ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 11η : Μέγιστα και Ελάχιστα

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Η αναζήτηση των άκρων τιμών και ο χαρακτηρισμός τους σε μέγιστα, ελάχιστα ή σαγματικά σημεία είναι το αντικείμενο της ενότητας αυτής. Παράλληλα μελετάμε τα δεσμευμένα ακρότατα και συζητάμε τη χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange. Είναι πολύ σημαντικό οι ενδιαφερόμενοι για το μάθημα αυτό να εργαστούν στις εφαρμογές των ακροτάτων στη φυσική.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Αναγκαίες συνθήκες για ακρότατα
2. Ικανή συνθήκη για ακρότατες τιμές
3. Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών
4. Ακρότατα πεπλεγμένων συναρτήσεων
5. Ακρότατα υπό συνθήκη

Αναγκαίες συνθήκες για ακρότατα

Εισαγωγή

Ο υπολογισμός των ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης αποτελεί μία από τις πιο χρήσιμες εφαρμογές του διαφορικού λογισμού. Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη των συναρτήσεων δύο μεταβλητών, $z = f(x, y)$. Θα μελετήσουμε τις αναγκαίες συνθήκες για να έχει η συνάρτηση f ακρότατα στο πεδίο ορισμού της. Εαν $f(x, y)$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση πραγματικών μεταβλητών ορισμένη στον τόπο $D \subseteq R^2$ και $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο του τόπου D τότε ορίζουμε το **σχετικό ή τοπικό** μέγιστο ή ελάχιστο ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1: **Αν υπάρχει περιοχή** $\pi\ (M_0, \delta$ **), για όλα τα σημεία της οποίας** $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, **τότε λέμε ότι η f έχει σχετικό μέγιστο, αντίθετα αν** $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ **λέμε ότι, η f έχει σχετικό ελάχιστο.**

Θεώρημα

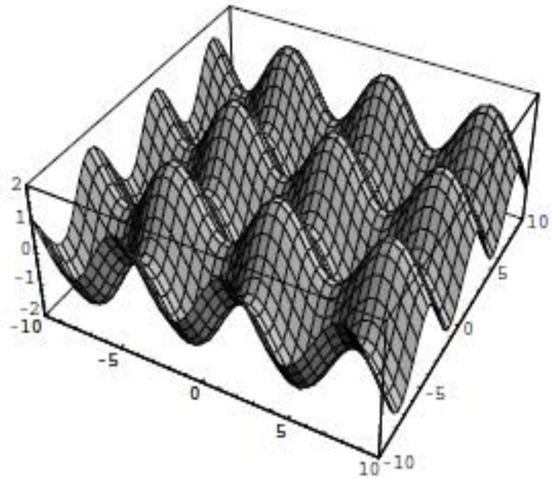
Αν η συνάρτηση $f : D \rightarrow R$, όπου $D \subseteq R^2$, είναι ορισμένη και διαφορίσιμη στον τόπο D, τότε μία αναγκαία συνθήκη για να έχει η συνάρτηση αυτή ακρότατο στο σημείο $M_0 \in D$ είναι να μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης στο σημείο αυτό.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εύκολο να γίνει γεωμετρικά. Έχουμε ήδη συζητήσει ότι, το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο M_0 της συνάρτησης $z = f(x, y)$ περιγράφεται από τη σχέση.

$$(z - z_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_o) \tag{1}$$

Συνέχεια Θεωρήματος

Αν το $(\partial f/\partial x)_0 = (\partial f/\partial y)_0 = 0$, τότε $z = z_0$, που σημαίνει ότι το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο (x, y) και όλα τα σημεία στην περιοχή του (x_0, y_0) βρίσκονται πάνω ή κάτω από το $z = z_0$



Σχήμα: Η επιφάνεια $z = \sin x + \sin y$ παρουσιάζει πολλά ακρότατα σημεία στο διαστημα $[-10 < x < 10, -10 < y < 10]$.

Κρίσιμα Σημεία

Είναι φανερό ότι, η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή για την ύπαρξη ακρότατου μιας συνάρτησης. Τα ακρότατα πρέπει να τα αναζητήσουμε μεταξύ των λύσεων του συστήματος.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0 \qquad (2)$$

αλλά κάθε λύση του συστήματος δεν είναι και ακρότατο της συνάρτησης f στο σημείο M_0. ΄Ενας άλλος τρόπος παρουσίασης των εξισώσεων (2) είναι $(\nabla f)_0 = \vec{0}$.

Τα σημεία μιας επιφάνειας z = f(x, y) που αποτελούν λύση του συστήματος των εξ. (2) λέγονται **κρίσιμα σημεία** ή **σημεία στάσεως**. Άρα τα ακρότατα μιας συνάρτησης f(x, y) είναι κρίσιμα σημεία της επιφάνειας z = f(x, y).

Γενίκευση

Μπορούμε να γενικεύσουμε όλα τα παραπάνω και σε περισσότερες συντεταγμένες. Έτσι η συνθήκη (2) παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0\; \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0 \qquad (3)$$

αν η συνάρτηση f(x, y, z), κ.ο.κ.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^4+16y^4-2(x-2y)^2$.

Απάντηση:

Έχουμε $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 4x^3 + 4(x-2y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} - 2\mathrm{y} = x^3$

Και $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 64y^3 - 8(x-2y) \Leftrightarrow \mathrm{x} - 2\mathrm{y} = -8y^3$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτουν οτι τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης f είναι τα (0,0) , ($-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$), ($\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές

Συνθήκη

Η συνθήκη

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$$

αν ισχύει στο σημείο M_0 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f(x, y), εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση θα έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο, αλλά δεν καθορίζει το είδος του δηλαδή, αν είναι μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό. Είναι φανερό ότι, για να καθορίσουμε το είδος του κρισίμου σημείου στο M_0 χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση.

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές 1/5

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση f(x, y) σε σειρά Taylor στη γειτονιά του (x_0, y_0) έχουμε

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \mathrm{h} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 f(x_o, y_o) + \boldsymbol{Q}_3$$

όπου το $\boldsymbol{Q}_3$ συμβολίζει όρους ανώτερης τάξης. Το $\boldsymbol{Q}_3$ είναι αμελητέα αν τα h, k << 1, γιατί είναι άθροισμα πολυώνυμων τρίτης ή ανώτερης τάξης.

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές 2/5

Είναι φανερό ότι, για να καθορίσουμε τη φύση του κρίσιμου σημείου, αρκεί να προσδιορίσουμε το πρόσημο της διαφοράς

$$f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left\{h^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\right\}.$$

Το πρόσημο της ποσότητας μέσα στην αγκύλη καθορίζει την τιμή του Δf.

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές 3/5

Αν ορίσουμε τις σταθερές

$$A = (\partial^2 f / \partial x^2)_0$$

$$B = (\partial^2 f / \partial x \, \partial y)_0$$

$$\Gamma = (\partial^2 f / \partial y^2)_0$$

και $\Delta = B^2 - A\Gamma$ ή ισοδύναμα

$$\Delta = -\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = (f_{xy})^2 - f_{xx}\, f_{yy}$$

τότε η σχέση (7.4) παίρνει τη μορφή

$$\Delta f = (1/2)k^2[AW^2 + 2BW + \Gamma]$$

όπου $W = (h/k)$.

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές 4/5

Έτσι το πρόσημο της f θα είναι το ίδιο με το πρόσημο της έκφρασης

$$\mathcal{D} = AW^2 + 2BW + \Gamma$$

$$= A\left[W^2 + 2W\frac{B}{A} + \frac{\Gamma}{A}\right]$$

$$= A\left[W^2 + 2W\frac{B}{A} + \left(\frac{B}{A}\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{\Gamma A}{A^2}\right]$$

$$= A\left[\left(W + \frac{B}{A}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\right)^2\right]$$

Ικανή Συνθήκη για ακρότατες τιμές 5/5

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. $\Delta < 0$. Το πρόσημο του A καθορίζει το πρόσημο του Δf. Αν το A είναι θετικό έχουμε ελάχιστο στο M_0 ενώ στην αντίθετη περίπτωση έχουμε μέγιστο. (Λόγω συμμετρίας τη θέση του A μπορεί να πάρει το Γ.)
2. $\Delta > 0$, το τριώνυμο $\mathbb{D} = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. Η τιμή Δf εξαρτάται από το W, άρα η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. **Το σημείο αυτό είναι σαγματικό**.
3. $\Delta = 0$, το τριώνυμο $\mathbb{D} = 0$, έχει μία πραγματική ρίζα $(-B/A)$, οπότε μπορεί να μετατραπεί στο γινόμενο $A(W + B/A)^2$. ΄Αρα αν $W \neq (-B/A)$, το $\mathbb{D}$ παίρνει την τιμή του A. Για $W = -B/A$ το $\mathbb{D}$ μηδενίζεται, άρα πρέπει να διερευνήσουμε το πρόσημο του $\mathcal{Q}_3$ για την τιμή αυτή του W.

Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε σε μια σχετικά απλή διαδικασία εύρεσης των τοπικών ακροτάτων.

❶ Λύνουμε το σύστημα $\{f_x = 0, f_y = 0\}$ και βρίσκουμε τα στάσιμα ή κρίσιμα σημεία $M_i(x_i, y_i)$ της συνάρτησης.

❷ Για κάθε κρίσιμο σημείο χωριστά υπολογίζουμε τις παραστάσεις $\Delta = f^2_{xy}(x_i, y_i) - f_{xx}(x_i, y_i) f_{yy}(x_i, y_i)$ και $A = f_{xx}(x_i, y_i)$ (ή $\Gamma = f_{yy}(x_i, y_i)$). ΄Ετσι στα κρίσιμα σημεία η συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει:

⟶Σχετικό ελάχιστο αν το $\Delta < 0$ και $A > 0$ ($\Gamma > 0$),

⟶ Σχετικο μέγιστο αν το $\Delta < 0$ και $A < 0$ ($\Gamma < 0$),

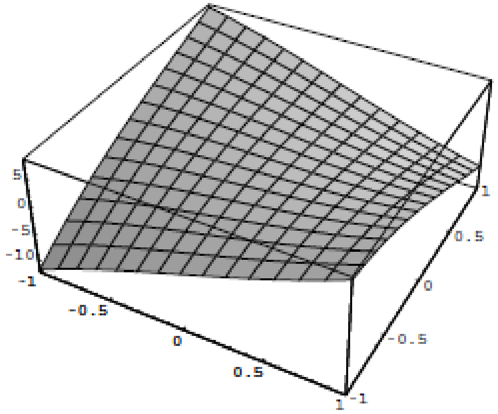
⟶ Δεν παρουσιάζει ακρότατο αν το $\Delta > 0$ (το σημείο $M(x_0, y_0)$ λέγεται σαγματικό),

⟶ Χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση αν το $\Delta = 0$. Προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημο τις διαφοράς $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ στη περιοχή του σημείου M_0

❸ Αντικαθιστώντας τις τιμές των κρίσιμων σημείων στη συνάρτηση βρίσκουμε τις ακρότατες τιμές της.

Σαγματικά Σημεία

Εκτός από τα μέγιστα και ελάχιστα συναντούμε συχνά και τα **σαγματικά σημεία**. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης στην περιοχή του σαγματικού σημείου θυμίζει το γνωστό μας σαμάρι (βλέπε Σχήμα). Στη περιοχή του σαγματικού σημείου $M_0(x_0, y_0)$ η συνάρτηση $f(x, y_0)$ παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) ενώ η συνάρτηση $f(x_0, y)$ παρουσιάζει ελάχιστο (ή μέγιστο).



Σχήμα: Η συνάρτηση $z = x^3 + y^3 - 9xy - 2y^2 + 1$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$. Το σημείο αυτό λέγεται σαγματικό.

Παράδειγμα 2

Να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της $f(x,y)=x^4+16y^4-2(x-2y)^2$.

Απάντηση:

Όπως είχαμε υπολογίσει, τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης f είναι τα $M_1(0,0)$, $M_2(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $M_3(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την έκφραση Δ για κάθε ένα από τα σημεία.Προκύπτει οτι:

το $M_1(0,0)$ χρειάζεται περισσότερη διευρεύνηση αφου $\Delta=0$,

το $M_2(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ ελάχιστο αφού $\Delta<0$ και $A > 0$ $(\Gamma > 0)$,

το $M_3(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ελάχιστο αφού $\Delta<0$ και $A > 0$ $(\Gamma > 0)$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών

Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών 1/2

Ο χαρακτηρισμός των κρισίμων σημείων σε μέγιστα ή ελάχιστα για συναρτήσεις τριών μεταβλητών είναι δυσκολότερος. Αν έχουμε ήδη εξασφαλίσει ότι το σημείο M_0 επαληθεύει το σύστημα των εξισώσεων ($f_x = 0$, $f_y = 0$, $f_z = 0$), τότε υπολογίζουμε τα πρόσημα των οριζουσών

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών 2/2

❶ $\Delta_1(x_0, y_0, z_0) > 0$, $\Delta_2(x_0, y_0, z_0) > 0$, $A > 0$, τότε η $f(x_0, y_0, z_0)$ παρουσιάζει στο σημείο Μ0 τοπικό ελάχιστο το $f(x_0, y_0, z_0)$.

❷ $\Delta_1(x_0, y_0, z_0) < 0$, $\Delta_2(x_0, y_0, z_0) > 0$, $A < 0$ τότε η $f(x_0, y_0, z_0)$ παρουσιάζει στο σημείο Μ0 τοπικό μέγιστο το $f(x_0, y_0, z_0)$.

