσεις της φυσικής, μια τέτοια έκφραση είναι και αυτή της κλίσης μιας συνάρτησης που θα εξετάσουμε παρακάτω στην ενότητα αυτή. Εάν εφαρμόσουμε λοιπόν τον τελεστή σε μια αριθμητική συνάρτηση παίρνουμε την κλίση αυτής της συνάρτησης ως

$$\nabla f(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{z}}}$$

Παράγωγος κατά Κατεύθυνση

Ορισμός 1/2

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(\vec{x})$ ως προς τη διεύθυνση ενός τυχαίου μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{n_0}$ ορίζεται από τη σχέση (βλέπε Σχήμα)



$$D_{\overrightarrow{n_0}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+\overrightarrow{n_0}\,h) - f(\vec{x})}{h} \qquad (1)$$

Η $D_{\overrightarrow{n_0}} f$ ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{x_0}$ αλλά και κατά την κατεύθυνση $\overrightarrow{n_0}$.

Ορισμός 2/2

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι

$$D_{\overrightarrow{n_0}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \quad (2)$$

αν το $\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, όπου τα cos α, cos β, και cos γ είναι τα συνημίτονα κατευθύνσεως που συναντήσαμε και στην παράγραφο 1.3

Απόδειξη

Με βάση τον ορισμό (6.1) έχουμε ότι

$$D_{\overrightarrow{n_0}}(\overrightarrow{x_0}) =$$

$$\frac{d}{dh}[f(\mathrm{x}_o + h\ cos\alpha, \mathrm{y}_o + h\ cos\beta, z_o + h\ cos\gamma]_{h\to 0} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial(x_o + h\ cos\ \alpha)}{\partial h}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial(y_o + h\ cos\ \beta)}{\partial h}\right) \ldots..$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos a + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma$$

Είναι φανερό ότι, αν το $\overrightarrow{n_0} = \widehat{e_x}$

$$D_{\overrightarrow{e_x}} f(\overrightarrow{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$$

άρα η παράγωγος κατά κατεύθυνση είναι μιά γενίκευση των μερικών παραγώγων που συναντήσαμε.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z)= x^2y^2+z^2$ στην κατέθυνση $\vec{n} = (3, 3, 3)$.

Απάντηση:

Η παράγωγος κατα κατεύθυνση σύμφωνα με τον ορισμό είναι

$$D_{\overrightarrow{n_0}}f = (\nabla f)\cdot\overrightarrow{n_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{e}_z$$

$$=(2xy^2)\widehat{e}_x + (2yx^2)\,\widehat{e}_y + (2y)\,\widehat{e}_z$$

$$=54\widehat{e}_x + 54\widehat{e}_y + 6\,\widehat{e}_z$$

Κλίση Αριθμητικής Συνάρτησης

Ορισμός 1/2

Ορίζουμε ως την κλίση μιας αριθμητικής συνάρτησης f(x, y, z) τη διανυσματική συνάρτηση

$$\nabla f(\vec{\mathrm{x}}) = \lim_{|h|\to 0} \frac{f\left(\vec{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{h}}\right) + f(\vec{\mathrm{x}})}{|h|}$$

ή

$$\nabla f(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}} \qquad (3)$$

Ορισμός 2/2

Με τη χρήση αυτού του νέου συμβόλου η παράγωγος κατά κατεύθυνση παίρνει τη μορφή

$$D_{\overrightarrow{n_0}} f(\overrightarrow{x_0}) = (\nabla f(\overrightarrow{x_o})) \cdot \overrightarrow{n_0} \qquad (4)$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με τη σχέση (6.2) που αποδείξαμε. Η παράγωγος κατα τη κατευθυνση του διανύσματος $\vec{n}=|\vec{n}|\overrightarrow{n_0}$ είναι

$$D_{\vec{n}} f(\overrightarrow{x_0}) = |\vec{n}| D_{\overrightarrow{n_0}} f(\overrightarrow{x_0}) \qquad (5)$$

(Αποδείξτε τη σχέση αυτή ξεκινώντας από τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση.) Από τη σχέση (4) είναι φανερό ότι, αν τα διανύσματα (∇f) και $\overrightarrow{n_0}$ είναι παράλληλα, η παράγωγος $D_{\overrightarrow{n_0}} f(\overrightarrow{x_0})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Παρατήρηση

Από την εξίσωση (6.4) διαπιστώνουμε επίσης ότι η κλίση έχει τη διεύθυνση του διανύσματος κατα μήκος του οποίου η παράγωγος $D_{\overrightarrow{\mathrm{n}_0}} f\left(\overrightarrow{\mathrm{x}_0}\right)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, αν f(x, y, z) = 0 ορίζει μιά επιφάνεια στο χώρο των τριών διαστάσεων και το σημείο P(x, y, z) είναι πάνω στην επιφάνεια f = 0, τότε το διάνυσμα $(\nabla f)_P$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο P.

Απόδειξη 1/2

΄Εστω $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$ το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M(x, y, z) της επιφάνειας. Τότε το $d\vec{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z$ θα βρίσκεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο M. Όμως ισχύει

$$\mathrm{df} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$$

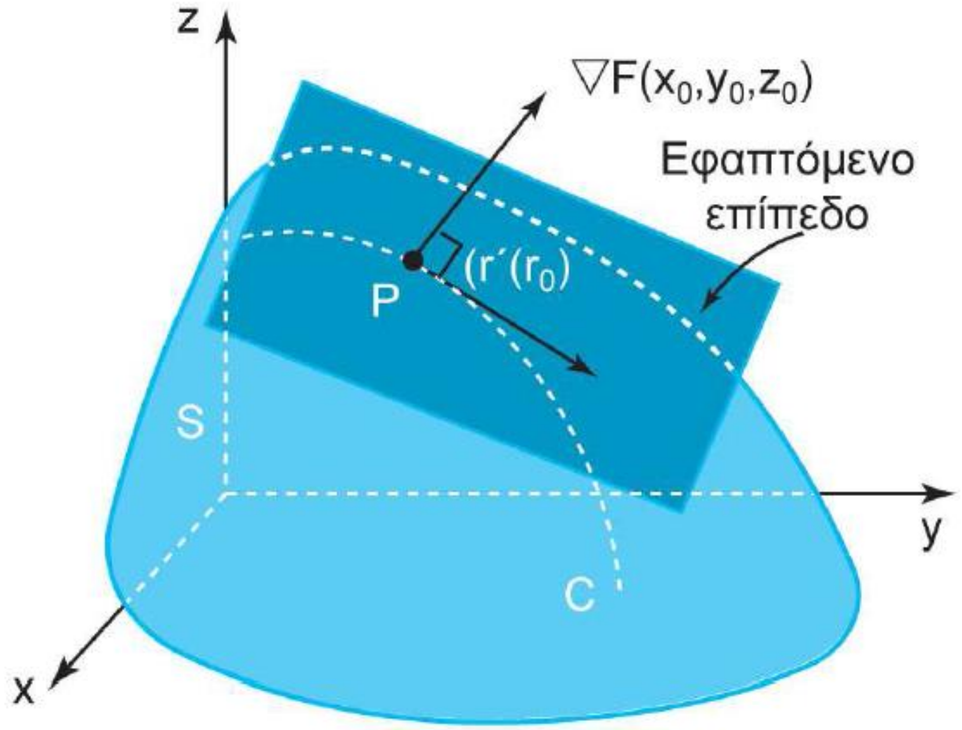
ή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z\right)(dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z)$$

$$= \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

που σημαίνει ότι $\nabla f \perp d\vec{r}$ και επομένως η κλίση είναι κάθετη στην επιφάνεια όπως φαίνεται στο Σχήμα που ακολουθεί (ακριβέστερα στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας).

Απόδειξη 2/2



Παράδειγμα 1

Υπολογίστε την κλίση της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ με τη βοήθεια του ορισμού της.

Απάντηση: Γνωρίζουμε από τον ορισμό της κλίσης ότι

$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + O(\vec{h})$ όπου $O(\vec{h})$ το υπόλοιπο που τείνει στο μηδέν όταν το h τείνει στο μηδέν. ΄Εχουμε

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) &= f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) \\
&= [(x + h_1)^2 + (y + h_2)^2] - (x^2 + y^2) \\
&= [2 \times h_1 + 2yh_2] + [h_1^2 + h_2^2] \\
&= [2x\,\widehat{e_x} + 2y\,\widehat{e_y}] \cdot \vec{h} + |\vec{h}|^2
\end{aligned}
$$

΄Αρα

$$\nabla f(\vec{x}) = \nabla f(x, y) = 2x\,\widehat{e_x} + 2y\,\widehat{e_y}.$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε την παράγωγο κατά μιά τυχαία διεύθυνση του αριθμητικού πεδίου $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$, σε τυχαίο σημείο του τόπου ορισμού του.

Απάντηση: ΄Εστω $\overrightarrow{n_0} = (n_1, n_2)$ μία τυχαία κατεύθυνση και $M_0(x_0, y_0)$ ένα τυχαίο σημείο του τόπου ορισμού της f η οποία είναι διαφορίσιμη.

