ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 10η : Εφαρμογές Διανυσματικών Συναρτήσεων

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σκοποί ενότητας

Η ενότητα αυτή αποτελεί συνέχεια της προηγούμενης και αυτό που επιχειρούμε είναι να εφαρμόσουμε μέσα από παραδείγματα την θεωρία που είδαμε στην ενότητα 9. Οι ενδιαφερόμενοι εξοικειώνονται με τις εξισώσεις και την γεωμετρική ερμηνεία του επιπέδου και της ευθείας σε επιφάνειες και καμπύλες στον τρισδιαστατο χώρο.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Κάθετη ευθεία μιας επιφάνειας στο χώρο R^3
2. Εφαπτόμενη ευθεία και κάθετο επίπεδο μιας καμπύλης στο χώρο R^3

Κάθετη ευθεία μιας επιφάνειας στο χώρο R^3

Εξίσωση κάθετης ευθείας

Η διανυσματική εξίσωση της κάθετης ευθείας στο επίπεδο f(x, y, z) = 0 ορίζεται από τη σχέση

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \times \nabla f = 0 \qquad (2)$$

διότι το τυχαίο διάνυσμα θέσεως $(\vec{r} - \vec{r_0})$ είναι παράλληλο προς το ∇f. Η σχέση (2) παίρνει την απλούστερη μορφή

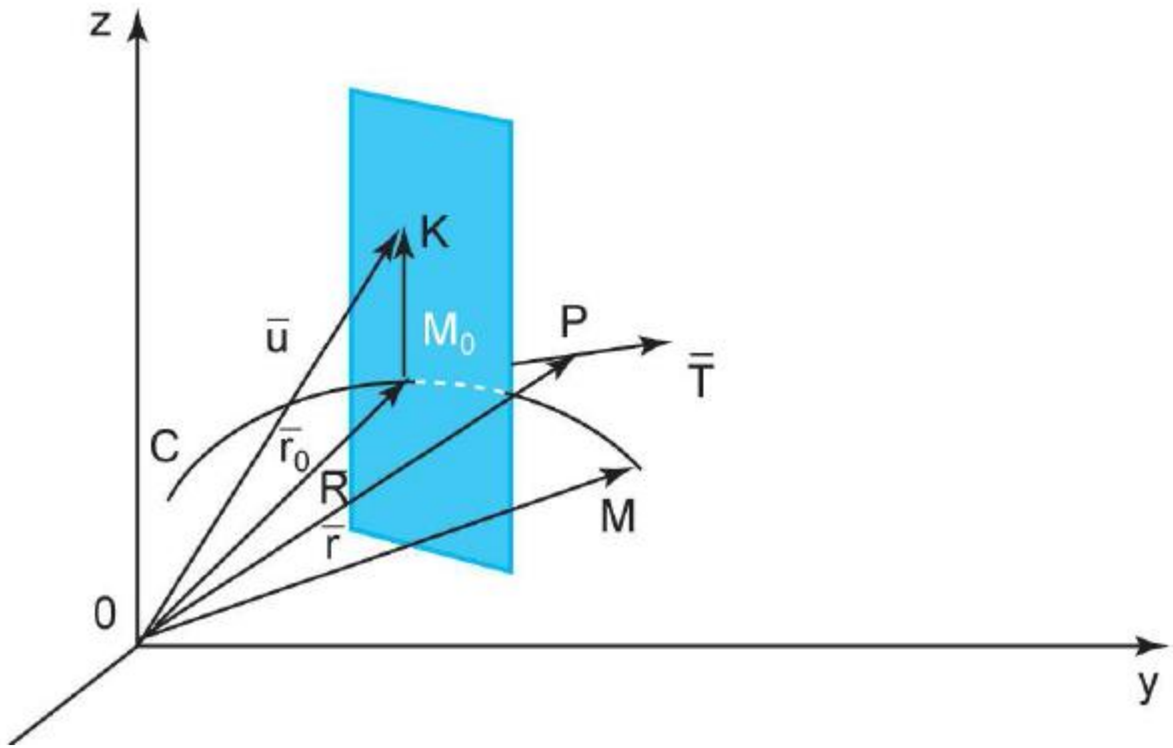
$$\frac{(x-x_o)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M0}} = \frac{(y-y_o)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M0}} = \frac{(z-z_o)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M0}} \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) περιγράφει την εξίσωση της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια f(x, y, z) = 0 στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Εφαπτόμενη ευθεία και κάθετο επίπεδο μιας καμπύλης στο χώρο R^3

Εισαγωγή 1/2

Έστω f(t), g(t), h(t) οι παραγωγίσιμες παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης C στο χώρο R^3. Θα αναζητήσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$.



