Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Απαντήσεις 9ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 9η: Διανυσματικές Συναρτήσεις

1. (α) Είναι $\vec{F}_1 = r^m\, \widehat{e_r}$, όπου $\vec{r} = x\widehat{e_x} + y\widehat{e_y} + z\widehat{e_z}$ και $r=|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Το $\widehat{e_r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του $\vec{r}$ και ειναι:

$$\widehat{e_r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\widehat{e_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\widehat{e_y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\widehat{e_z}$$

Άρα

$$\vec{F}_1(x,y,z) = F_{1x}\widehat{e_x} + F_{1y}\widehat{e_y} + F_{1z}\widehat{e_z} = xr^{m-1}\widehat{e_x} + yr^{m-1}\widehat{e_y} + zr^{m-1}\widehat{e_z}$$

Η απόκλιση της $\vec{F}_1$ είναι

$$\nabla \cdot \vec{F}_1 = \frac{\partial F_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{1z}}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m-1}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m-1}{2}}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(z\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m-1}{2}}\right) = (m+2)\, r^{m-1}$$

ενώ η στροφή είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \widehat{e_x} & \widehat{e_y} & \widehat{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xr^{m-1} & yr^{m-1} & zr^{m-1} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

(β) Έστω $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ και $\vec{a} = \alpha_1\hat{\imath} + \alpha_2\hat{\jmath} + \alpha_3\hat{k}$, σταθερό διάνυσμα

Τότε είναι

$\vec{F}_2(x,y,z) = \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a}) = F_{2x}\hat{\imath} + F_{2y}\hat{\jmath} + F_{2z}\hat{k} = [({\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2)x - \alpha_1\alpha_2 y - \alpha_1\alpha_3 z]\hat{\imath} + [({\alpha_1}^2 + {\alpha_3}^2)y - \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_2\alpha_3 z]\hat{\jmath} + [({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)z - \alpha_1\alpha_3 x - \alpha_2\alpha_3 y]\hat{k}$

Η απόκλιση της $\vec{F}_2$ είναι

$$\nabla \cdot \vec{F}_1 = \frac{\partial F_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{2z}}{\partial z} = 2\alpha^2 \text{ με } \alpha=|\vec{\alpha}|$$

ενώ η στροφή είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$

(γ) Είναι $\vec{F}_3$ (x,y,z)= $F_{3x}\,\widehat{e_x}$ + $F_{3y}\,\widehat{e_y}$ + $F_{3z}\,\widehat{e_z}$= xyz($e^x\,\widehat{e_x}$ + $e^y\,\widehat{e_y}$ + $e^z\,\widehat{e_z}$) .

Η απόκλιση της $\vec{F}_3$ είναι

$$\nabla \cdot \vec{F}_3 = \frac{\partial F_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{3y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{3z}}{\partial z} = (x+1)yze^x + x(y+1)ze^y + xy(z+1)e^z$$

ενώ η στροφή της είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_3 = x(ze^z - ye^y)\widehat{e_x} + y(xe^x - ze^z)\widehat{e_y} + z(ye^y - xe^x)\widehat{e_z}$$

2. Το διάνυσμα

$$\dot{\vec{r}} = -3\sin t\,\widehat{e_1} + 3\cos t\,\widehat{e_2} + 4\widehat{e_3}$$

είναι παράλληλο προς την εφαπτομένη της $\vec{r}$ και η αντίστοιχη διανυσματική μονάδα στη διεύθυνση της εφαπτομένης είναι

$$\widehat{e_0} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \varepsilon_1\widehat{e_1} + \varepsilon_2\widehat{e_2} + \varepsilon_3\widehat{e_3} = -\frac{3}{5}\sin t\,\widehat{e_1} + \frac{3}{5}\cos t\,\widehat{e_2} + \frac{4}{5}\widehat{e_3}$$

αφού $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{9(sin^2 t + cos^2 t) + 16} = 5$

Η παράγωγος της φ κατά την διεύθυνση του $\vec{\varepsilon}_0$ στο σημείο P(1,0) τότε είναι

$$D_{\vec{\epsilon}_0}\phi|_{P_0} = \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\epsilon}_0\right)_{P_0} = \left(\epsilon_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + \epsilon_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + \epsilon_3\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{P_0} =$$

$$= \left[8xy\left(-\frac{3}{5}\sin t\right) + (4x^2 + 2yz)\frac{3}{5}\cos t + y^2\frac{4}{5}\right]_{(0,1,2)} = \frac{4}{5}(3\cos t + 4).$$

3. Η κλίση της απόκλισης της $\vec{F}$ είναι

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\right) = \vec{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2e^x\cos y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y) + \frac{\partial}{\partial z}(e^z)\right] =$$

$$= \vec{\nabla}(3e^x\cos y + e^z) = \frac{\partial}{\partial x}(3e^x\cos y + e^z)\hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial z}(3e^x\cos y + e^z)\hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}(3e^x\cos y + e^z)\hat{e}_3 =$$
$$= 3e^x\cos y\hat{e}_1 - 3\sin y\hat{e}_2 + e^z\hat{e}_3.$$