΄Αρα

$$D_{\overrightarrow{n_0}} f\left(\overrightarrow{x_0}\right) = (\nabla f) \cdot \overrightarrow{n_0}$$

και

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{e_y}\ ,\ \overrightarrow{n_0} = n_1\,\widehat{e_x} + n_2\widehat{e_y}$$

Λύση

τότε

$$\nabla f \cdot \overrightarrow{n_0} = 2(x - 1)n_1 - 2yn_2$$

$$\Rightarrow D_{\overrightarrow{n_0}} f|M_0 = 2(x_0 - 1)n_1 - 2y_0n_2.$$

Παράδειγμα 3

΄Εστω το αριθμητικό πεδίο $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ ορισμένο στο R^2. Βρείτε την παράγωγο του πεδίου f στο σημείο M(3, 1) κατά την κατεύθυνση του διανύσματος που έχει ως αρχή, την αρχή των αξόνων και ως πέρας το σημείο N(6, 5).

Απάντηση: Υπολογίζουμε τη κλίση της συνάρτησης f στο σημείο M_0

$$(\nabla f)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} \widehat{e_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \widehat{e_y} = 12\,\widehat{e_x} + 9\,\widehat{e_y}$$

και στη συνέχεια το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\overrightarrow{n_0} = \left(\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

Απάντηση

Η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$\left(D_{\overrightarrow{\mathrm{n}_0}} f\right)_{M_0} = (\nabla \mathrm{f})_{M_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{n}_0}$$

$$= (12\,\widehat{\mathrm{e}_x} + 9\,\widehat{\mathrm{e}_y})\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\widehat{\mathrm{e}_x}, \frac{5}{\sqrt{61}}\widehat{\mathrm{e}_x}\right)$$

$$= \frac{27}{\sqrt{61}}\,.$$

Απόκλισης Διανυσματικής Συνάρτησης

Ορισμός

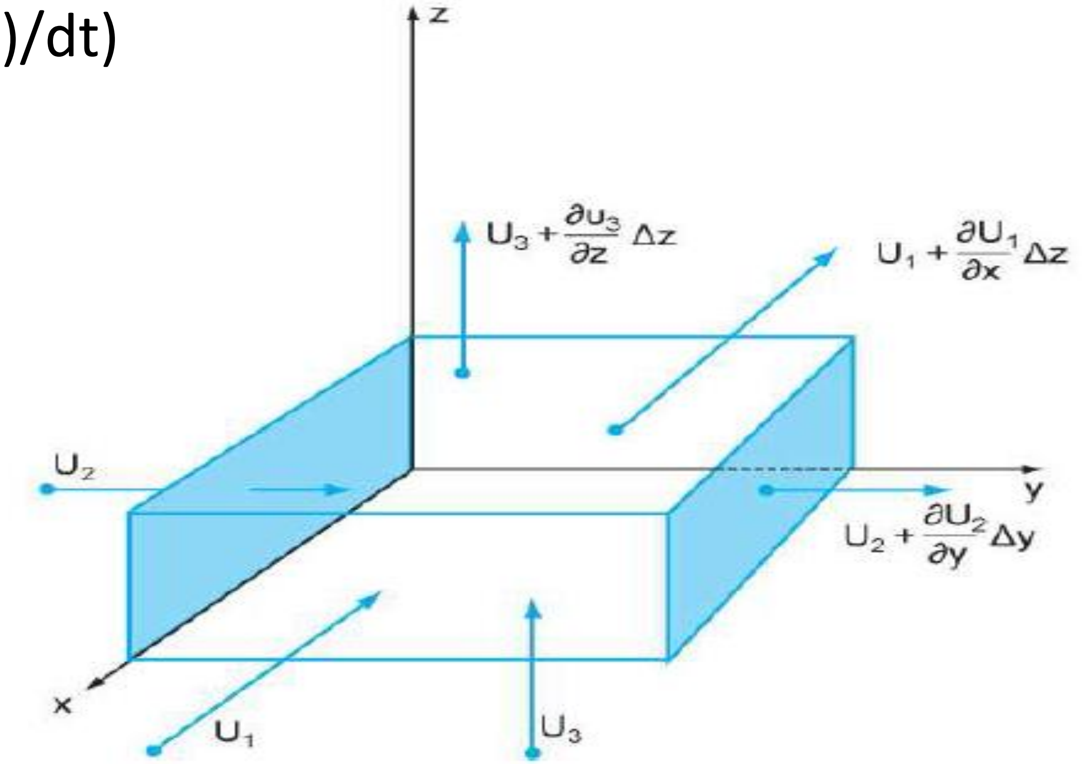
Ορίζουμε ως απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f} = f_1\hat{e}_x + f_2\hat{e}_y + f_3\hat{e}_z$ την αριθμητική συνάρτηση

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη φυσική ερμηνεία της απόκλισης.
Θεωρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο που περιγράφει η $\vec{f}$ είναι η ταχύτητα ενός ρευστού, δηλαδή $\vec{U}(x, y, z) = U_1(x, y, z)\,\hat{e}_x + U_2(x, y, z)\,\hat{e}_y + U_3(x, y, z)\hat{e}_z$.