❸ Αν όλες οι παραστάσεις Α, Δ_1, Δ_2 είναι διάφορες του μηδενός και δεν ισχύουν οι προηγούμενες συνθήκες τότε η $f(x, y, z)$ δεν παρουσιάζει ακρότατο.

❹ Αν Δ_1 ή Δ_2 είναι μηδέν προσπαθούμε να βγάλουμε συμπέρασμα κάνοντας εκτίμηση άμεσα του προσήμου της διαφοράς $f = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$

Ακρότατα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Η μελέτη των ακροτάτων της συνάρτησης z(x, y) που ορίζεται πεπλεγμένα από την εξίσωση F(x, y, z(x, y)) = 0 ξεκινά από την εύρεση των λύσεων του συστήματος $z_x = z_y = 0$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια των παραγώγων ανώτερης τάξης μπορούμε να διερευνήσουμε το χαρακτήρα των κρισίμων σημείων.

Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων σε πεπλεγμένες συναρτήσεις 1/2

Για την μελέτη των άκρων τιμών της συνάρτησης $z(x, y)$ που ορίζεται από την εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης.

Λύνουμε το σύστημα $\{F_x = 0, F_y = 0, F(x, y, z) = 0\}$ και προσδιορίζουμε, αν υπάρχουν, τις λύσεις. Αν $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ειναι μία λύση του συστήματος που συγχρόνως επαληθεύει τη σχέση $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ τότε, με βάση το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων, ορίζεται η συνάρτηση $z(x, y)$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν τα ακρότατα της πεπλεγμένης συνάρτησης z(x,y) στην έκφραση $F=x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2=0$.

Απάντηση:

Αρχικά θα εξετάσουμε εάν $F_z \neq 0$ στα πιθανά ακρότατα σημεία $M_j(x_o,y_o,z_o)$. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την ορίζουσα Δ για να καταλήξουμε στο είδος των ακροτάτων. Άρα,

$$2x + 6zz_x - 2y - 2yz_x = 0 \Longrightarrow z_x = \frac{y-x}{3z-y}$$

Ομοίως για το z_y .Τα σημεία που προκύπτουν είναι $M_1(1,1,1)$ και $M_2(-1,-1,-1)$.

Για το σημείο M_1: $z_{xx}=-1/2$, $z_{yy}=-1$, $z_{xy}=1/2$ άρα $Δ<0$ & $A>0$ → μέγιστο

Για το σημείο M_2: $z_{xx}=1/2$, $z_{yy}=1$, $z_{xy}=-1/2$ άρα $Δ<0$ & $A<0$ → ελάχιστο

Διαδικασία Εύρεσης Ακροτάτων σε πεπλεγμένες συναρτήσεις 2/2

Αν το σημείο (x_0, y_0) βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $z(x, y)$ τότε η μελέτη του χαρακτήρα (μέγιστο ή ελάχιστο) των άκρων τιμών στηρίζεται στις ακόλουθες σχέσεις:

- Αν

  $$F_z(x_0, y_0, z_0)F_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$$

  και το $F_{xx}(x_0, y_0, z_0)F_{yy}(x_0, y_0, z_0) - F_{xy}(x_0, y_0, z_0)^2 < 0$ τότε το σημείο (x_0, y_0) είναι θέση τοπικου ελαχίστου που είναι το $z(x_0, y_0) = z_0$.

- Αν

  $$F_z(x_0, y_0, z_0)F_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$$

  και το $F_{xx}(x_0, y_0, z_0)F_{yy}(x_0, y_0, z_0) - F_{xy}(x_0, y_0, z_0)^2 < 0$ τότε το σημείο (x_0, y_0) είναι θέση τοπικου μεγίστου που είναι το $z(x_0, y_0) = z_0$.

- Αν

  $$F_z(x_0, y_0, z_0)F_{xx}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

  δεν βγάζουμε συμπέρασμα με τη μέθοδο αυτή.