4. Αντικαθιστώντας στη σχέση $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ το $\bar{B}$ = $B_2\, \bar{e}_2$ βρίσκουμε

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{e_3}\right) \cdot (B_2 \hat{e_2}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \cdot 1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0 \qquad (1)$$

Μετά αντικαθιστούμε στην σχέση $\frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ το νόμ του Ohm $\vec{E}$=$-\vec{u} \times \vec{E}$ οπότε έχουμε

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \vec{\nabla}(-\vec{u} \times \vec{E})$$

Αντικαθιστούμε και στην σχέση αυτή το $\bar{u}$ = $u_1\, \bar{e}_1$ και το $\bar{B}$ = $B_2\, \bar{e}_2$ και λύνουμε τη σχέση

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla(-u_1\, \bar{e}_1 \times B_2\, \bar{e}_2) = \nabla \times \begin{vmatrix} \hat{e_1} & \hat{e_2} & \hat{e_3} \\ -u_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \end{vmatrix} = \nabla \times (-u_1 B_2 \hat{e_3}) =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e_1} & \hat{e_2} & \hat{e_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & -u_1 B_2 \end{vmatrix}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1) ισχύει $\frac{\partial B_2}{\partial x_2}$ οπότε η σχέση (2) γίνεται

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = B_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \bar{e}_1 - \left(B_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial B_2}{\partial x_1}\right) \bar{e}_2$$

Το οποίο είναι αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

5. Αντικαθιστώντας από την $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$ στην $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ προκύπτει:

$$\nabla \cdot (-\vec{u} \times \vec{B}) = 0$$

η οποία με τη χρήση της δοσμένης ταυτότητας γίνεται

$$\vec{B} \cdot (\nabla \times (-\vec{u})) + \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$$

και χρησιμοποιώντας την $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ και τη $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ =$\vec{J}$ προκύπτει:

$$\vec{\omega}\ \cdot \vec{B} = \vec{u}\ \cdot \vec{J}$$

6. Με βάση τους περιορισμούς από την εκφώνηση έχουμε

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = u_x \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \widehat{e_x} + u_y \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \widehat{e_y} - \left(\omega_z \frac{\partial u_x}{\partial x} - \omega_z \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \widehat{e_z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \omega_z (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\ \widehat{e_z} < 0$$

Γιατί το ρευστό είναι διαστελλόμενο ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$)

7. Με βάση την εκφώνηση θα έχουμε

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{3} \left[\nabla(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) - \frac{1}{3} (\nabla \vec{v})^2 \right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{3} \left[\nabla (\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) - 3H^2 \right] = -H^2 - \frac{1}{3}\rho + \left[\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{3} \nabla \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right]$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -H^2 - \frac{1}{3}\rho.$$

8. (α) Η εξίσωση της σφαίρας με ακτίνα r είναι η εξής:

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας στο σημείο $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ είναι η εξής:

$$(x-a_1)(\frac{\partial f}{\partial x})_A+(y-a_2)(\frac{\partial f}{\partial y})_A+(z-a_3)(\frac{\partial f}{\partial z})_A=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-a_1)2a_1+(y-a_2)2a_2+(z-a_3)2a_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1x+a_2y+a_3z=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

(β) Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο Α(1,0,1) είναι η ακόλουθη:

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}_A\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}_A\Delta y$$

όπου $\Delta z=z-1, \Delta x=x-1$ και $\Delta y=y$
και επομένως θα ισχύει:

$$\Delta z=(\frac{\partial f}{\partial x})_A\Delta x+(\frac{\partial f}{\partial y})_A\Delta y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-z=1$$

9. (α) Έχουμε τη συνάρτηση f(x, y, z) = $e^{x^2-y^2+z^2}$ (1) και ψάχνουμε την παράγωγο της f κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}=\widehat{e_x}+\widehat{e_y}-2\widehat{e_z}$. (2)

Επομένως έχουμε $|\vec{u}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\widehat{e_x}, \widehat{e_y}, \widehat{e_z}$ παίρνω αντίστοιχα τις σχέσεις

$$\hat{e_x}\cdot\vec{u}=1\Rightarrow cosa=\frac{1}{|\vec{u}|}\Rightarrow cosa=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\hat{e_y}\cdot\vec{u}=1\Rightarrow cosb=\frac{1}{|\vec{u}|}\Rightarrow cosb=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\hat{e_z}\cdot\vec{u}=-2\Rightarrow cosc=-\frac{2}{|\vec{u}|}\Rightarrow cosc=-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Επισής εχω τα εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2-y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cdot e^{x^2-y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2-y^2+z^2}$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό η παράγωγος και τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}$ είναι:

$$D_{n_o}f = \frac{\partial f}{\partial x}cosa + \frac{\partial f}{\partial y}cosb + \frac{\partial f}{\partial z}cosc \Rightarrow D_{n_o}f = \frac{2xe^{x^2-y^2+z^2}}{\sqrt{6}} - \frac{2ye^{x^2-y^2+z^2}}{\sqrt{6}} - \frac{4ze^{x^2-y^2+z^2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$
$$D_{n_o}f = \sqrt{6}e^{x^2-y^2+z^2}\frac{x-y-2z}{3}$$