Φυσική Ερμηνεία Απόκλισης 1/3

Αν ένα παραλληλόγραμμο με όγκο $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ (βλέπε Σχήμα) βρίσκεται μέσα στο ρευστό (ας υποθέσουμε ότι έχει σταθερή πυκνότητα ρ_0 , μεταβολή της μάζας βρίσκεται μέσα στο κουτί ($dm/dt = \rho_0 d(\Delta V)/dt$)



Φυσική Ερμηνεία Απόκλισης 2/3

Η ολική μεταβολή είναι $\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}(\Delta y \Delta z) + \Delta x \frac{d\Delta y}{dt}\Delta z + (\Delta y \Delta z)\frac{d\Delta z}{dt}$.

Η μεταβολή του Δx υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{d\Delta x}{dt}(\Delta y \Delta z) = [U_1(x + \Delta x, y, z) - U_1(x, y, z)](\Delta y \Delta z).$$

Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor τη συνιστώσα της ταχύτητας και κρατάμε όρους πρώτης τάξης

$$\frac{d\Delta x}{dt}(\Delta y \Delta z) = [U_1(x, y, z) + \frac{\partial U_1}{\partial x}\Delta x - U_1(x, y, z)]\,(\Delta y \Delta z)$$

$$= \frac{\partial U_1}{\partial x}\Delta V\,.$$

Φυσική Ερμηνεία Απόκλισης 3/3

Όμοια αναπτύσσουμε και τις ολικές μεταβολές των Δx και Δy και η ολική μεταβολή του όγκου παίρνει τη μορφή

$$\frac{d(\Delta V)}{dt} = [\frac{\partial U_{1(x,y,z)}}{\partial x} + \frac{\partial U_{2(x,y,z)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{3(x,y,z)}}{\partial z}]\Delta V$$

$$= (\nabla \cdot \overrightarrow{U})\Delta V \,.$$

Αν η απόκλιση της ταχύτητας είναι μηδέν $\nabla \cdot \overrightarrow{U} = 0$ τότε ο στοιχειώδης όγκος ΔV παραμένει σταθερός όταν κινείται με το ρευστό. Το διανυσματικό πεδίο λέγεται ασυμπίεστο αν η απόκλισή του είναι ίση με μηδέν.

Μεταφορική Παράγωγος

Αν υποθέσουμε, ότι το σύστημα αναφοράς κινείται με το ρευστό, η ολική μεταβολή της αριθμητικής συνάρτησης R(x(t), y(t), z(t), t) θα είναι

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{U}} \cdot \nabla \mathrm{R}$$

παράγωγος αυτή είναι γνωστή και ώς ‘μεταφορική παράγωγος’.

Στροφή Διανυσματικής Συνάρτησης

Ορισμός

Εκτός από την απόκλιση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή ∇ για να ορίσουμε μία ακόμα διανυσματική συνάρτηση, τη στροφή. Αυτή ορίζεται ως εξής

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \widehat{e_x} & \widehat{e_y} & \widehat{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \widehat{e_x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \widehat{e_y}$$

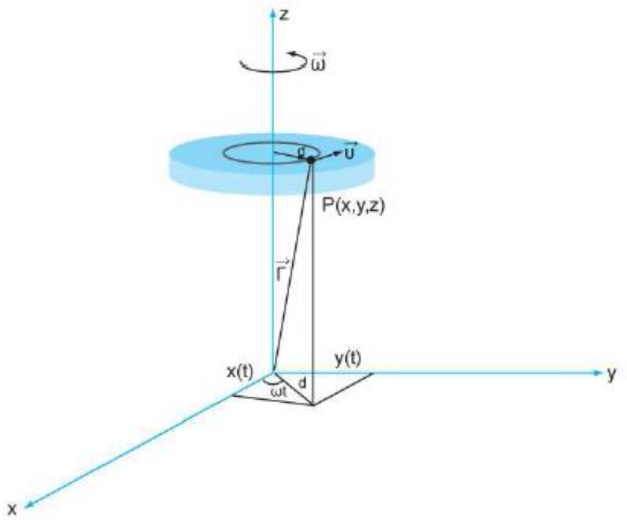
$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \widehat{e_z}$$

