Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Απαντήσεις 7ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 7η: Σύνθετες Συναρτήσεις

1. Έχουμε

$$V(x,y)=\frac{x^2+y}{1+y} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{P}(-1,\,0)$$

Οι μερικές παράγωγοι εως και δεύτερης τάξης της V είναι

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2x}{1+y} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{2}{1+y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1-x^2}{(1+y)^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-2\frac{1-x^2}{(1+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(1+y)^2}$$

Στο σημείο P έχουν τιμές

V_x=-2 V_y=0 V_{xx}=2 V_{xy}=2 V_{yy}=0

Οπότε το πολυώνυμο Taylor στην γειτονιά του P δεύτερης τάξης είναι

$$V(x,y)\simeq V(-1{,}0)-2(x+1)+(x+1)^2+2x(x+1)y$$
$$=(x+1)^2+2x(x+1)y-2x-1$$

Κοντά στο P οι συνιστώσες της δύναμης είναι

$$\mathrm{F_x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=-2(x+y)$$
$$\mathrm{F_y}=-\frac{\partial V}{\partial y}=-2(x+1)$$

Άρα η δύναμη **F** =($\mathrm{F_x}$, $\mathrm{F_y}$) είναι

$$\mathbf{F}\ =-2(x+y)\hat{x}-2(x+1)\hat{y}$$

2. L = r cos θ u_y - r sin θ u_x = u_θ

3. (i) Η συνάρτηση f είναι ομογενής 7^{ου} βαθμού αφού

$$f(lx,\,ly) = (lx)^5\,(ly)^2\,e^{lx/ly}=l^7\,x^5\,y^2\,e^{x/y}=7f(x,y)$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις ισχύει

$$xf_x + yf_y = 7f$$

(ιι) βλ. παρουσίαση 8^{ης} Ενότητας

4. $y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+x\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=2xy\frac{df}{du}-2xy\frac{df}{du}=0$

5. Θέτω $v = x^2 + y^2$ *και* $u = ze^{-x}$ οπότε

   $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2x\frac{\partial \varphi}{\partial u}-ze^{-x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$

   και $\frac{\partial f}{\partial y}=-1+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-1+2y\frac{\partial \varphi}{\partial u}$

   και $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}=e^{-x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$

   Οπότε επαληθεύεται η εξίσωση

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+x\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+yz\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=x$$

6. Μετασχηματίζοντας την συνάρτηση σε νέες μεταβλητές προκύπτει ότι

   $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}$

   $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

   Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης γράφεται

$$2xy\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2v(y-x)\frac{\partial f}{\partial u}$$

   Ενώ το πρώτο γράφεται ως

$$(x-y)\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=(x-y)(x-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

   Άρα για x-y≠0 ή u^2-4v=$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2\neq 0$ η εξίσωση γράφεται

$$(u^2\text{-}4v)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2v\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

7. dp $=\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

Το p(t,x,y,z) είναι σταθερό άρα, $\frac{dp}{dt}$=0

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Αν όμως τα x,y,z είναι ανεξάρτητα του χρόνου δηλαδή το σημείο στο οποίο μετράμε την πυκνότητα δεν έχει ταχύτητα δηλαδή είναι σταθερό, τότε $\frac{dp}{dt}$=$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$,δηλαδή θα έχουμε ένα σημείο με συγκεκριμένη πυκνότητα. Αν το σημείο έχει ταχύτητα τότε η ολική πυκνότητα θα είναι σταθερή αλλά η πυκνότητα που θα μετράμε στο σημείο καθώς αυτό θα κινείται θα αλλάζει .