(β) Η f έχει μέγιστο ρυθμό μεταβολής στο σημείο P(-1,1,1) κατά τη κατεύθυνση του ∇f.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e_z} \Rightarrow \nabla f = 2xe^{x^2-y^2+z^2}\hat{e_x} - 2ye^{x^2-y^2+z^2}\hat{e_y} + 2ze^{x^2-y^2+z^2}\hat{e_z}$$

και άρα κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$\nabla f_P = -2e\hat{e_x} - 2e\hat{e_y} + 2e\hat{e_z}$$

Αρα προς αυτή την κατεύθυνση η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής και επίσης ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής είναι

$$|\nabla f_P| = \sqrt{4e^2 + 4e^2 + 4e^2} = 2e\sqrt{3}$$

10. ΄Ενσωματώνοντας το διάνυσμα θέσης στη συνάρτηση, προκύπτει :

$$\vec{F} = x^2y^2z^2(x\,\widehat{e_x} + y\,\widehat{e_y} + z\,\widehat{e_z})$$

$$\vec{F} = x^2y^2z^2x\,\widehat{e_x} + x^2y^2z^2y\,\widehat{e_y} + x^2y^2z^2z\,\widehat{e_z}$$

$$\vec{F} = x^3y^2z^2\,\widehat{e_x} + x^2y^3z^2\,\widehat{e_y} + x^2y^2z^3\,\widehat{e_z}$$

Θεωρώντας $F_1 = x^3y^2z^2$ και $F_2 = x^2y^3z^2$ και $F_3 = x^2y^2z^3$ η Λαπλασιανή της συνάρτησης είναι:

$$\nabla^2\bar{F} = \nabla^2 F_1\hat{e_x} + \nabla^2 F_2\hat{e_y} + \nabla^2 F_3\hat{e_z}$$

έτσι διαδοχικά έχουμε

$$\nabla^2 F_1 = \frac{\partial^2(x^3y^2z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^3y^2z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^3y^2z^2)}{\partial z^2} = 6xy^2z^2 + 2x^3z^2 + 2x^3y^2$$

$$\nabla^2 F_2 = \frac{\partial^2(x^2y^3z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2y^3z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2y^3z^2)}{\partial z^2} = 2y^3z^2 + 6x^2yz^2 + 2x^2y^3$$

$$\nabla^2 F_3 = \frac{\partial^2(x^2y^2z^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2z^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2y^2z^3)}{\partial z^2} = 2y^2z^3 + 2x^2z^3 + 6x^2y^2z$$

Επομένως η Λαπλασιανή της συνάρτησης είναι:

$$\begin{gathered}\nabla^2 \bar{F} = (6xy^2z^2 + 2x^3\left(y^2+z^2\right)\hat{e_x} + \\ +(2y^3z^2 + 6x^2yz^2 + 2x^2y^3)\hat{e_y} + \\ +(2y^2z^3 + 2x^2z^3 + 6x^2y^2z)\hat{e_z}\end{gathered}$$

11. Εστω ότι ο κυματάρηθμος είναι ένα διάνυσμα πάντα παράλληλο στο $\vec{\mathrm{r}}$ Τότε προκύπτει :

$$\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathrm{r}} = kr$$

Άρα $\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}_0\, e^{(kr-\omega t+\varphi)}$

Υπολογίζουμε τα $\nabla^2 A$, $\frac{\partial^2 \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}^2}$

$$\nabla\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}_o\, e^{(kr-\omega t+\varphi)} k \nabla r = \vec{\mathrm{A}}_o\, e^{(kr-\omega t+\varphi)} k \vec{\mathrm{r}}$$

επειδή ($\nabla\vec{\mathrm{r}} = \frac{\vec{\mathrm{r}}}{r} = \hat{r}$)

$$\nabla^2\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}k^2$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}^2} = \omega^2\vec{\mathrm{A}}$$

Συνεπώς η εξίσωσή μας μετατρέπεται στην :

$$\vec{\mathrm{A}}k^2 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\vec{\mathrm{A}} = 0 \leftrightarrow \vec{\mathrm{A}}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right) = 0$$

΄Οπότε καταλήγουμε στην τελική προυπόθεση, ότι για να επαλυθεύεται η αρχική μας εξίσωση από την A πρέπει

$$k=\omega/c$$

Από τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε τα εξής :Γνωρίζοντας ότι : $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, όπου λ, T είναι το μήκος κύματος και ο χρόνος δίαδοσης ενός μήκους του κύματος συμπεραίνουμε ότι η σταθερά c ισούται με τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος. ΄Ετσι συμπεραίνουμε πως κατά τη διάδοση του κύματος, σε ένασυγκεκριμένο μέσο, δεν μεταβάλλεται η ταχύτητά διάδοσής του. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι, επειδή η c είναι σταθερός αριθμός, τα k, ω δεν μπορούν να είναι ανεξάρτητα μεταξύτους, από το οποίο καταλαβαίνουμε ότι οι k, ω είναι χαρακτηριστικά γικάθε ακτινοβολία.