Εισαγωγή 2/2

Αν $\vec{R} = f(t)\,\hat{e}_x + g(t)\,\hat{e}_y + h(t)\,\hat{e}_z$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου της καμπύλης, τότε το διάνυσμα $\vec{T_o} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{Mo}$ είναι εφαπτόμενο της καμπύλης στο M_0. Αν $\vec{r}$ και $\vec{r_o}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων $M(x, y, z)$ και $M_0(x_0, y_0, z_0)$, (βλέπε Σχήμα) αντίστοιχα, τότε το διάνυσμα της εφαπτομένης $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r_o}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{T_o}$.

Εξίσωση εφαπτόμενης καμπύλης

Αρα έχουμε

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{T_o} = 0,$$

που είναι οι εξισώσεις της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο M_0. Η παραμετρική της μορφή δίνεται από τη σχέση

$$\frac{(\mathrm{x} - \mathrm{x_o})}{\mathrm{f}'(t)} = \frac{(\mathrm{y} - \mathrm{y_o})}{g'(t)} = \frac{(\mathrm{z} - \mathrm{z_o})}{h'(t)}$$

Εξίσωση κάθετου επιπέδου

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε, ότι η εξίσωση του κάθετου επιπέδου της καμπύλης στο σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι η

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{T_o} = 0,$$

ή

$$(x - x_0)\, f'(t) + (y - y_0)\, g'(t) + (z - z_0)\, h'(t) = 0.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίο τέμνει κάθετα την καμπύλη $T(t)=3t^2\,\hat{e}_x+(5t+5)\,\hat{e}_y+t^3\,\hat{e}_z$ στο σημείο $t=1$.

Λύση:

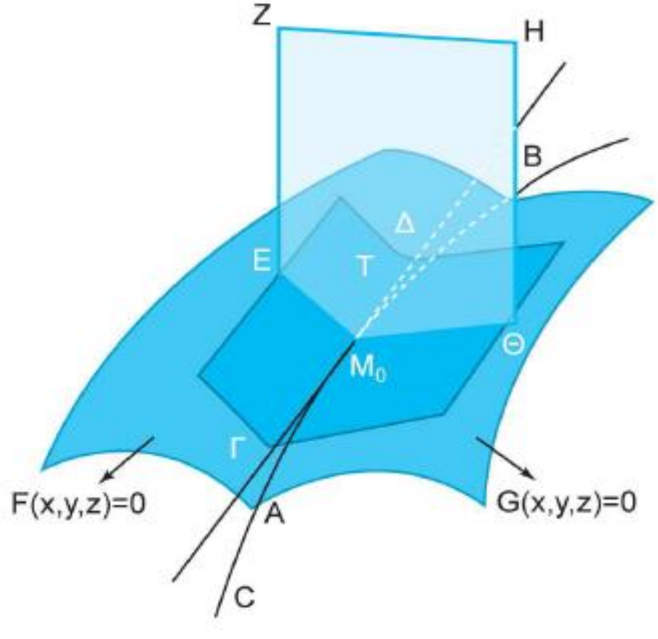
Α) Υπολογίζουμε το $\overrightarrow{T_o} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=1} = 6t\,\hat{e}_x+5\,\hat{e}_y+3t^2\,\hat{e}_z = 6\hat{e}_x+5\,\hat{e}_y+3\hat{e}_z$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$6(x-3)+5(y-10)+3(z-1)=0$$

Εξίσωσεις σε τομή επιπέδων 1/3

Τέλος, είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης και του κάθετου επιπέδου στο σημείο M_0 της καμπύλης C_2 που σχηματίζει η τομή των επιπέδων F(x, y, z) = 0 και G(x, y, z) = 0.



Σχήμα: Η εφαπτομένη και το κάθετο επίπεδο στη καμπύλη που σχηματίζεται από τη τομή των δύο επιπέδων

Εξίσωσεις σε τομή επιπέδων 2/3

Η εφαπτομένη στη καμπύλη C_2 στο σημείο M_0 θα είναι ταυτόχρονα και η τομή των δύο εφαπτόμενων επιπέδων στο σημείο M_0, δηλαδή του επιπέδου .

$$(x - x_o)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + (y - y_o)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + (z - z_o)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$$

Και

$$(x - x_o)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + (y - y_o)\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 + (z - z_o)\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 = 0$$

Εξίσωσεις σε τομή επιπέδων 3/3

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στην τομή των δύο επιπέδων προκύπτει από τη λύση του παραπάνω συστήματος,

$$\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x_o})}{\left[\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right]_{\mathrm{M_0}}}=\frac{(\mathrm{y}-\mathrm{y_o})}{\left[\frac{D(F,G)}{D(x,z)}\right]_{\mathrm{M_0}}}=\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{z_o})}{\left[\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right]_{\mathrm{M_0}}}$$

ενώ αντίστοιχα του κάθετου επιπέδου στην τομή τους θα είναι

$$(x-x_o)\left[\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right]_{\mathrm{M_0}}+(y-y_o)\left[\frac{D(F,G)}{D(x,z)}\right]_{\mathrm{M_0}}+(z-z_o)\left[\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right]_{\mathrm{M_0}}=0$$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. *Κεφ. 6*
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 9,10*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης