Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Απαντήσεις 5ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 5η: Μερικη Παράγωγος Ι

1. Αν η συνάρτηση z = $xe^y + ye^x$ αποτελεί λύση της εξίσωσης :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x \ \frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{x}^2} = y\mathrm{e}^x \ \frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^3} = y\mathrm{e}^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x \ \frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{y}^2} = x\mathrm{e}^y \ \frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{y}^3} = x\mathrm{e}^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{y}^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^2\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{x}^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω από τη σχέση $\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{y}^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^2\partial \mathrm{y}}$ προκύπτει:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{y}^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^2\partial \mathrm{y}} \Rightarrow y\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$$

Το οποίο ισχύει άρα η συνάρτηση z = $xe^y + ye^x$ αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{y}^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial \mathrm{x}^2\partial \mathrm{y}}$$

2. Για τη συνάρτηση f(x, y, z) = $\frac{z}{x}\ln\left(\frac{y}{z}\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{\mathrm{x}^2}\ln\left(\frac{y}{z}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{\mathrm{x}}\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{1}{\mathrm{z}} = \frac{z}{\mathrm{x\,y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{x}}\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{z}{\mathrm{x}}\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{-y}{\mathrm{z}^2}\right) = \frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{x}}\ln\left(\frac{y}{z}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{x}}\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{-1}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{x}}\left(\ln\left(\frac{y}{z}\right) - 1\right)$$

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{z}{\mathrm{x}^2}\ln\left(\frac{y}{z}\right)\right) + y\left(\frac{z}{\mathrm{x\,y}}\right) + z\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\left(\ln\left(\frac{y}{z}\right) - 1\right)\right)$$

$$= 0 \Rightarrow -\frac{z}{\mathrm{x}}\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{z}{\mathrm{x}} + \frac{z}{\mathrm{x}}\ln\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{z}{\mathrm{x}} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Αφού καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει η f(x, y, z) =$\frac{z}{x}\ln\left(\frac{y}{z}\right)$ ικανοποιεί την σχέση

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

Για τη συνάρτηση f(x, y, z) = ln(x^3+y^3+z^3−3xyz)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\mathrm{x}^2-3yz}{\mathrm{x}^3+y^3+\mathrm{z}^3-3\mathrm{xyz}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3\mathrm{y}^2-3xz}{\mathrm{x}^3+y^3+\mathrm{z}^3-3\mathrm{xyz}}$ $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3\mathrm{z}^2-3xy}{\mathrm{x}^3+y^3+\mathrm{z}^3-3\mathrm{xyz}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{3}{\mathrm{x+y+z}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\mathrm{x}^2 - 3yz}{\mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}} + \frac{3\mathrm{y}^2 - 3xz}{\mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}}$$

$$+ \frac{3\mathrm{z}^2 - 3xy}{\mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}} = \frac{3}{\mathrm{x+y+z}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\mathrm{x}^2 - 3yz + 3\mathrm{y}^2 - 3xz3\mathrm{z}^2 - 3xy +}{\mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}} = \frac{3}{\mathrm{x+y+z}}$$

$$\Rightarrow \frac{3(\mathrm{x}^2 - yz + \mathrm{y}^2 - xz + \mathrm{z}^2 - xy) +}{\mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}} = \frac{3}{\mathrm{x+y+z}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz} = (\mathrm{x}^2 - yz + \mathrm{y}^2 - xz + \mathrm{z}^2 - xy)(\mathrm{x+y+z})$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}$$

$$= \mathrm{x}^3 - xyz + x\mathrm{y}^2 - \mathrm{x}^2 z + \mathrm{xz}^2 - \mathrm{x}^2 y + y\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 z + y^3 - yxz + y\mathrm{z}^2$$

$$- x\mathrm{y}^2 + z\mathrm{x}^2 - y\mathrm{z}^2 + z\mathrm{y}^2 - \mathrm{xz}^2 + \mathrm{z}^3 - zxy$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz} = \mathrm{x}^3 + y^3 + \mathrm{z}^3 - 3\mathrm{xyz}$$

Άρα αφού καταλήξαμε σε κάτι που ισχύει η f(x, y, z) = ln(x^3+y^3+z^3−3xyz) ικανοποιεί τη σχέση $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{3}{\mathrm{x+y+z}}$.

3. Για την f(x, y) = sin(xy) + cos(xy)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(cos\ xy) - y(\sin xy) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2} = -y^2 \sin(\,xy) - y^2 \cos(\,xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(cos\ xy) - x(\sin xy) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} = -x^2 \sin(\,xy) - x^2 \cos(\,xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}=-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)$$

$$\Rightarrow -y^2\sin(xy)-y^2\cos(xy)\pm x^2\sin(xy)-x^2\cos(xy)$$

$$=-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)$$

$$\Rightarrow\ -y^2\,(\sin(xy)+\cos(xy))\pm x^2\,(\sin(xy)-\cos(xy))=$$

$$-\,(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)\Rightarrow -y^2f(x,y)-x^2f(x,y)=-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)$$

$$\Rightarrow -(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)=-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)$$

Καταλήξαμε σε κάτι που ισχύει άρα η f(x, y) = sin(xy) + cos(xy) ικανοποιεί τη σχέση $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}=-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)f(x,y)$.

Για την f(x, y) = $xe^y + ye^x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}=y\mathrm{e}^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}=x\mathrm{e}^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}=f(x,y)\Rightarrow\ y\mathrm{e}^x\ +x\mathrm{e}^y\ =f(x,y)\Rightarrow f(x,y)=f(x,y)$$

Καταλήξαμε σε κάτι που ισχύει άρα η f(x, y) = $xe^y + ye^x$ ικανοποιεί τη σχέση $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}=f(x,y)$.