Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ασκήσεις 9ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 9η: Διανυσματικές Συναρτήσεις

1. Να υπολογισθεί η απόκλιση και στροφή των συναρτήσεων (α) $\vec{F}_1$ = r^m $\widehat{e_r}$, (β) $\vec{F}_2 = \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})$, όπου το $\vec{a}$ =σταθερό διάνυσμα και, (γ) $\vec{F}_3 = xyz(e^x \, \widehat{e_x} + e^y \, \widehat{e_y} + e^z \, \widehat{e_z})$.

2. Να προσδιορισθεί η παράγωγος της $\phi(x, y, z) = 4x^2y + y^2z$ στο σημείο P_0 (0, 1, 2) κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης $\vec{r}$ (t) = 3 cos t $\widehat{e_1}$+ 3 sin t $\widehat{e_2}$ + 4t $\widehat{e_3}$.

3. Να προσδιοριστεί η κλίση της απόκλισης της $\vec{F}(x, y, z) = 2e^x \cos y \, \widehat{e_1} + e^x \sin y \, \widehat{e_2} + e^z \, \widehat{e_3}$.

4. ΄Εστω ότι τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{E}$ αντιστοιχούν στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που διαπερνά ένα φορτισμένο ρευστό. Σύμφωνα με τις εξισώσεις Maxwell , έχουμε

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \text{ και } \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Στην περίπτωση ρευστού υψηλής αγωγιμότητας το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται από το νόμο του Ohm , $\vec{E}=-\vec{u} \times \vec{E}$, όπου $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα το ρευστού. Τότε, αν $\bar{B} = B_2 \, \bar{e}_2$ και $\bar{u} = u_1 \, \bar{e}_1$, με $B_2 = B_2(x_1, x_2, x_3)$ και $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = B_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \bar{e}_1 - \left(B_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) \bar{e}_2$$

5. Η συμπεριφορά ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις εξισώσεις Maxwell. Σύμφωνα με τις τελευταίες, σε ένα μίγμα ηλεκτρονίων και πρωτονίων μηδενικού συνολικού φορτίου, έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} \quad \text{και} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

όπου $\vec{E}$, $\vec{B}$ είναι τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα, ενώ $\vec{J}$ είναι αυτό του ηλεκτρικού ρεύματος. Επίσης, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται μέσω του νόμου του Ohm

$$\vec{E} = -\vec{\mathrm{u}} \times \vec{B}$$

όπου $\vec{\mathrm{u}}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του φορτισμένου ρευστού που ¨φιλοξενεί¨ το πεδίο. Να αποδειχθεί ότι

$$\vec{\omega} \cdot \vec{B} = \vec{u} \cdot \vec{J}$$

με $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ εξ ορισμού. Υπενθυμίζεται η ταυτότητα:

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathrm{A}} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \vec{\mathrm{A}} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right).$$

6. Θεωρούμε τη διαυσματική συνάρτηση

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{3} + y^3\right)\widehat{e_{\mathrm{x}}} + \left(\frac{y^3}{3} - \lambda^2 y + z^4\right)\widehat{e_{\mathrm{y}}} + \left(2x + 3y + \frac{z^3}{3}\right)\widehat{e_{\mathrm{z}}}$$

Να σχεδιασθεί η επιφάνεια για τη οποία η απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathrm{F}}$ είναι μηδέν για κάθε τιμή των μεταβλητών x, y, z. Ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της περιστροφής ($\vec{\omega}$) ενός ιδανικού ρευστού, με γραμμική ταχύτητα $\vec{\mathrm{u}}$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{\mathrm{u}} \times \vec{\omega})$$

Εστω ότι $\vec{\mathrm{u}} = u_x \overrightarrow{\mathrm{e_x}} + u_y \overrightarrow{\mathrm{e_y}}$ και ~ω = $\omega_z \overrightarrow{\mathrm{e_z}}$, με $u_x = u_x(\mathrm{x})$, $u_y = u_y(\mathrm{y})$ και $\omega_z = \omega_z(\mathrm{z})$. Τότε, γνωρίζοντας ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$, να επαναπροσδιορίσετε τη μορφή τη παραπάνω σχέσης και να αποδείξετε ότι ο ρυθμός περιστροφής ενός διαστελλόμενου ρευστού ελαττώνεται με τον χρόνο.

7. Θεωρούμε ρευστό πυκνότητας ρ = ρ(t, x, y, z) σε βαρυτικό δυναμικό Φ= Φ(t, x, y, z). ΄Εστω τυχαίο σωματίδιο του ρευστού με συντεταγμένες (x, y, z) και ταχύτητα $\vec{\mathrm{u}} = \vec{\mathrm{u}}$ (t, x, y, z). ΄Εστω επίσης ότι H = $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{u}})/3$ είναι η μέση απόκλιση της ταχύτητας του ρευστού. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$$

Επίσης, με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla}[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})^2$$

και των εξισώσεων Euler ($d\vec{u}/dt = -\vec{\nabla}\Phi$) κα Poisson($\nabla^2\Phi = \rho$), να αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{1}{3}\rho$$

8. (α) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας με ακτίνα r στο σημείο $A(a_1, a_2, a_3)$. (β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ στο σημείο A(1, 0, 1).

9. (α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = e^{x^2 - y^2 + z^2}$$

κατά τη διεύθυνση του διανύσματος

$$\vec{u} = \hat{e_x} + \hat{e_y} - 2\hat{e_z}$$

(β) Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η f έχει μέγιστο ρυθμό μεταβολής στο σημείο P(−1, 1, 1) και ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής.

10. Να υπολογισθεί η Λαπλασιανή της διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{F} = x^2y^2z^2\vec{r}$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσεως.

11. Να υπολογισθεί η συνθήκη που πρέπει να επαληθεύουν ο κυματάρυθμος $\vec{k}$ και η γωνιακή ταχύτητα ω για να είναι η διανυσματική συνάρτηση $\vec{A} = \vec{A}_0\, e^{(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)}$ λύση της εξίσωσης (**κυματική εξίσωση**)

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

(β) Σχολιάστε την φυσική σημασία αυτών των αποτελεσμάτων.