Φυσική Ερμηνεία Στροφής 1/2

Μπορούμε να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία της στροφής. Ας φανταστούμε την ύπαρξη ενός διανυσματικού πεδίου

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\, \widehat{e}_z$$

το οποίο για ω=σταθερό περιγράφει το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού που εκτελεί περιστροφική κίνηση ως στερεό (βλέπε Σχήμα). ΄Ενα τέτοιο διανυσματικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί από το διάνυσμα $\vec{r} = (\alpha \cos\omega t)\widehat{e}_x + (\alpha \sin\omega t)\widehat{e}_y + z\, \widehat{e}_z$.



Φυσική Ερμηνεία Στροφής 2/2

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\vec{\nabla} \times \dot{\vec{r}} = 2\omega\, \hat{e}_z$$

και να εξηγήσουμε γιατί η στροφή του πεδίου ταχυτήτων είναι ένα μέτρο της γωνιακής περιστροφής του κυκλικού δίσκου. Τα διανυσματικά πεδία με στροφή μηδέν ($\nabla \times \vec{F} = 0$) ονομάζονται αστρόβιλα. Το μαγνητικό πεδίο στο κενό είναι αστρόβιλο, επειδή οι μαγνητικές γραμμές είναι ευθείες, ενώ η παρουσία ρεύματος αναγκάζει τις μαγνητικές γραμμές να καμπυλωθούν (ένα παράδειγμα αποτελεί το μαγνητικό πεδίο γύρω από έναν ευθύγραμμο αγωγό ρεύματος). Η στροφή του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού ρευματος

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \sim J \qquad (6)$$

*** Το βαρυτικό πεδίο της Γης, όπως θα δείξουμε και στο παράδειγμα που ακολουθεί είναι αστρόβιλο.**

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι, ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο.

Απόδειξη: ΄Ενα πεδίο δυνάμεων $\vec{\mathrm{F}}$ λέγεται κεντρικό αν η δύναμης $\vec{\mathrm{F}}$ = f(r) $\vec{\mathrm{e}_{\mathrm{r}}}$. Ισχύει επίσης, η ταυτότητα (βλέπε Παράρτημα Α)

$$\nabla \times f\, \widehat{e_r} = f\, \nabla \times \widehat{e_r} + \nabla f \times \widehat{e_r} \, .$$

Εύκολα αποδεικνύονται ότι, $\nabla \times \widehat{e_r} = 0$ και

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \nabla r = \frac{df}{dr} \frac{\vec{\mathrm{r}}}{r} \, .$$

΄Αρα

$$\nabla \times \vec{\mathrm{F}}(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{\mathrm{r}}}{r} \times \widehat{e_r} = 0$$

άρα το πεδίο $\vec{\mathrm{F}}$ είναι αστρόβιλο. Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα, αν παραστήσουμε γραφικά το κεντρικό πεδίο δυνάμεων.

Ιδιότητες

Μερικές ιδιότητες της στροφής είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη φυσική. Η απόδειξή τους μπορεί να αποτελέσει μια καλή άσκηση για τους αναγνώστες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

1. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\, \mathrm{f}) = 0$
2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$
3. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})$
4. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}\, (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$

Τελεστής Laplace

Ο τελεστής

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

είναι γνωστός ως τελεστής του Laplace ή Λαπλασιανή. Στο παράρτημα Α αναλύουμε τον τελεστή του Laplace σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι, το πεδίο των ελκτικών δυνάμεων της βαρύτητας γύρω απο τη μάζα M είναι ασυμπίεστο.

Απόδειξη: Η ελκτική δύναμη που ασκείται στη μονάδα της μάζας στο πεδίο βαρύτητας της μάζας M είναι

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^3}\,\hat{r}\,.$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης της μονάδας μάζας ως προς τη μάζα M και G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Αρκεί να δείξουμε ότι, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\nabla \cdot (f\,\vec{r}) = \vec{r} \cdot \nabla f + f\,\nabla \cdot \vec{r}$$

ή

$$\nabla \cdot \vec{F} = \vec{r} \cdot \nabla\left(\frac{GM}{r^3}\right) + \left(\frac{GM}{r^3}\right)\nabla \cdot \vec{r} = \frac{3GM}{r^3} - \frac{3GM}{r^3} = 0$$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. *Κεφ. 6*
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 11*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης