Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Απαντήσεις 8ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 8η: Σειρές Taylor και Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

1. Θέτωντας u = x+αy και v = x+βy, η f θα είναι συνάρτηση των u και v, άρα:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=1\ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=a\ ,\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=b$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow f_{xx}=f_{uu}+2f_{uv}+f_{vv}$$

Όμοια

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial f}{\partial u}+b\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial f}{\partial u}+b\frac{\partial f}{\partial v}\right)=a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{yy}=a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+a\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+b\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+b\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow f_{yy}=a^2f_{uu}+2abf_{uv}+b^2f_{vv}$$

και

$$f_{\chi y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial u}+b\frac{\partial f}{\partial v}\right)=a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xy}=a\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xy}=af_{uu}+(a+b)f_{uv}+bf_{vv}$$

$$9f_{xx}-9f_{xy}+2f_{yy}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(f_{uu}+2f_{uv}+f_{vv})-\ 9(af_{uu}+(a+b)f_{uv}+bf_{vv})+2(\ a^2f_{uu}+2abf_{uv}$$
$$+b^2f_{vv}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(9-9a+2a^2)f_{uu}+(9-9b+2b^2)f_{vv}+(18-9a-9b+4ab)f_{uv}=0$$

Για να ισχυει $f_{uv}=0$ θα πρέπει $9-9b+2b^2$ και $9-9a+2a^2$ να είναι μηδέν και $18-9a-9b+4ab\neq 0$. (1)

Οι διακρίνουνες για τις 2 πρώτες σχέσεις έχουν ως εξής:

b=3 ή b=3/2 και α=3 ή α=3/2

Οι λύσεις α=b=3 και α=b=3/2 απορρίπτονται γιατί μηδενίζουν την σχέση (1)

Οπότε οι λύσεις α =3 και b=3/2 καθώς και b=3 και α=3/2 επαληθεύουν την $f_{uv} = 0$

Συνοψίζοντας, $f_{uv} = 0$ όταν u = x+(3/2)y και v = x+3y αλλά και όταν u = x+3y και v = x+(3/2)y.

2. (1) Στο σημείο (0,0), F(0,0, z)= z+0 e^z - 0⇒z=0 άρα z(0,0)=0

   (2)

$$z = y - xe^z = \begin{cases} z_x = -e^z z_x \Rightarrow z_x = (1 + xe^z) = -e^z \Rightarrow z_x = \dfrac{-e^z}{1 + xe^z} \\ z_y = 1 - xe^z z_y \Rightarrow z_y = \dfrac{e^z}{1 + xe^z} \end{cases}$$

dz=$z_x dx + z_y dy \Rightarrow dz = \frac{-e^z}{1+xe^z} dx + \frac{e^z}{1+xe^z} dy$

$$d^2z = \frac{-z_x e^z + e^z(e^z + xz_x e^z)}{(1 + xe^z)^2} d^2x + \frac{-e^z - xz_x e^z)}{(1 + xe^z)^2} dxdy + \frac{-z_x e^z + e^z xz_x e^z)}{(1 + xe^z)^2} d^2y$$

(x,y)=(0,0) ⇒ $z = 0$

$z_x|_{(0,0)} = -1$

$z_y|_{(0,0)} = 1$

$dz|_{(0,0)} = -dx + dy$

$d^2z|_{(0,0)} = 2d^2x - 2dxdy$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n z|_{(0,0)}}{n!} \Rightarrow z = x^2 - xy - x + y + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{d^n z|_{(0,0)}}{n!}$$

Άρα κοντά στο (0,0) η συνάρτηση z προσεγγίζεται από την επιφάνεια δευτέρου βαθμού $z = x^2 - xy - x + y$.

3. (α)

   Θα χρησιμοποιήσουμε Taylor για να προσεγγίσουμε την z με επίπεδο

   Υπολογίζουμε αρχικά τα:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x + y}(1 - x + y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x+y}(1-x+y)}$$

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{1-x+y}(1-x+y)}dx - \frac{-1}{2\sqrt{1-x+y}(1-x+y)}dy$$

$$dz|_{(0,0)} = \frac{dx}{2} - \frac{dy}{2}$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n z|_{(0,0)}}{n!} \Rightarrow z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^n z}{n!}$$

Άρα η καμπύλη $\frac{1}{\sqrt{1-x+y}}$ προσεγγίζεται με το επιπεδο $z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ στο (0,0)

(β) Ομοίως καταλήγουμε στην σχέση

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n z}{n!} \Rightarrow z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{3}{8}y^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{d^n z}{n!}$$

Οπότε η καμπύλη $\frac{1}{\sqrt{1-x+y}}$ προσεγγίζεται από την δευτεροβάθμια επιφάνεια $z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{3}{8}y^2$.

4. Ο τύπος που δίνει τον όγκο ενός κώνου είναι :

   $v(r,h)=(1/3)\,\pi r^2 h$

   ενώ ο στοιχειώδης όγκος είναι $dv=(2/3)\pi rhdr+(1/3)\pi r^2 hdh$

   Ο κώνος έχει ακτίνα r = 1m και ύψους h = 2m ενώ όταν μεταβάλουμε την ακτίνα του κατά 3cm(dr=0.03 m) και το ύψος του μειωθεί κατά 2cm (dh=-0,02 m) προκύπτει αύξηση του όγκου κατά dv≃ 0.1047 m

5. Θέτω u=αχ+y και v=αχ-y

   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \quad , \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad , \frac{\partial u}{\partial y} = -1$

   η συναρτηση f μετασχηματίζεται ως $f(x,y) = \frac{1}{y}g(u) + \frac{1}{y}h(v)$

$f_x = \frac{a}{y}\frac{\partial g(u)}{\partial x} + \frac{a}{y}\frac{\partial h(v)}{\partial x}$

$f_{xx} = \frac{a^2}{y}\left(\frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(v)}{\partial x^2}\right)$

$f_y = \frac{1}{y}\frac{\partial g(au)}{\partial y} - \frac{1}{y^2}(ax+y) - \frac{1}{y^2}h(ax+y) - \frac{1}{y}\frac{\partial h(v)}{\partial x}$

$$y^2 f_y = y\frac{\partial g(u)}{\partial y} - g(u) - h(v) - y\frac{\partial h(v)}{\partial y}$$

$\frac{\partial (y^2 f_y)}{\partial x} = y\frac{\partial^2 g(u)}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 h(v)}{\partial y^2}$ (1)

Οπότε $f_{xx} = \frac{a^2}{y}\left(\frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(v)}{\partial x^2}\right) = \frac{a^2}{y}\left(y\frac{\partial^2 g(u)}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 h(v)}{\partial x^2}\right) \Rightarrow$

(λόγω της (1)) $\Rightarrow f_{xx} = \frac{a^2}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

6. Θεωρώντας ότι η βάση του διανυσματικού χώρου που κινούνται τα διανύσματα της συνάρτησης f και τα διανύσματα a και b, είναι η β={$\widehat{e_x}$, $\widehat{e_y}$, $\widehat{e_z}$}
   $D_{\vec{a}}$ f = $\vec{\nabla}(1,0,0) \cdot \vec{a}$
   $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \mathrm{e}^x\widehat{e_x} - 2\mathrm{e}^{-2y}\widehat{e_y} + \mathrm{e}^z\widehat{e_z} \Rightarrow \vec{\nabla}(1,0,0) = \mathrm{e}\widehat{e_x} - 2\widehat{e_y} + \widehat{e_z}$
   Έτσι, $D_{\vec{a}}$ f = 2e
   Άρα η παράγωγος της f στο M(1,0,0) κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{a}(2,1,2)$ είναι η $D_{\vec{a}}$ f = 2e .
   Επίσης
   $|\vec{\nabla}(1,0,1)| = \sqrt{2e^2+4}$
   $D_{\vec{b}}$ f = $\vec{\nabla} f \cdot \vec{b} = |\vec{\nabla} f||\vec{b}|\cos\theta$, με θ την γωνία που σχηματίζεται μεταξί $\vec{\nabla} f$ και $\vec{b}$
   Το $D_{\vec{b}}$ f γίνεται μέγιστο όταν θ=0, δηαδή όταν $\vec{\nabla} f // \vec{b}$ και αφού το $\vec{b}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα τότε:
   $$\vec{b} = \frac{\vec{\nabla}(1,0,0)}{|\vec{\nabla}(1,0,1)|} = \left(\frac{e}{\sqrt{2e^2+4}}, \frac{-2e}{\sqrt{2e^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{2e^2+4}}\right)$$