Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Απαντήσεις 4ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 4η: Όρια και Συνέχεια

1. Για να είναι η συνάρτηση f(x, y) συνεχής θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y) = f(0, 0).$$

Η συνάρτηση (f(x, y)) αναλύεται σε γινόμενο μιας μηδενικής $f_1 = (x^2+y^2)$ και μιάς φραγμένης $f_2 = (\sin(1/x)+\sin(1/y)$ άρα το όριο υπάρχει και είναι το μηδέν. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής.

2. Για να υπολογίσουμε το όριο πλησιάζουμε την αρχή των αξόνων με δύο διαφορετικές καμπύλες x = y =z = t ⇒ $\vec{r} = t\ \widehat{e_x} + t\ \widehat{e_y} + t\ \widehat{e_z}$ και το όριο είναι 1/3, ενώ αν την προσεγγίσουμε με την καμπύλη x = y = −z ⇒ $\vec{r} = t\ \widehat{e_x} + t\ \widehat{e_y} - t\ \widehat{e_z}$ το όριο είναι −1. Συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

3. Για να εξετάσουμε το όριο χρησιμοποιούμε τα διαδοχικά όρια. ΄Αρα

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin(x+\ y^2)}{x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

αντιστρέφοντας την σειρά έχουμε

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x+\ y^2)}{x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$$

4. Χωρίζουμε την συνάρτηση σε δύο συναρτήσεις

$$\left(\frac{xy^3}{x^2+y^3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}\right) = f_1 f_2$$

Για την f_1 έχουμε $y^3 \le y^3 + x^2$ άρα

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^3}-0\right| \le |x| \le \delta \sim \varepsilon$$

(τετραγωνική περιοχή σημείου) άρα το όριο είναι το μηδέν. Για το f_2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Συμπεραίνουμε ότι το όριο είναι το μηδέν.

5. Κάνουμε το μετασχηματισμό u = x − 1, v = y − 2,w = z + 3 και το όριο μετατρέπεται

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{uv^2w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

Είναι εύκολο από εδώ και πέρα να κάνουμε έναν ακόμα μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες για να καταλήξουμε στο γινόμενο μιας μηδενικής συνάρτησης (r → 0) με μία φραγμένη και να συμπεραίνουμε ότι το όριο είναι το μηδέν

6. (α) Η συνάρτηση μετασχηματίζεται στην

$$\frac{x^2}{y^4}e^{\frac{-x^2}{y^4}}\sqrt{x}-\sqrt{1-y}$$

αντικαθιστώντας το $y^4 = mx^2$ καταλήγουμε στη σχέση $\frac{1}{m}e^{-1/m}$ όταν το x → 0. Συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

(β) Ακολουθώντας δύο διαφορετικές καμπύλες (ι) y = x έχουμε

f_2 (x, x) =

$$\left(x-\frac{x}{2x^2}\right)\frac{x^3}{(x^2+y^4)^3} = \left(\frac{2x-1}{2x}\right)\left(\frac{1}{x^3(1+x^2)^3}\right) \sim -\frac{1}{x^4}$$

Πολύ κοντά στο μηδέν θα πλησιάζει το $-\infty$. Αν πλησιάσουμε την αρχή των αξόνων με την ευθεία y = −x

$$f_2\,(x, -x) = \left(x - \frac{x}{2x}\right)\frac{x^3}{(x^2+y^4)^3} = \left(\frac{2x+1}{2x^2}\right)\left(\frac{1}{x^3(1+x^2)^3}\right) \sim \frac{1}{x^4}$$

και πολύ κοντά στο μηδέν πλησιάζει το $+\infty$. Το συμπέρασμά μας είναι ότι το όριο δεν υπάρχει.

7. Μετασχηματίζω τη συνάρτηση $\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$ σε πολικές συντεταγμένες :

$$\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p} = \frac{(r\cos\theta)^m(r\sin\theta)^n}{(r^2)^p} = \frac{r^{m+n}\cos^m\theta\,\sin^n\theta}{r^{2p}} =$$

$$r^{m+n-2p}\cos^m\theta\,\sin^n\theta\,,$$

με $x=r\cos\theta$, $y= r\sin\theta$, $r^2 = x^2+ y^2$.

Αν m+n-2p=0 τότε η συνάρτηση θα είναι η $\cos^m\theta\,\sin^n\theta$ οπότε το όριο όταν το $r\longrightarrow 0$ θα είναι απροσδιόριστο. Αν m+n-2p < 0 τότε θα ισχύει για τη συνάρτηση $\frac{1}{r^{|m+n-2p|}}\cos^m\theta\,\sin^n\theta$ οπότε το όριο όταν το $r\longrightarrow 0$, το $\frac{1}{r^{|m+n-2p|}}\cos^m\theta\,\sin^n\theta \to \infty$ οπότε το όριο της συναρτησης θα είναι $-\infty$ αν $\cos^m\theta\,\sin^n\theta = 0$. Τέλος, όταν m+n-2p > 0, το $r^{m+n-2p} \to 0$ και αφού το $\cos^m\theta\,\sin^n\theta$ είναι φραγμένο μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών το όριο της συνάρτησης θα είναι το μηδέν.

Γενικά το όριο θα υπάρχει σίγουρα αν m+n-2p > 0 άρα:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{x}^m \mathrm{y}^n}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^p} = \left\{\begin{matrix} 0\,, & \mathrm{m}+\mathrm{n}-2\mathrm{p} > 0 \\ \text{δεν υπάρχει} & \mathrm{m}+\mathrm{n}-2\mathrm{p} \leq 0 \end{matrix}\right\}$$

Με μερικές ίσως εξαιρέσεις όπου το $\mathrm{m}+\mathrm{n}-2\mathrm{p} \leq 0$ μας δίνει -∞ ή +∞ .

8.

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} \frac{\sin \mathrm{x} + 2\sin \mathrm{y}}{2\tan \mathrm{x} + \tan \mathrm{y}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin \mathrm{x}}{2\tan \mathrm{x}} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{2\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{\frac{2}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to0} \frac{\cos^3 x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} \frac{\sin \mathrm{x} + 2\sin \mathrm{y}}{2\tan \mathrm{x} + \tan \mathrm{y}} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin \mathrm{y}}{\tan \mathrm{y}} = \lim_{x\to0} \frac{2\cos y}{\sec^2 y}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2\cos y}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \lim_{x\to0} 2\cos^3 x = 2$$

$\lim\limits_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x,y) \neq \lim\limits_{y\to0} \lim_{x\to0} f(x,y)$ άρα δεν υπάρχει το όριο της f(x,y) στο (0,0).

9. Μετασχηματίζω τη συνάρτηση $\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$ σε πολικές συντεταγμένες :

$\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2} = \frac{r\cos x + r\sin x}{\mathrm{r}^2}$ με x=r cos θ , y= r sin θ , $r^2 = x^2 + y^2$.

Όταν x,y⟶ ∞ και το r⟶ ∞.

$$\frac{r\cos x + r\sin x}{\mathrm{r}^2} = \frac{1}{r}(\cos x + \sin x).$$

Όταν r⟶∞, το $\frac{1}{r}$⟶ 0 και αφού η $(cos\ x + sin\ x)$ είναι φραγμένη αφού είναι άθροισμα τριγωνομετρικών, έχουμε μηδενική επί φραγμένη άρα το όριο της f(x,y) είναι μηδέν.

$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{x^2+y^2}} = 0$.