



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά II **Ασκήσεις 7^{ης} Ενότητας**

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ενότητα 7η: Σύνθετες Συναρτήσεις

1. Υλικό σημείο μάζας $m = 1$ κινείται από την επίδραση του δυναμικού.

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y}{1 + y}$$

Να βρεθεί πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να περιγράφει την κίνηση στη περιοχή του σημείου $P(-1, 0)$. Ποιά θα είναι η μορφή της δύναμης $\vec{F} = (F_x, F_y)$ που ενεργεί στο υλικό σημείο στη γειτονιά του σημείου P , αν οι συνιστώσες της δύναμης περιγράφονται από τις σχέσεις

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

2. Η στροφορμή ενός σωματιδίου με μάζα $m = 1$ δίνεται από τη σχέση

$$L = xu_y - yu_x$$

Όπου u_x, u_y είναι οι ταχύτητες που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες x, y . Ζητείται να εκφραστεί η στροφορμή του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες ρ, ϕ

3. (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = x^5 y^2 e^{x/y}$. Να δειχθεί ότι : $xf_x + yf_y = 7f$
 (ii) Να βρεθούν οι ομογενείς συναρτήσεις $f(x, y)$ οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα $yf_x = xf_y$.

4. Άν $w = f(x^2 - y^2)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση

$$y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

5. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x, y, z) = -y + \phi(x^2 + y^2, ze^{-x})$

όπου ϕ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + yz \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = x$$

6. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = x + y, v = xy$, μετασχηματίστε τη διαφορική εξίσωση

$$(x - y) \left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 2xy \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

σε αντίστοιχη που θα περιέχει τις μεταβλητές u και v .

7. Αν η πυκνότητα $\rho(t, x, y, z)$, παραμένει σταθερή, να προσδιορισθεί η μεταβολή της ως προς το χρόνο.