Ακρότατα υπό συνθήκη

Εισαγωγή

Σε πολλά φυσικά συστήματα, ζητάμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$, όταν τα x, y δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή όταν υπόκεινται σε μια επιπλέον συνθήκη $\phi(x, y) = 0$. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητάμε τη μέγιστη τιμή του δυναμικού $U = U(x, y)$ πάνω στο κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ψάχνουμε την ακρότατη τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ **υπό τη συνθήκη** $\phi(x, y) = 0$, δηλαδή θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $f(x, y(x))$ της μιάς μεταβλητής. ΄Ομοια αν αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z)$ οταν οι μεταβλητές (x, y, z) συνδέονται μεταξύ τους με το δεσμό $\phi(x, y, z) = 0$. Αν είναι εύκολο να λύσουμε την εξίσωση $\phi(x, y, z) = 0$ ως προς μία από τις μεταβλητές τις π.χ. $z(x, y)$ και στη συνέχεια την αντικαταστήσουμε στη συνάρτηση $f(x, y, z(x, y))$ τότε μετατρέπεται σε συνάρτηση δύο μεταβλητών και αναλύεται με τη μέθοδο που ήδη μελετήσαμε.

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Στην πράξη παρουσιάζονται προβλήματα στα οποία η λύση $y = \phi(x)$ δεν είναι εύκολη. Στις περιπτώσεις αυτές καταφεύγουμε στην παρακάτω μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Αν ζητάμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y)$ με δεδομένη τη συνθήκη $\phi(x, y) = 0$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\, \phi(x, y)$$

όπου ο λ θα ονομάζεται ο **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Συνθήκη Υπαρξης Κρίσιμου Σημείου

Για να υπάρχει κρίσιμο σημείο θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (6)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \varphi(x, y) \qquad (7)$$

Οι εξισώσεις (5) - (7) μπορούν επίσης να γραφούν με τη μορφή

$$\nabla f + \lambda \nabla \phi = 0.$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (5)-(7) θα δώσει τα κρίσιμα σημεία. Τα ακρότατα, αν υπάρχουν, θα βρίσκονται μεταξύ των λύσεων του συστήματος.

Στάσιμα Σημεία 1/2

Εάν μία συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$ είναι ορισμένη στο R^3, έχει συνεχείς παραγώγους και υπόκεινται σε δύο περιορισμούς $\phi_1(x, y, z) = 0$, $\phi_2(x, y, z) = 0$, τότε η συνάρτηση που πρέπει να μελετηθεί είναι η

$$F(x, y, z, \phi_1, \phi_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \phi_1(x, y, z) + \lambda_2 \phi_2(x, y, z).$$

Τα στάσιμα σημεία βρίσκονται από τη λύση των εξισώσεων $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, $F_{\lambda 1} = 0$, $F_{\lambda 2} = 0$. Ο χαρακτηρισμός των στάσιμων σημείων **αν δεν προκύπτει εύκολα από τη γεωμετρική ανάλυση της συνάρτησης** θα πρέπει να γίνει με βάση την ορίζουσα.

Στάσιμα Σημεία 2/2

$$\Delta = -\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \phi_{1x} & \phi_{2x} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \phi_{1y} & \phi_{2y} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \phi_{1z} & \phi_{2z} \\ \phi_{1x} & \phi_{1y} & \phi_{1z} & 0 & 0 \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} & \phi_{2z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Αν η Δ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ έχουμε ελάχιστο, ενώ αν $\Delta < 0$ μέγιστο.

Ακρότατα Σημεία

Αν μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης f(x, y, z), η οποία είναι ορισμένη στο R^3, έχει συνεχείς παραγώγους και υπόκειται στο δεσμό

$$\phi(x, y, z) = 0$$

τότε λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, $F_\lambda = 0$. Αν το σημείο $M(x_0, y_0, z_0,)$ είναι κρίσιμο σημείο, υπολογίζουμε τις ορίζουσες στο M_0

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \phi_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \phi_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \phi_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & \phi_y \\ F_{zy} & F_{zz} & \phi_z \\ \phi_y & \phi_z & 0 \end{vmatrix}$$

Αν $\Delta_1 < 0$ και $\Delta_2 < 0$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο M, ενώ αν $\Delta_1 < 0$ και $\Delta_2 > 0$ παρουσιάζει μέγιστο.

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν τα ακρότατα της εξίσωσης $f(x,y)=x^2+y^2$ όταν αυτά είναι σημεία του κύκλου $(x-1)^2+(y-1)^2=1/4$.

Απάντηση:

Εφόσον, τα μέγιστα και ελάχιστα της εξίσωσης υπόκεινται σε συνθήκη, σύμφωνα με τον Lagrange μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα εξίσωση και να αναζητήσουμε τα ακρότατα εκείνης της συνάρτησης. Άρα,

$$F(x,y)= x^2+y^2+\lambda[(x-1)^2+(y-1)^2-1/4]$$

Για να υπάρχει κρίσιμο σημείο θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις,(5),(6) και (7). Οι λύσεις του συστήματος που προκύπτει δίνουν τα σημεία $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}, 1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ και $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}, 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 7
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 11*

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης