Αυτόματος Έλεγχος

Ενότητα 2η: Ανάπτυξη και Ανάλυση Προτύπων Δυναμικών Συστημάτων στον Αυτόματο Έλεγχο

Παναγιώτης Σεφερλής

Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο

Στόχοι του κεφαλαίου

- Μεθοδολογία ανάπτυξης δυναμικών μοντέλων.
- Έκφραση δυναμικών μοντέλων με συναρτήσεις μεταφοράς.
- Απεικόνιση και περιγραφή δυναμικών συστημάτων με διαγράμματα βαθμίδων.
- Εκτίμηση κύριων χαρακτηριστικών της δυναμικής συμπεριφοράς τυπικών συστημάτων χωρίς επίλυση των δυναμικών μοντέλων.

Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο

Περίληψη του κεφαλαίου

- Μεθοδολογία ανάπτυξης δυναμικών μοντέλων.
- Μετασχηματισμός Laplace.
- Επίλυση γραμμικών δυναμικών μοντέλων.
- Συνάρτηση μεταφοράς.
- Διαγράμματα βαθμίδων.
- Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων.
- Ποιοτικά χαρακτηριστικά δυναμικών μοντέλων.

Γιατί χρειαζόμαστε τα δυναμικά μοντέλα;

Υπάρχει διαφορά στη συμπεριφορά ενός λεωφορείου από αυτή ενός ποδήλατου;

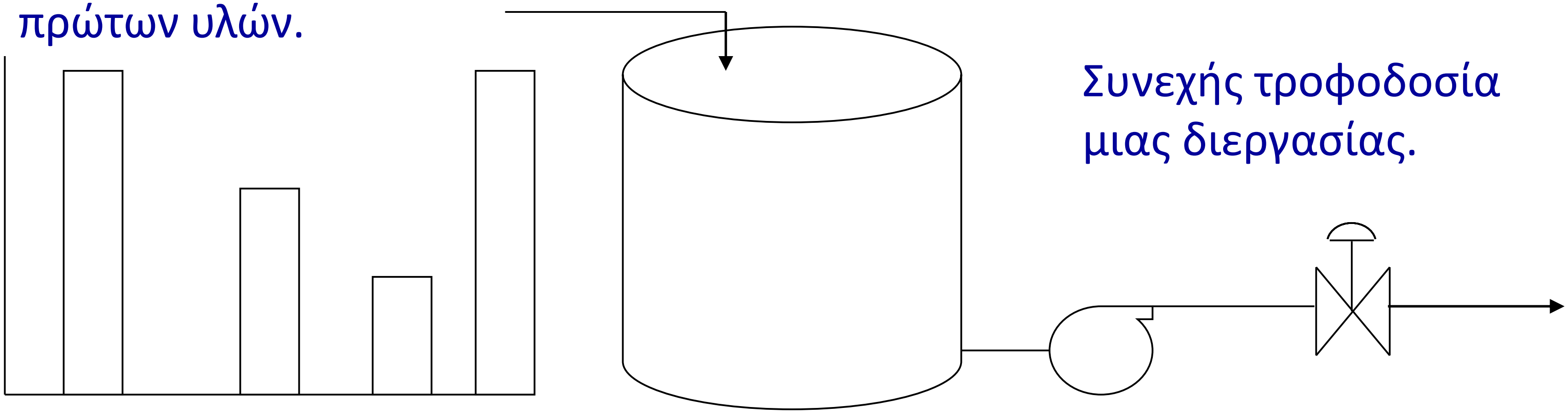
- Ποιο μπορεί να κάνει αναστροφή σε ακτίνα 2 μέτρων;
- Ποιο αποκρίνεται καλύτερα όταν διέρχεται από «σαμαράκι»;

Η δυναμική συμπεριφορά εξαρτάται περισσότερο από το όχημα παρά από τον οδηγό!

Η δυναμική του συστήματος είναι πιο σημαντική από τον αυτόματο έλεγχο!

Γιατί χρειαζόμαστε τα δυναμικά μοντέλα;

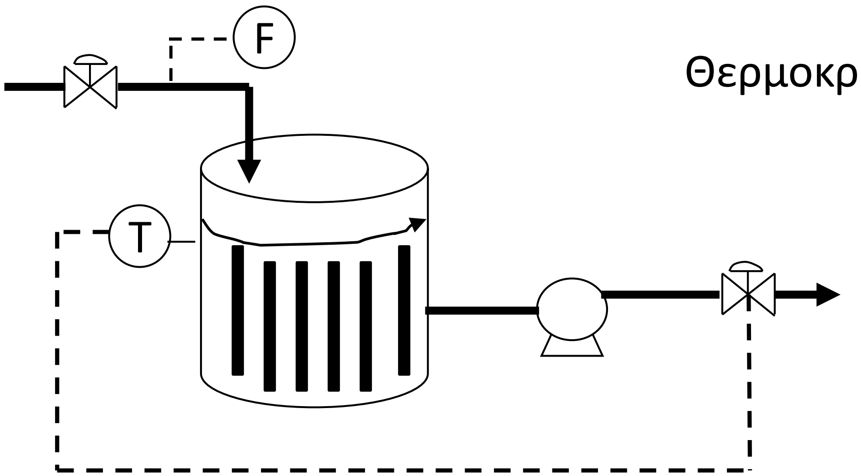
Η τροφοδοσία γίνεται περιοδικά αλλά η κατανάλωση απαιτεί συνεχή τροφοδότηση. Πόσο μεγάλος πρέπει να σχεδιαστεί ο όγκος του δοχείου;

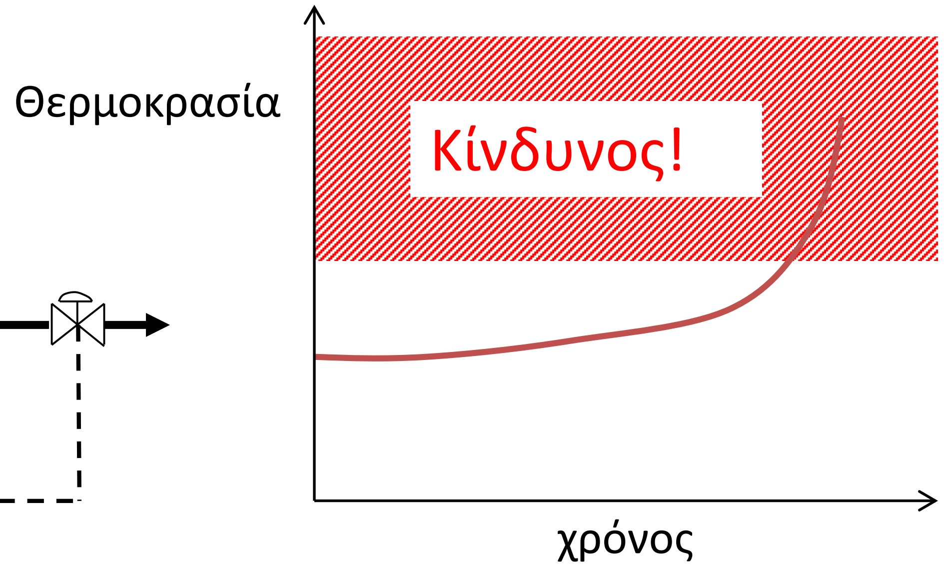


Το σύστημα πρέπει να έχει ευελιξία για καλή δυναμική συμπεριφορά κατά τη λειτουργία του!

Γιατί χρειαζόμαστε τα δυναμικά μοντέλα;

Η αντλία του ψυκτικού νερού σε αντιδραστήρα τέθηκε εκτός λειτουργίας. Πόσος χρόνος υπάρχει για να αποτραπεί η ανύψωση της θερμοκρασίας σε επικίνδυνα επίπεδα;





Η δυναμική μιας διεργασίας είναι σημαντική για την ασφάλεια!

Γιατί χρειαζόμαστε τα δυναμικά μοντέλα;

Αζυγοσταθμίες στα περιστρεφόμενα σώματα σε ένα στρόβιλο προκαλούν σημαντικές καμπτικές ταλαντώσεις που μπορούν να προκαλέσουν καταστροφικά αποτελέσματα.

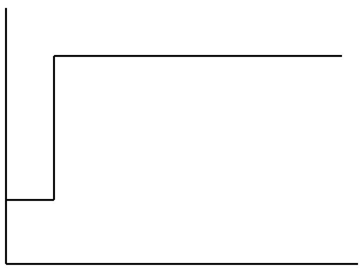
Η δυναμική μιας διεργασίας είναι σημαντική για την ασφάλεια!

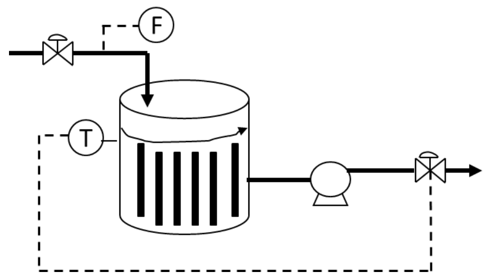
Μαθηματικά πρότυπα

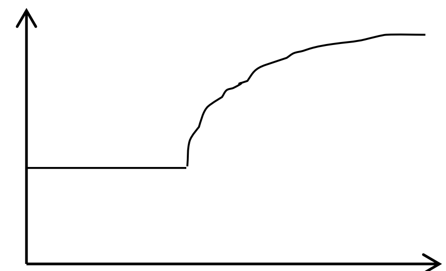
Μεταβολή μεταβλητής εισόδου, π.χ. βηματική μεταβολή στην παροχή του ρεύματος ατμού.

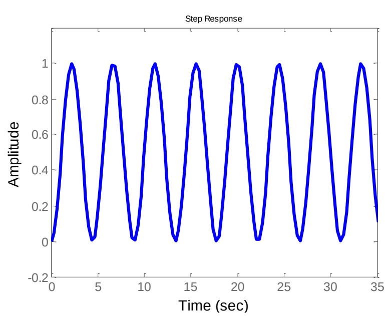
Διεργασία – δυναμικό σύστημα

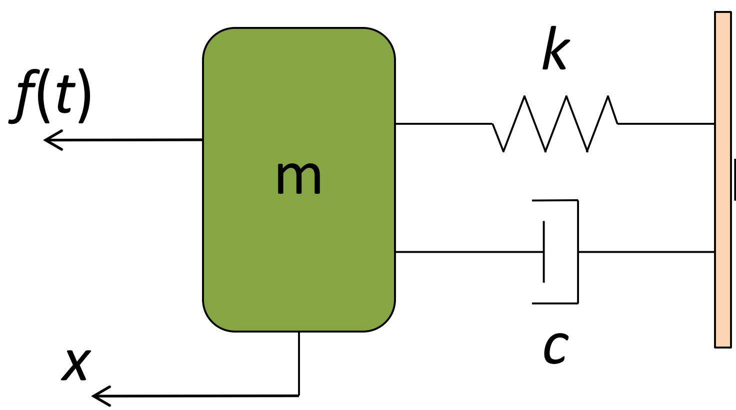
Επίδραση στη μεταβλητή εξόδου, π.χ. θερμοκρασία.

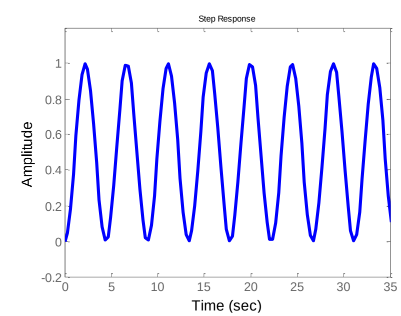












Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

- Προσομοίωση διεργασίας.
- Συμπεριφορά μεταβλητών.

<u>Παραδείγματα επιλογής μεταβλητών</u>

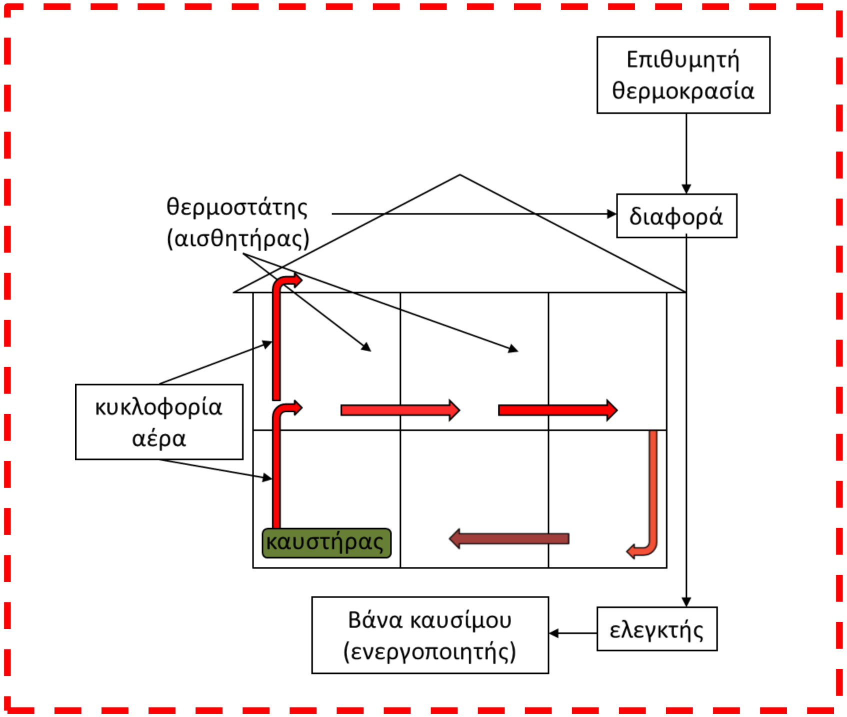
Μετατόπιση	←	Εξίσωση κίνησης
Επιτάχυνση	←	Εξίσωση κίνησης
Θερμοκρασία	←	Ισοζύγιο ενέργειας
Πίεση	←	Ισοζύγιο ορμής

T.E. Marlin, Process Control, McGraw Hill, 1995

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

- Συλλογή δεδομένων.
- Παράθεση παραδοχών.
- Ορισμός ορίων συστήματος.



Τα όρια του συστήματος καθορίζουν τις ροές θερμότητας με το περιβάλλον.

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

- Εξισώσεις κίνησης
- Ισοζύγια ορμής, ενέργειας και μάζας

- Ποιες είναι οι κύριες εξισώσεις;

  Εξισώσεις κίνησης, ισοζύγια ορμής, ενέργειας και μάζας.

- Πόσες εξισώσεις χρειαζόμαστε;

  Πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών – Πλήθος ανεξάρτητων εξισώσεων = 0

- Άλλες σχέσεις.

  Περιορισμοί (γεωμετρικοί περιορισμοί στην κίνηση). Καταστατικές εξισώσεις (συνήθως εμπειρικές σχέσεις).

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

Αντιστοιχίες φυσικών μοντέλων

- Ηλεκτρικά συστήματα: ρεύμα, i, φορτίο, q, διαφορά δυναμικού – τάση, v.
- Μηχανικό σύστημα: δύναμη, F, ορμή, P, διαφορά ταχύτητας, Δv.
- Μηχανικό σύστημα (στρεφόμενο): ροπή, T, στροφορμή, H, διαφορά γωνιακής ταχύτητας, $\Delta\omega$.
- Υδραυλικό σύστημα: παροχή ρευστού, Q, όγκος, V, διαφορά πίεσης, ΔP.
- Θερμικό σύστημα: θερμική παροχή, q, ενθαλπία, H, διαφορά θερμοκρασίας, ΔT.

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

Τα δυναμικά μοντέλα περιλαμβάνουν διαφορικές και αλγεβρικές εξισώσεις, π.χ.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - b\frac{dx}{dt} - kx$$

Με αρχικές συνθήκες: $x(0)=0$, $dx(0)/dt=0$

Με συγκεκριμένη μεταβολή της εξαναγκασμένης διέγερσης:

$F = f(t) = 100\ t$ (μεταβολή κλίσης)

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

Τα απλά μοντέλα επιλύονται αναλυτικά για ακριβή έκφραση της δυναμικής απόκρισης της διεργασίας.
Παράδειγμα:

$$v(t) = v(t)\big|_{t=0} + (\Delta f)K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad t \geq 0$$

Πολλά συστήματα διεργασιών έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά. Στόχος είναι ο υπολογισμός της επίδρασης των χαρακτηριστικών της διεργασίας στις κύριες παραμέτρους της δυναμικής συμπεριφοράς.
Παράδειγμα: Κέρδος, σταθερά χρόνου, συντελεστής απόσβεσης, φυσική συχνότητα.

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

Πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα επιλύονται αριθμητικά:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - b\frac{dx}{dt} - \left(kx + \mu x^3\right)$$

Χρησιμοποιείται προσέγγιση των παραγώγων με διαφορές.

Μέθοδος Euler, Runge-Kutta, Gear.

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

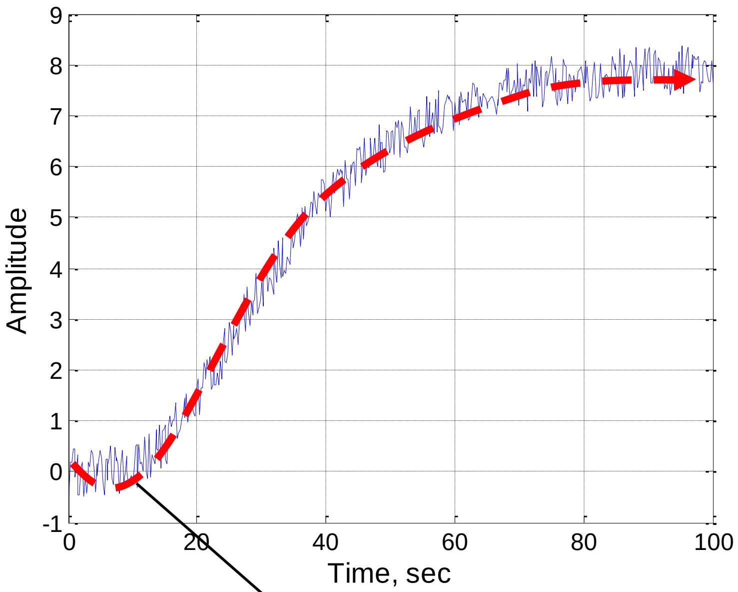
1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

- Έλεγχος ορθότητας των αποτελεσμάτων:
  - Φυσική εξήγηση για τη μορφή και το πρόσημο της απόκρισης.
  - Ικανοποίηση παραδοχών.
  - Εκτίμηση αριθμητικών σφαλμάτων.
- Σχεδίαση αποτελεσμάτων.
- Εκτίμηση ευαισθησίας σε μεταβολές παραμέτρων του συστήματος.

Μεθοδολογία ανάπτυξης μοντέλων

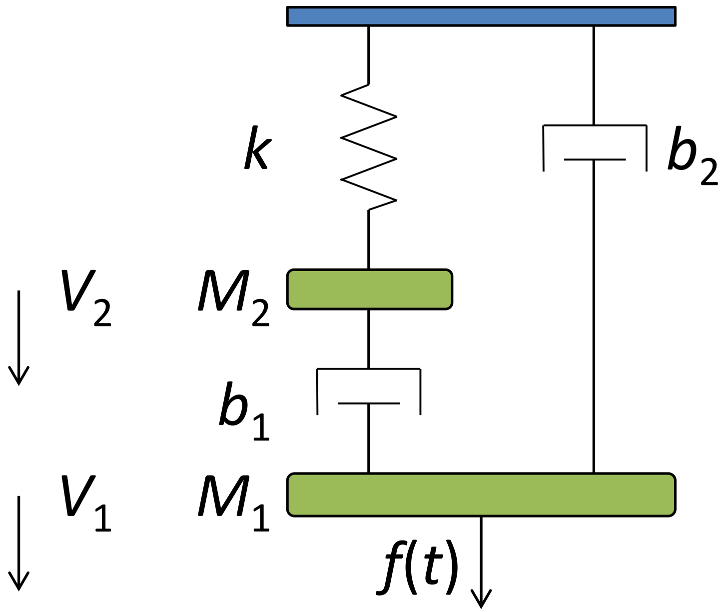
1. Ορισμός στόχων
2. Συλλογή πληροφοριών
3. Κατάστρωση μοντέλου
4. Επίλυση εξισώσεων
5. Ανάλυση αποτελεσμάτων
6. Τεκμηρίωση του μοντέλου

- Σύγκριση με εμπειρικά και πειραματικά δεδομένα.



Προβλέψεις μοντέλου

Παράδειγμα δυναμικού μοντέλου



$$M_1 \frac{dV_1(t)}{dt} + (b_1 + b_2)V_1(t) - b_1 V_2(t) = f(t)$$

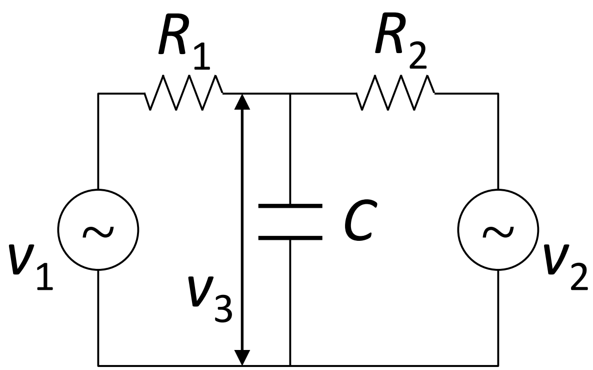
$$M_2 \frac{dV_2(t)}{dt} + b_1\big(V_2(t) - V_1(t)\big) + k\int V_2(t)dt = 0$$

Μελέτη απόκρισης ταχυτήτων μαζών του συστήματος σε ημιτονοειδή μεταβολή της δύναμης $r(t)$.

π.χ. $r(t)$=2ημ(5t).

- Συλλογή δεδομένων: Τιμές παραμέτρων M_1, M_2, b_1, b_2, k.
- Αρχικές συνθήκες.
- Επίλυση αναλυτικά ή με αριθμητική μέθοδο.

Παράδειγμα δυναμικού μοντέλου



Μελέτη απόκρισης τάσης v_3 του συστήματος σε μεταβολές των τάσεων των πηγών v_1 και v_2.

- Συλλογή δεδομένων: Τιμές παραμέτρων R_1, R_2, C.
- Αρχικές συνθήκες.
- Επίλυση αναλυτικά ή με αριθμητική μέθοδο.

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int i_3 dt, \quad i_1 = \frac{v_1 - v_3}{R_1}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int i_3 dt, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_3}{R_2}$$

$$v_3 = \frac{1}{C}\int i_3 dt \Leftrightarrow \frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C} i_3$$

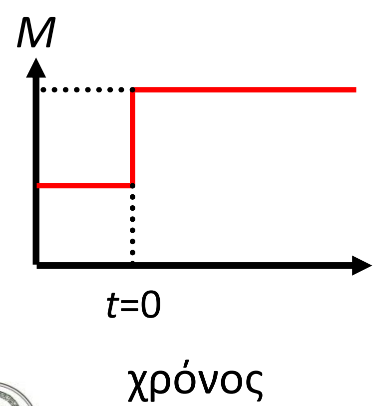
$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2}\right)$$

$$R_1 R_2 C \frac{dv_3}{dt} + (R_1 + R_2) v_3 = R_2 v_1 + R_1 v_2$$

Μετασχηματισμός LAPLACE

Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μετατροπή τους
σε αλγεβρικές εξισώσεις.
Εξαγωγή ποιοτικών χαρακτηριστικών δυναμικής απόκρισης
χωρίς επίλυση των εξισώσεων.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$



<u>Βηματική μεταβολή</u> στο t=0:

Σταθερή για t=0 μέχρι $t \rightarrow \infty$.

$$\boxed{L\{M\} = \int_0^\infty M e^{-st} dt = -\frac{M}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{M}{s}}$$

Μετασχηματισμός LAPLACE

Ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου είναι απαραίτητος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

1η παράγωγος: $$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{dy}{dt} e^{-st}dt = y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

$$= sL\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - y(0)$$

Σταθερή αρχική συνθήκη

2η παράγωγος: $$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

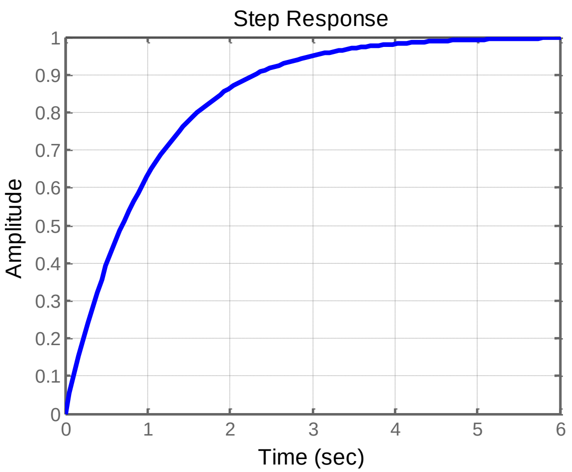
Σταθερές αρχικές συνθήκες

Μετασχηματισμός LAPLACE

Ολοκλήρωμα: $$L\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right\}=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

Σταθερές αρχικές συνθήκες

Μετασχηματισμός LAPLACE



$$f(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Ο όρος αυτός είναι χαρακτηριστικός της απόκρισης ενός συστήματος 1ης τάξης σε βηματική μεταβολή.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s}$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-(s+1/\tau)t} = -\frac{1}{s+1/\tau} e^{-(s+1/\tau)t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s+1/\tau}$$

$$L\left\{1 - e^{-t/\tau}\right\} = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} - e^{-t/\tau} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{s+\tau} = \boxed{\frac{1}{s(\tau s+1)}}$$

Μετασχηματισμός LAPLACE

Μετασχηματισμός Laplace

Πεδίο χρόνου Διαφορικές εξισώσεις	Πεδίο s Αλγεβρικές εξισώσεις

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός LAPLACE

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός τελεστής

$$L\{af_1(t)+bf_2(t)\}=aL\{f_1(t)\}+bL\{f_2(t)\}$$

Εφαρμόζεται μόνο σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα τελικής τιμής: Υπολογισμός της τελικής τιμής της μεταβλητής εξόδου χωρίς την επίλυση της δυναμικής συμπεριφοράς.

$$Y(t)\big|_{t\to\infty}=\lim_{s\to 0} sY(s)$$

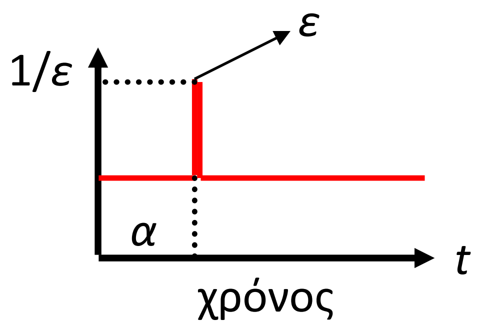
Ο μετασχηματισμός Laplace επιφέρει τη μετατροπή των μοντέλων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις σε αντίστοιχα συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων.

Μετασχηματισμός LAPLACE σημάτων εισόδου

Μοναδιαία κρουστική μεταβολή (συνάρτηση δέλτα, Dirac) στο $t=\alpha$:

Παλμός με μέγεθος 1 και πλάτος $t \rightarrow 0$

$\delta(t-\alpha)=0$ για $t \neq \alpha$.



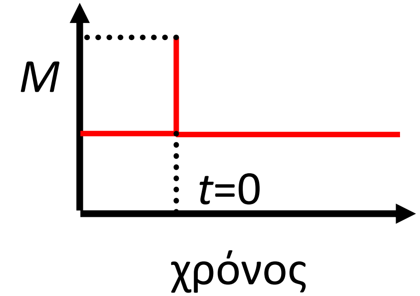
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

Μετασχηματισμός LAPLACE σημάτων εισόδου

<u>Κρουστική μεταβολή</u> στο t=0:

Παλμός με μέγεθος M και πλάτος $t \to 0$.

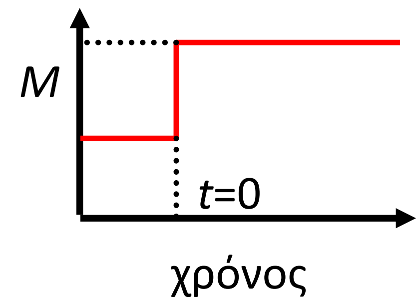
$$L\{Md(t)\} = M$$



<u>Βηματική μεταβολή</u> στο t=0:

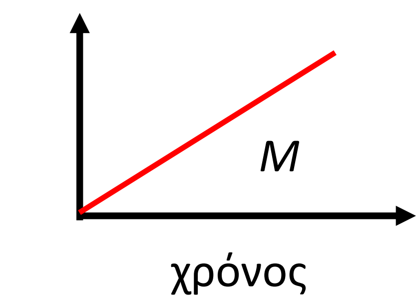
Σταθερή για t=0 μέχρι $t \to \infty$.

$$L\{M\} = \frac{M}{s}$$



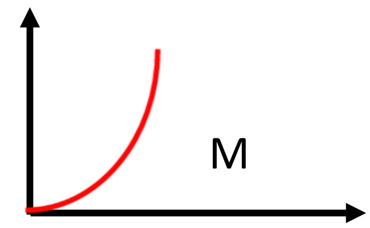
<u>Μεταβολή κλίσης</u> στο t=0:

$$L\{Mt\} = \frac{M}{s^2}$$



Μετασχηματισμός LAPLACE σημάτων εισόδου

Παραβολική μεταβολή στο t=0: $L\left\{t^2\right\}=\dfrac{2!}{s^3}$



Ημιτονοειδής μεταβολή στο t=0: $L\left\{\sin(\omega t)\right\}=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

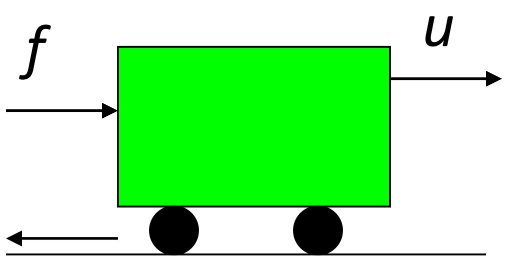
Συνημιτονοειδής μεταβολή στο t=0: $L\left\{\cos(\omega t)\right\}=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$L\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\}=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$L\left\{e^{-at}\cos(\omega t)\right\}=\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Παράδειγμα: Βηματική απόκριση συστήματος 1ης τάξης.



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv$

Αρχικές συνθήκες $v(0)=v_0$

Βήμα 1ο Εφαρμόζεται Μετασχηματισμός Laplace.

$$L\{m\dot{v}\} = L\{f(t) - cv\}$$

$$mL\{\dot{v}\} = L\{f\} - cL\{v\}$$

$$m[sV(s) - v(0)] = F(s) - cV(s)$$

Βήμα 2ο

$$\boxed{V(s) = \frac{mv(0)}{ms+c} + \frac{1}{ms+c}F(s)}$$

Επιλύεται ως προς τη μεταβλητή εξόδου V(s).

Επίδραση αρχικών Συνθηκών.

Επίδραση εξαναγκασμένης διέγερσης f(t).

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο συστήματος

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Η χρονική μεταβολή της ταχύτητας βρίσκεται
με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Βήμα 3ο

$$v(t) = L^{-1}\left\{\frac{mv(0)}{ms+c}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{ms+c}F(s)\right\}$$

Ελεύθερη δυναμική απόκριση.

$$L^{-1}\left\{\frac{mv(0)}{ms+c}\right\} = v(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s+c/m}\right\} = v(0)e^{-ct/m}$$

Δυναμική απόκριση σε εξωτερική διέγερση (π.χ. βηματική μεταβολή).

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{ms+c}\frac{f}{s}\right\} = \frac{f}{c}\left(1-e^{-ct/m}\right)$$

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Δυναμική απόκριση σε εξωτερική διέγερση (βηματική μεταβολή).

$$v(t) = \underbrace{v(0)e^{-ct/m}}_{\text{Επίδραση αρχικών συνθηκών}} + \underbrace{\frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)}_{\text{Επίδραση εξαναγκασμένης διέγερσης}}$$

$$v(t \to \infty) = \frac{f}{c}$$

Κέρδος διεργασίας: $\dfrac{\Delta v(t \to \infty)}{\Delta f} = \dfrac{1}{c}$

μονάδες εξόδου / μονάδες εισόδου

Σταθερά χρόνου: $\tau = m/c$ μονάδες χρόνου

Ρίζα χαρακτηριστικού πολυωνύμου: $s=-c/m$

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

$$v(t \to \infty) = \frac{f}{c}$$

Κέρδος διεργασίας: $\dfrac{\Delta v(t \to \infty)}{\Delta f} = \dfrac{1}{c}$

μονάδες εξόδου / μονάδες εισόδου

Εναλλακτικά από το θεώρημα τελικής τιμής:

$$v(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{ms+c}\frac{f}{s}\right] = \frac{f}{c}$$

Σταθερά χρόνου: $\tau = m/c$ μέτρο ταχύτητας απόκρισης εκφράζεται σε μονάδες χρόνου.

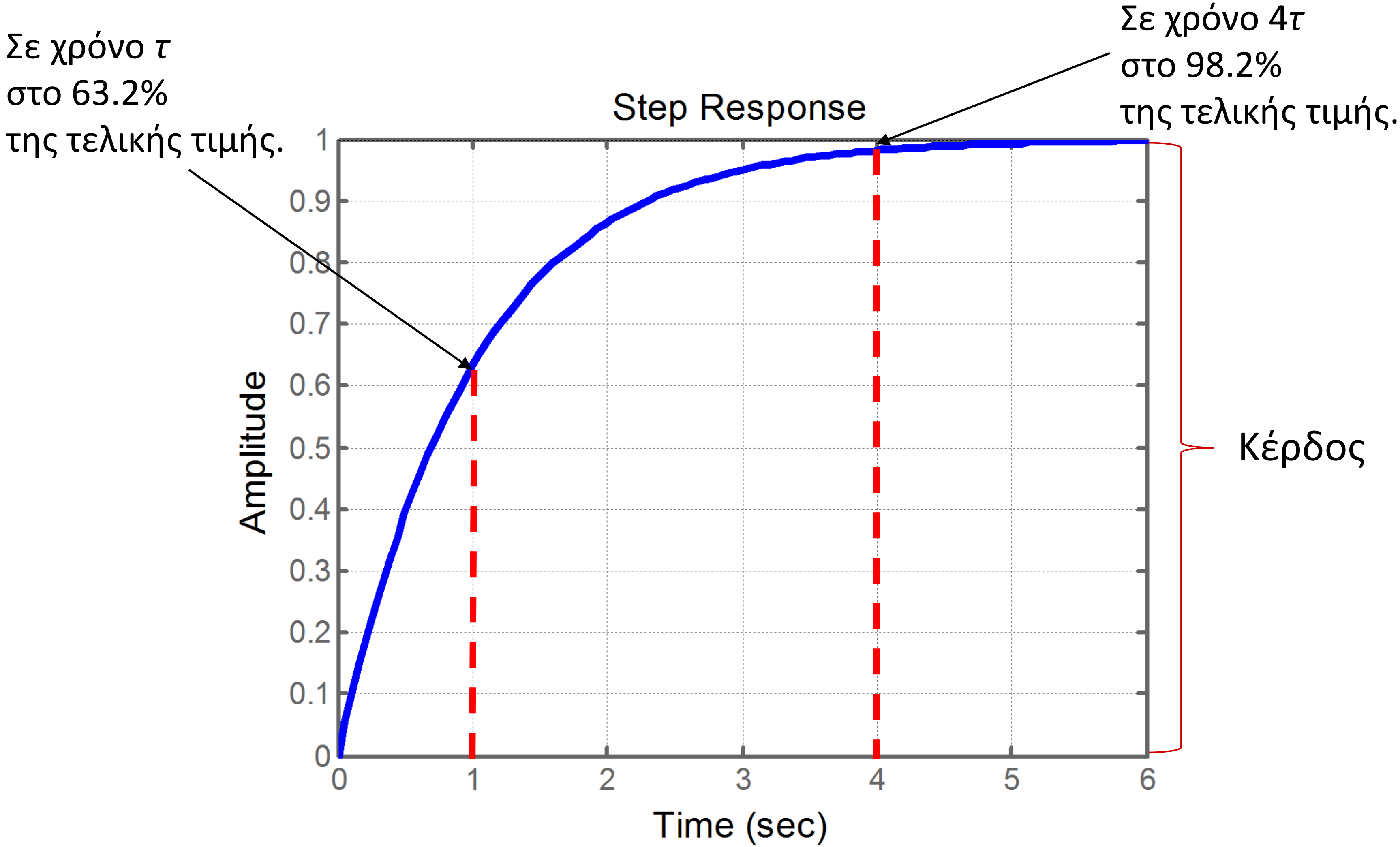
Ρίζα (πόλος) χαρακτηριστικού πολυωνύμου: $s = -c/m$

$$v(t) = \frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

Για $t = \tau$ $\quad v(t) = 0.623\, f/c$

Για $t = 4\tau$ $\quad v(t) = 0.98\, f/c$

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE



Βηματική μεταβολή τη χρονική στιγμή t=0 s στην εξωτερική διέγερση.

Αντίστροφος μετασχηματισμός LAPLACE

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζει την απόκριση στο πεδίου του χρόνου από το πεδίο Laplace.

- Ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων με βάση τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή.

$$G(s)=\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- Με χρήση των πινάκων του μετασχηματισμού Laplace υπολογίζεται η χρονική απόκριση.

1. Διακριτές πραγματικές ρίζες.

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{a_k}{s+p_k}\right\}=a_k e^{-p_k t}}$$

$$\boxed{a_k=\left[(s+p_k)\frac{q(s)}{p(s)}\right]_{s=-p_k}}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός LAPLACE

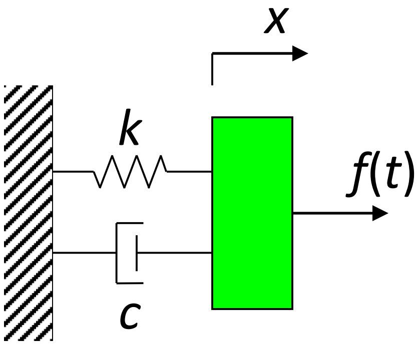
2. Συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

$$L\left\{e^{-\sigma t}\sin\left(\omega_d t\right)\right\} = \frac{\omega_d}{\left(s+\sigma\right)^2+\omega_d^2}$$

$$L\left\{e^{-\sigma t}\cos\left(\omega_d t\right)\right\} = \frac{s+\sigma}{\left(s+\sigma\right)^2+\omega_d^2}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{A}{\left(s+\sigma+\omega_d j\right)\left(s+\sigma-\omega_d j\right)}\right\} &= L^{-1}\left\{A_1\frac{\omega_d}{\left(s+\sigma\right)^2+\omega_d^2}+A_2\frac{s+\sigma}{\left(s+\sigma\right)^2+\omega_d^2}\right\} \\ &= A_1 e^{-\sigma t}\sin\left(\omega_d t\right)+A_2 e^{-\sigma t}\cos\left(\omega_d t\right) \\ &= \sqrt{A_1^2+A_2^2}\,e^{-\sigma t}\sin\left(\omega_d t-\tan^{-1}\left(A_2/A_1\right)\right) \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Βηματική απόκριση συστήματος 2ης τάξης.



Εξίσωση κίνησης: $m\ddot{x} = f(t) - c\dot{x} - kx$

Αρχικές συνθήκες: $x(0)=x_0$ $x'(0)=v_0$

Βήμα 1ο: Εφαρμόζεται μετασχηματισμός Laplace.

$$L\{m\ddot{x}\} + L\{c\dot{x}\} + L\{kx\} = L\{f(t)\}$$

$$m\left[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right] + c\left[sX(s) - x(0)\right] + kX(s) = F(s)$$

Βήμα 2ο: Επίλυση ως προς τη μεταβλητή εξόδου $X(s)$.

$$X(s) = \frac{(ms+c)x(0) + m\dot{x}(0)}{(ms^2 + cs + k)} + \frac{F(s)}{(ms^2 + cs + k)}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο συστήματος

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Βήμα 3ο: Η χρονική μεταβολή της μετατόπισης βρίσκεται με την εφαρμογή του αντίστροφου M-Laplace.

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{(ms+c)x(0)+m\dot{x}(0)}{\left(ms^2+cs+k\right)}\right\} + L^{-1}\frac{F(s)}{\left(ms^2+cs+k\right)}$$

Ελεύθερη δυναμική απόκριση.

$$x(t) = x(0)L^{-1}\left\{\frac{(ms+c)}{\left(ms^2+cs+k\right)}\right\} + \dot{x}(0)L^{-1}\left\{\frac{m}{\left(ms^2+cs+k\right)}\right\}$$

Δυναμική απόκριση σε εξωτερική διέγερση (π.χ. βηματική μεταβολή).

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{f}{s}\frac{1}{\left(ms^2+cs+k\right)}\right\}$$

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Ο παρονομαστής φέρεται στη μορφή: $\boxed{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$

Φυσική συχνότητα ω_η και συντελεστής απόσβεσης, ζ.

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Ρίζες χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\zeta<1$:

$$s=-\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$\sigma=-\zeta\omega_n, \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Ελεύθερη δυναμική απόκριση.

$$x(t)=Ae^{\sigma t}\cos(\omega_d t-\vartheta)$$
$$A_1=x_0 \quad A_2=(v_0+\sigma x_0)/\omega_d$$
$$A=\sqrt{A_1+A_2} \quad \vartheta=\tan^{-1}(A_2/A_1)$$

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE

Εξαναγκασμένη δυναμική απόκριση (βηματική μεταβολή) με μηδενικές αρχικές συνθήκες και ζ<1.

$$x(t)=\frac{f}{k}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{\sigma t}\cos(\omega_d t-\vartheta)\right]$$

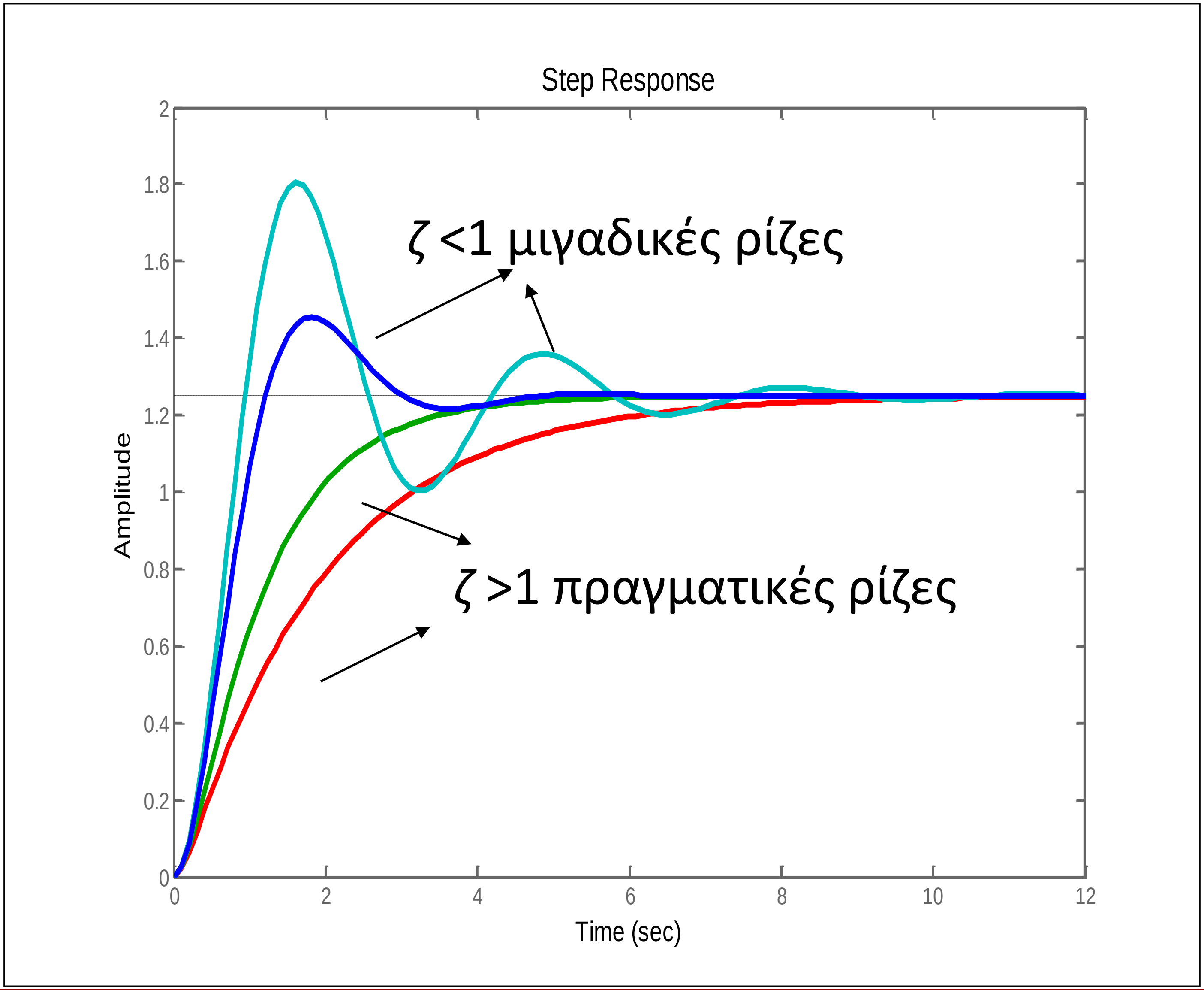
$$\vartheta=\tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$x(t\to\infty)=\frac{f}{k}$$

Κέρδος διεργασίας: $\dfrac{\Delta x(t\to\infty)}{\Delta f}=\dfrac{1}{k}$

μονάδες εξόδου / μονάδες εισόδου

Επίλυση δυναμικών συστημάτων με μετασχηματισμό LAPLACE



Δυναμικά συστήματα με μεταβλητές απόκλισης

Πώς μπορούν να απαλειφτούν οι αρχικές συνθήκες από το δυναμικό μοντέλο;

Αφαίρεση της (2) από την (1)

Μόνιμη κατάσταση

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad (1)$$

$$kx_s = f_s \qquad (2)$$

$$m(\ddot{x} - \ddot{x}_s) + c(\dot{x} - \dot{x}_s) + k(x - x_s) = f(t) - f_s$$

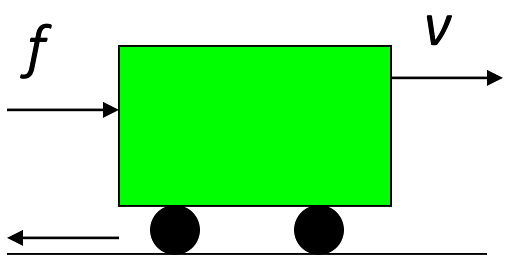
$$m\ddot{x}' + c\dot{x}' + kx' = f'$$

Μεταβλητή απόκλισης

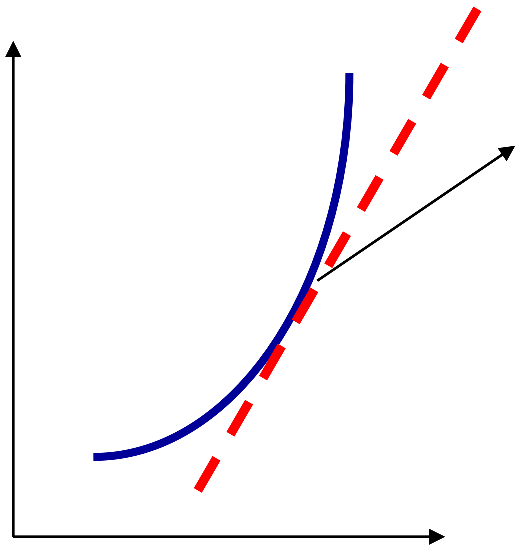
Η μεταβλητή απόκλισης ορίζεται ως η διαφορά από μια κατάσταση ισορροπίας (αρχικές συνθήκες ή σημείο γραμμικοποίησης). Αν οι αρχικές συνθήκες αντιπροσωπεύουν μια κατάσταση ισορροπίας, τότε οι αρχικές συνθήκες σε σύστημα μεταβλητών απόκλισης είναι μηδενικές.

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Μη γραμμικό σύστημα.



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv^2$



Γραμμικοποίηση γύρω
από κάποιο επιθυμητό σημείο
ή σημείο ισορροπίας.

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Ανάπτυξη της μη γραμμικής σχέσης σε σειρά Taylor.
Διατήρηση μόνο των όρων πρώτης τάξης.

Η μόνη μεταβλητή της εξίσωσης

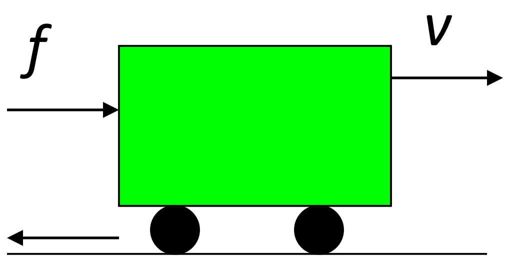
$$F(x) = \underbrace{F(x_s) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_s}}(x - x_s) + \cancelto{0}{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_s}(x - x_s)^2} + R$$

Οι όροι είναι σταθεροί διότι υπολογίζονται στο σημείο γραμμικοποίησης, x_s

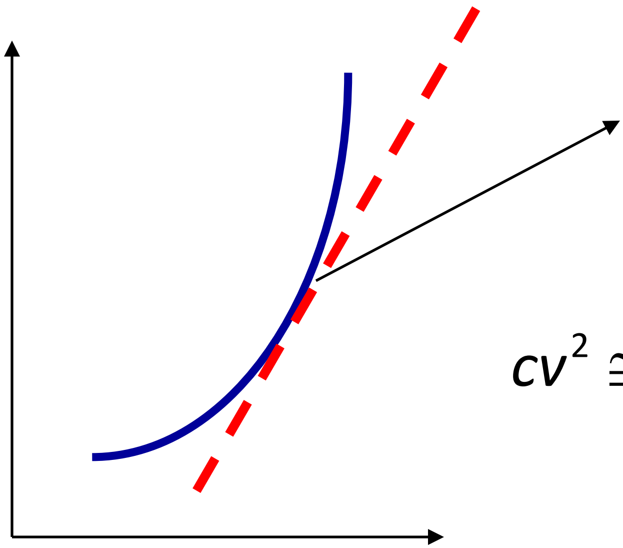
Ορίζουμε τη μεταβλητή απόκλισης: $x' = (x - x_s)$

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Μη γραμμικό σύστημα.



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv^2$

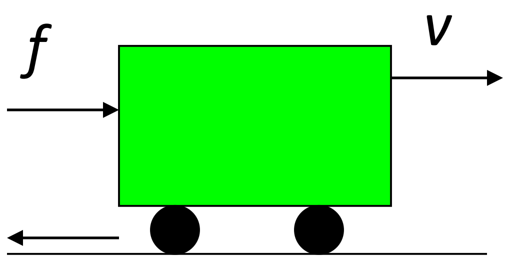


Γραμμικοποίηση γύρω
από το σημείο ισορροπίας, v_0

$$cv^2 \cong cv_0^2 + \left.\frac{d(cv^2)}{dv}\right|_{v=v_0} (v - v_0) = cv_0^2 + 2cv_0(v - v_0)$$

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Μη γραμμικό σύστημα.



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv^2$

$$cv^2 \cong cv_0^2 + \left.\frac{d(cv^2)}{dv}\right|_{v=v_0}(v - v_0) = cv_0^2 + 2cv_0(v - v_0)$$

Γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης (1):

$$m\dot{v} = f(t) - cv_0^2 - 2cv_0(v - v_0)$$

Εξίσωση κίνησης σε μόνιμη κατάσταση (2):

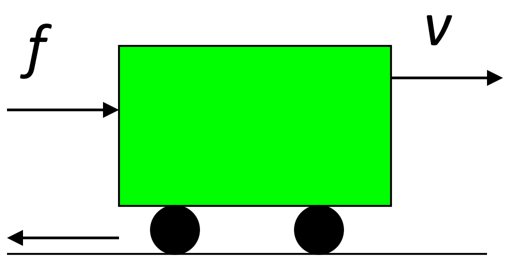
$$0 = f_0(t) - cv_0^2$$

Αφαιρώντας τη (2) από την (1):

$$m(\dot{v} - \dot{v}_0) = [f(t) - f_0] - 2cv_0(v - v_0)$$

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Μη γραμμικό σύστημα.



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv^2$

$$cv^2 \cong cv_0^2 + \left.\frac{d\left(cv^2\right)}{dv}\right|_{v=v_0}\left(v - v_0\right) = cv_0^2 + 2cv_0\left(v - v_0\right)$$

Ορίζοντας μεταβλητές απόκλισης v' και f':

$$m\dot{v}' = f'(t) - 2cv_0v'$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$msV'(s) = F'(s) - 2cv_0V'(s)$$

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

Ανάπτυξη της μη γραμμικής σχέσης πολλαπλών μεταβλητών σε σειρά Taylor.

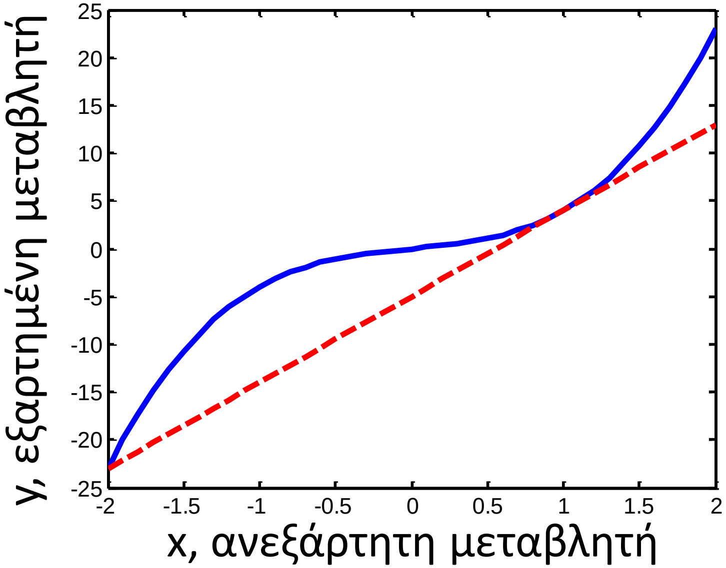
$$F\left(x_1, x_2\right) = F\left(x_{1s}, x_{2s}\right) + \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{x_{1,s}, x_{2,s}} \left(x_1 - x_{1s}\right) + \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{x_{1,s}, x_{2,s}} \left(x_2 - x_{2s}\right)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές απόκλισης από το σημείο γραμμικοποίησης:

$x_1' = (x_1 - x_{1s})$ και $x_2' = (x_2 - x_{2s})$

Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων

$y = 1.5\,x + 2.5\,x^3$ στο $x = 0$



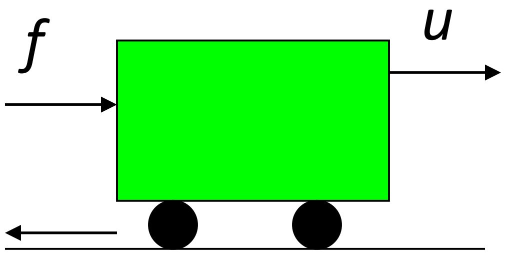
Η ακρίβεια της προσέγγισης εξαρτάται από:

- Το βαθμό μη-γραμμικότητας.
- Την απόκλιση της *x* από το σημείο γραμμικοποίησης, x_s.

Επειδή ο αυτόματος έλεγχος επιδιώκει να διατηρήσει τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές κοντά σε κάποιες επιθυμητές τιμές, η γραμμική προσέγγιση είναι συνήθως, αλλά όχι πάντα, αποδεκτή.

Απομάκρυνση της διεργασίας από το σημείο γραμμικοποίησης, επιβάλλει τη διόρθωση της προσέγγισης.

Συνάρτηση μεταφοράς δυναμικού συστήματος



Εξίσωση κίνησης: $m\dot{v} = f(t) - cv$

Αρχικές συνθήκες: $v(0)=v_0=0$.

Εφαρμόζεται μετασχηματισμός Laplace.

$$L\{m\dot{v}\} = L\{f(t) - cv\}$$

$$mL\{\dot{v}\} = L\{f\} - cL\{v\}$$

$$m[sV(s) - v(0)] = F(s) - cV(s)$$

$$V(s) = \frac{1}{ms+c} F(s)$$

Μεταβλητή εξόδου ταχύτητα $u(t) \rightarrow V(s)$

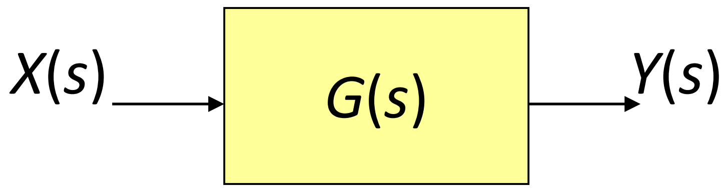
Μεταβλητή εισόδου δύναμη $f(t) \rightarrow F(s)$

Συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)

Συνάρτηση μεταφοράς δυναμικού συστήματος

Από το μετασχηματισμό Laplace του δυναμικού μοντέλου εξάγονται τα ακόλουθα:

$Y(s) = G(s)\, X(s)$

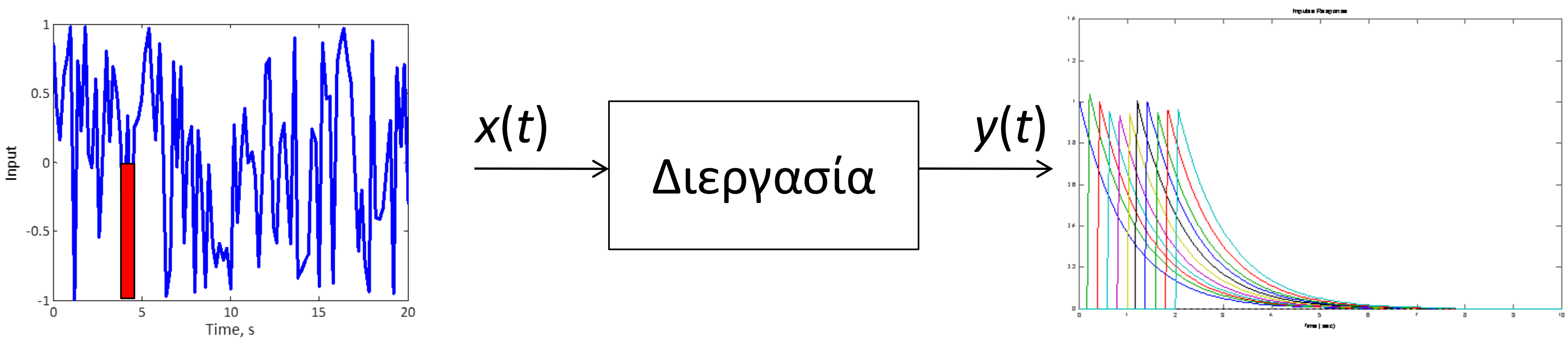


Η <u>συνάρτηση μεταφοράς</u> είναι ο λόγος της μεταβλητής εξόδου, $Y(s)$, προς τη μεταβλητή εισόδου, $X(s)$, για μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$\boldsymbol{G(s) = Y(s)/X(s)}$$

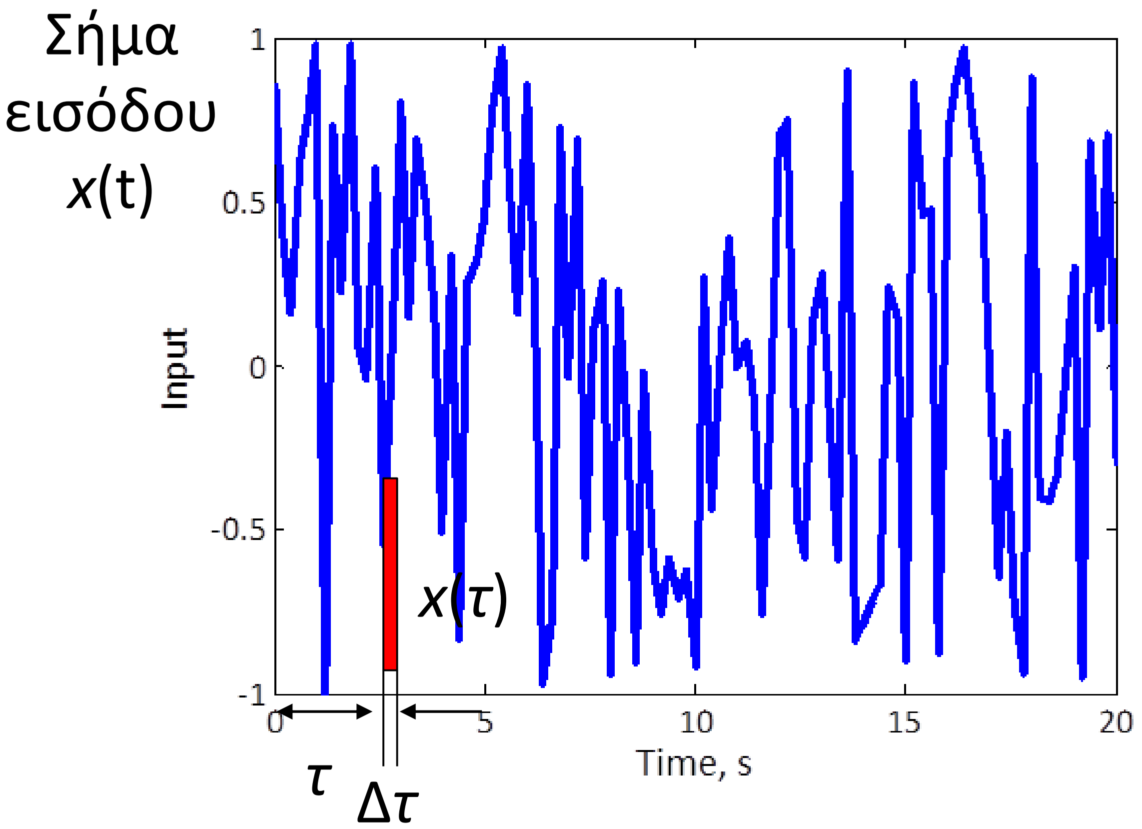
Φυσική σημασία συνάρτησης μεταφοράς

Θεωρείται ένα οποιοδήποτε τυχαίο σήμα εισόδου (διέγερση) ως μια αλληλουχία κρούσεων μεταβλητού μεγέθους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.



Η κάθε διέγερση κρούσης προκαλεί την κρουστική απόκριση της διεργασίας. Η συνολική απόκριση αποτελείται από την υπέρθεση του συνόλου των κρουστικών αποκρίσεων.

Φυσική σημασία συνάρτησης μεταφοράς



Η διέγερση που αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή θεωρείται ως κρουστική δύναμη που ασκείται τη χρονική στιγμή $\tau<t<\tau+\Delta\tau$.

$$x(\tau)\Delta\tau\,\delta(t-\tau)$$

Φυσική σημασία συνάρτησης μεταφοράς

Το σήμα εισόδου εκφράζεται ως το άθροισμα όλων των κρουστικών (δέλτα Dirac) μεταβολών που μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$x(t) = \sum_{\tau} x(\tau)\Delta\tau\,\delta(t-\tau)$$

Η έξοδος είναι η υπέρθεση των κρουστικών δυνάμεων που μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\Delta y(t,\tau) = x(\tau)\Delta\tau\,g(t-\tau)$$

Για όλη την αλληλουχία των κρουστικών μεταβολών:

$$y(t) = \sum_{\tau} x(\tau)\Delta\tau\,g(t-\tau)$$

Αντικατάσταση αθροίσματος από ολοκλήρωμα:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ολοκλήρωμα συνέλιξης (convolution integral)

Φυσική σημασία συνάρτησης μεταφοράς

Η έξοδος είναι η υπέρθεση των κρουστικών δυνάμεων που μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

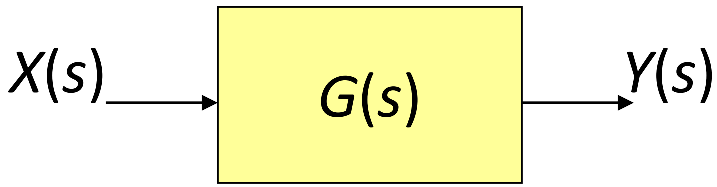
$$x(\tau)\Delta\tau\,\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{Διεργασία}} \longrightarrow \Delta y(t,\tau)=x(\tau)\Delta\tau\,g(t-\tau)$$

$$X(s) \qquad\qquad\qquad Y(s)=G(s)X(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Συνάρτηση μεταφοράς διεργασίας

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

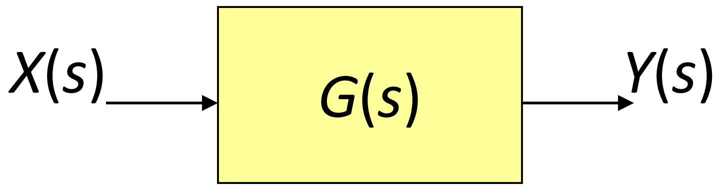


Ανακεφαλαίωση:

- Πώς πετυχαίνονται μηδενικές συνθήκες για κάθε μοντέλο;
- Περιορίζεται η χρήση της συνάρτησης μεταφοράς μόνο σε βηματικές μεταβολές;
- Πώς αντιμετωπίζονται μη-γραμμικά μοντέλα διεργασιών;
- Πόσες μεταβλητές εισόδου και εξόδου συνδέονται με μια συνάρτηση μεταφοράς;

Συνάρτηση μεταφοράς διεργασίας

$$Y(s) = G(s)X(s)$$



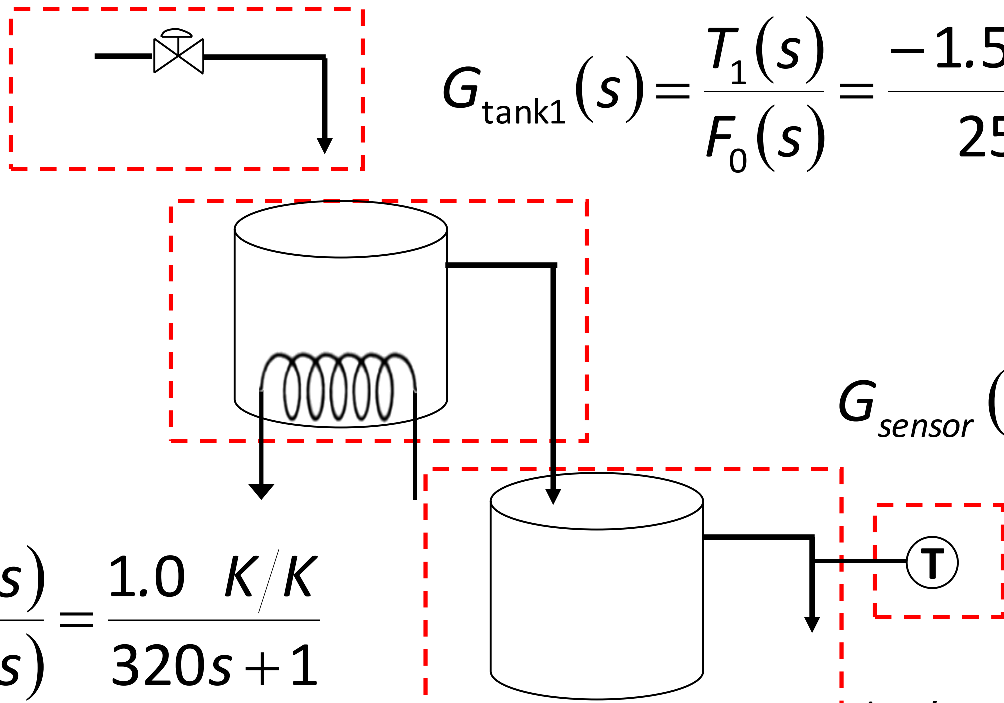
Ποιο είναι το όφελος της έκφρασης των δυναμικών συστημάτων με συναρτήσεις μεταφοράς;

- Τα μοντέλα μπορούν εύκολα να συνδυαστούν αλγεβρικά.
- Μπορούν να προσδιοριστούν πολλά από τα δυναμικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος χωρίς επίλυση του δυναμικού μοντέλου.

Συνάρτηση μεταφοράς διεργασίας

Διεργασίες σε σειρά

$$G_{valve}(s)=\frac{F_0(s)}{v(s)}=.20\ \frac{m^3/s}{\%}$$



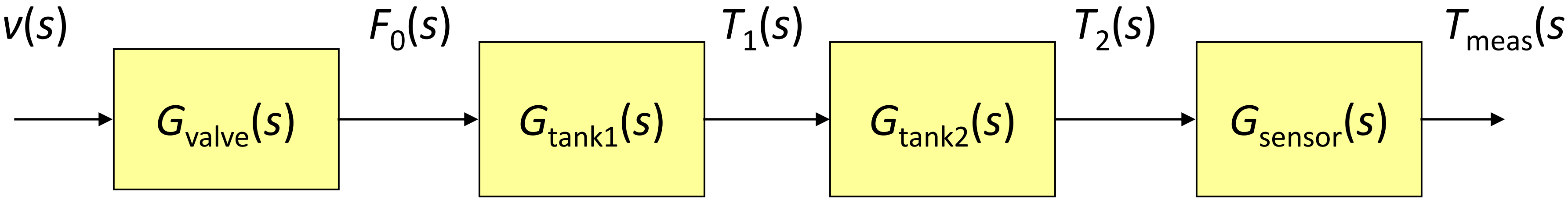
$$G_{tank1}(s)=\frac{T_1(s)}{F_0(s)}=\frac{-1.5\ \ K/m^3/s}{250s+1}$$

$$G_{sensor}(s)=\frac{T_{measured}(s)}{T_2(s)}=\frac{1.0\ \ K/K}{10s+1}$$

$$G_{tank2}(s)=\frac{T_2(s)}{T_1(s)}=\frac{1.0\ \ K/K}{320s+1}$$

(χρόνος σε sec)

Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων

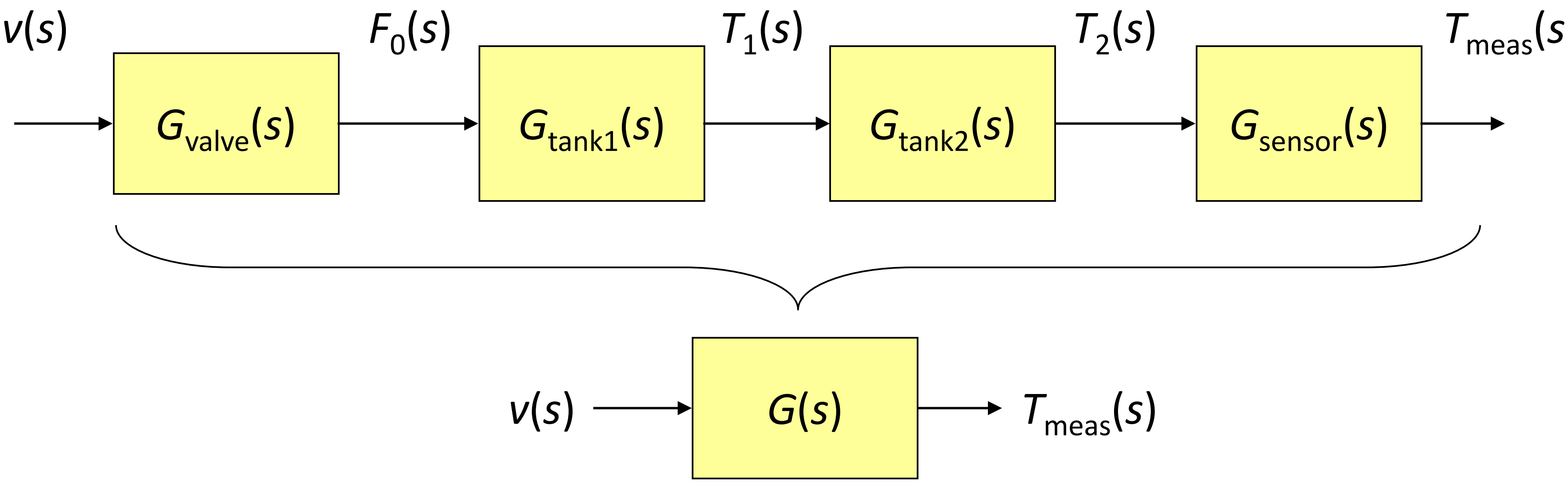


Απεικόνιση των εξισώσεων του μοντέλου με διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων.

- Διαχωρισμός επιμέρους διεργασιών.
- Εύκολη απεικόνιση διεργασιών.
- Η φορά των βελών δηλώνει τη σχέση αιτίας – αποτελέσματος ανάμεσα στις μεταβλητές εισόδου και εξόδου.

Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων

Συνδυασμός δυναμικών συστημάτων χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των διαγραμμάτων βαθμίδων.

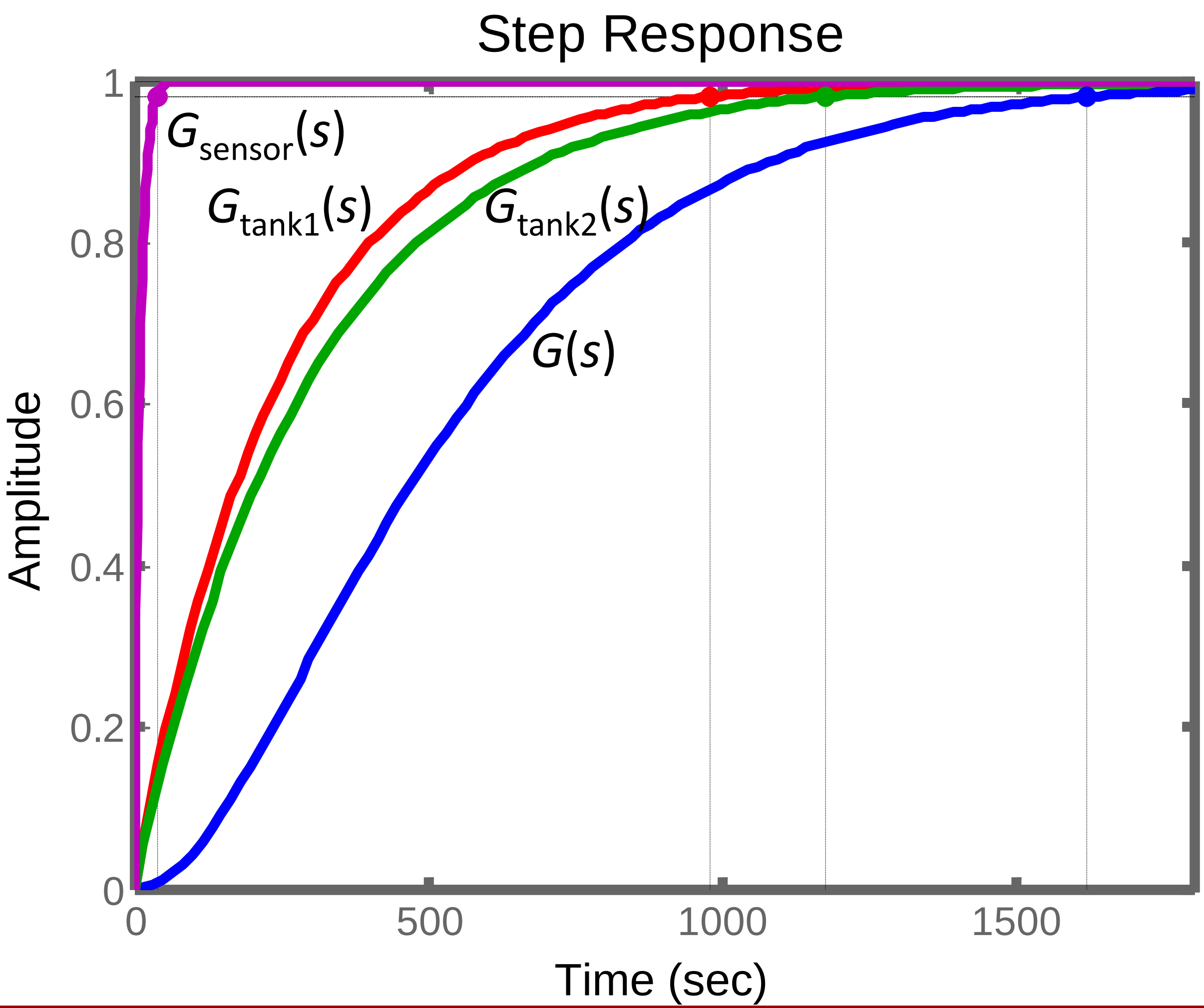


$$\frac{T_{meas}(s)}{v(s)} = G(s) = \left[\frac{T_{meas}(s)}{T_2(s)}\right]\left[\frac{T_2(s)}{T_1(s)}\right]\left[\frac{T_1(s)}{F_0(s)}\right]\left[\frac{F_0(s)}{v(s)}\right]$$

$$= G_s(s) G_{T2}(s) G_{T1}(s) G_v(s)$$

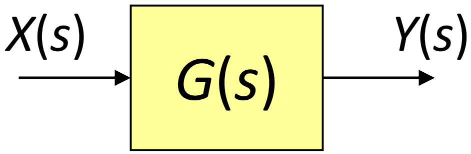
Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων

Δυναμική απόκριση ολικού συστήματος και επιμέρους βαθμίδων.

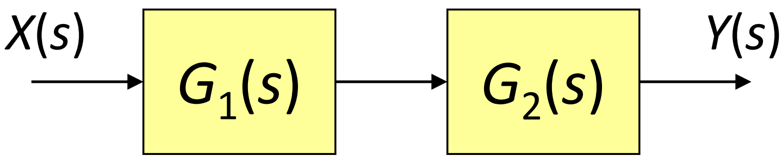


Μετασχηματισμοί λειτουργικών βαθμίδων

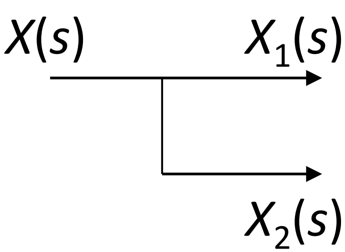
Επιτρεπτοί μετασχηματισμοί



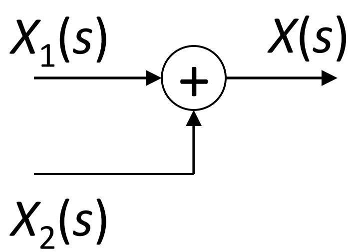
$$Y(s)=G(s)X(s)$$



$$Y(s)=G_1(s)G_2(s)X(s)$$

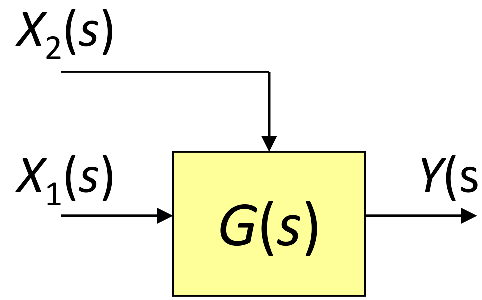


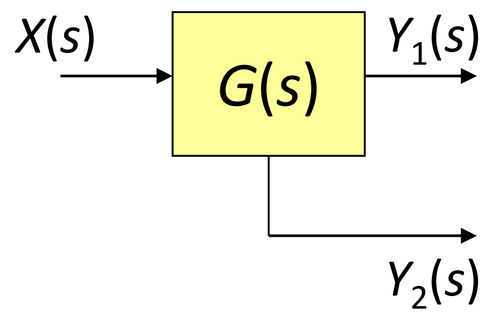
$$X(s)=X_1(s)=X_2(s)$$



$$X(s)=X_1(s)+X_2(s)$$

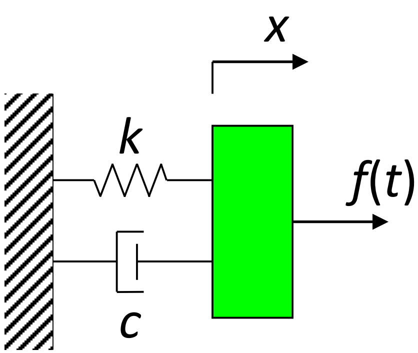
ΜΗ επιτρεπτοί μετασχηματισμοί





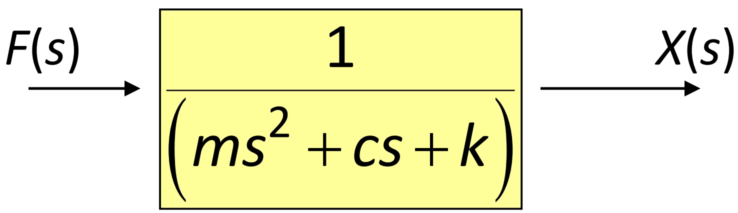
Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων

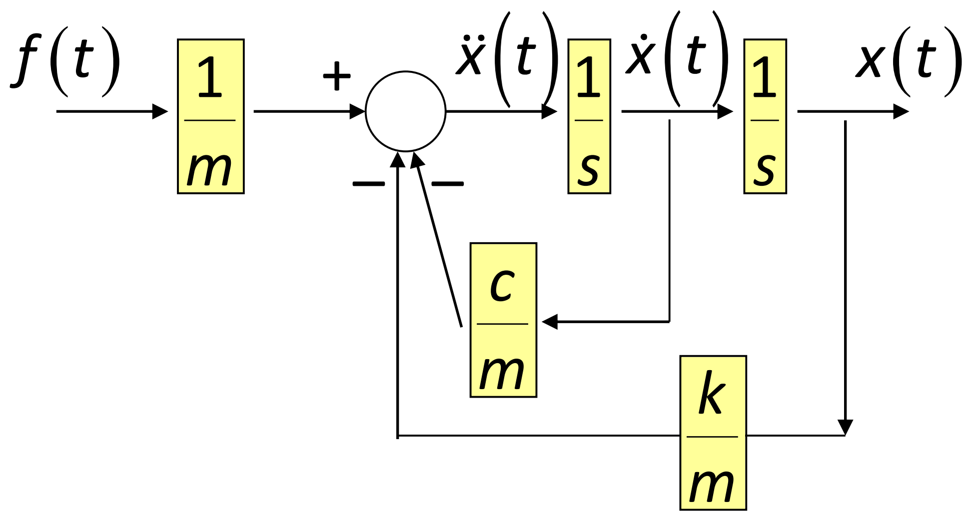
Χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των διαγραμμάτων βαθμίδων μπορεί να αναπαρασταθεί οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα.



$$\ddot{x} = \frac{1}{m} f(t) - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{\left(ms^2 + cs + k\right)} F(s)}$$

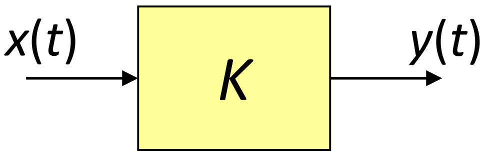




Μετασχηματισμοί λειτουργικών βαθμίδων

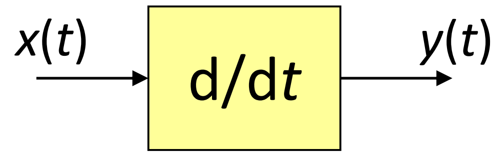
Οι θεμελιώδεις τελεστές σε γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (linear time invariant) συστήματα είναι:

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό



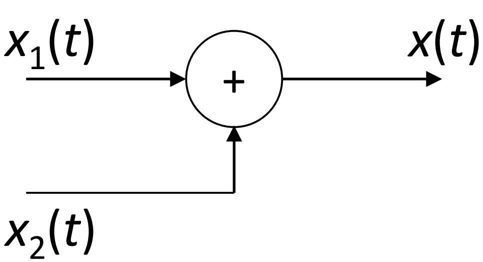
$y(t)=Kx(t)$

Παραγώγιση



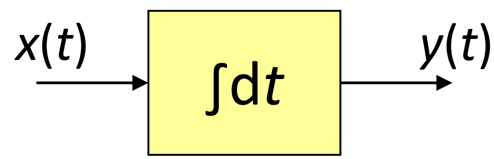
$y(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$

Άθροιση σημάτων



$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

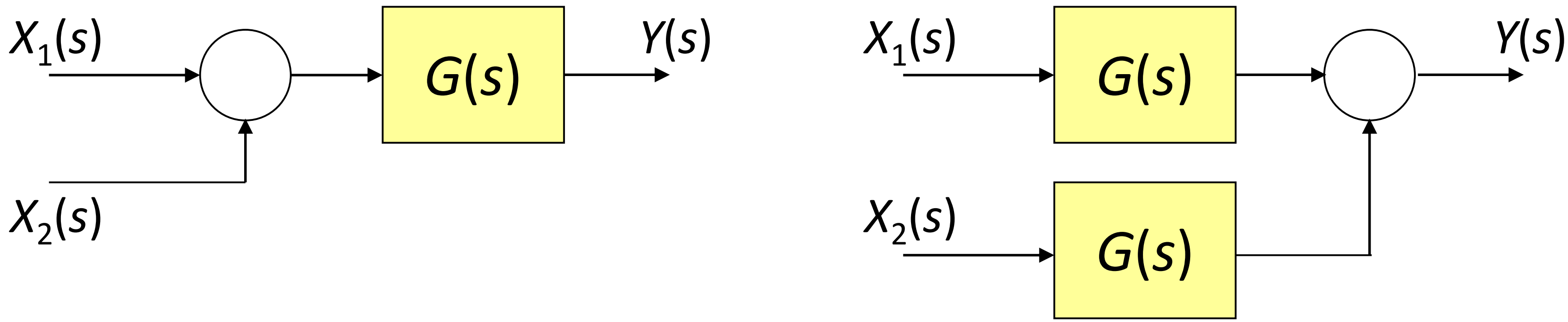
Ολοκλήρωση



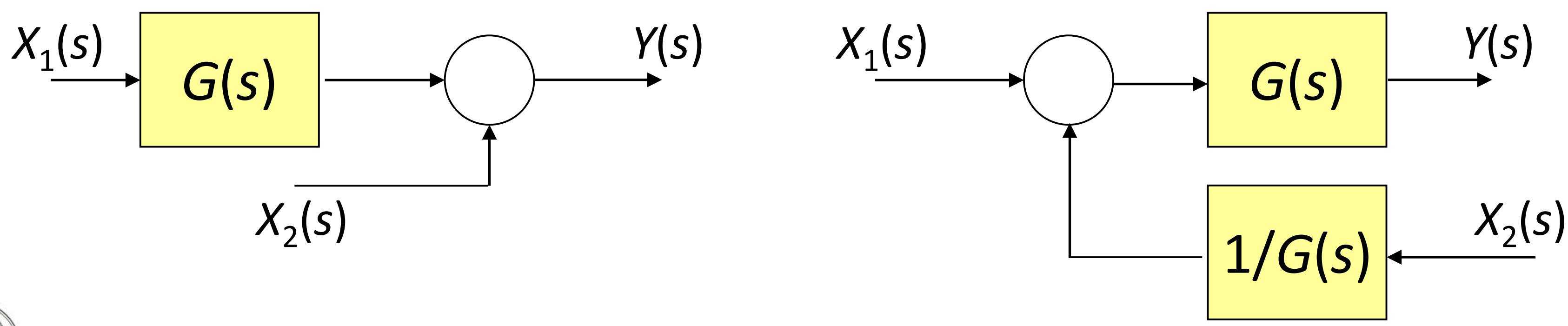
$y(t)=\int x(t)\mathrm{d}t$

Μετασχηματισμοί λειτουργικών βαθμίδων

Μετακίνηση σημείου άθροισης πίσω από μια βαθμίδα.

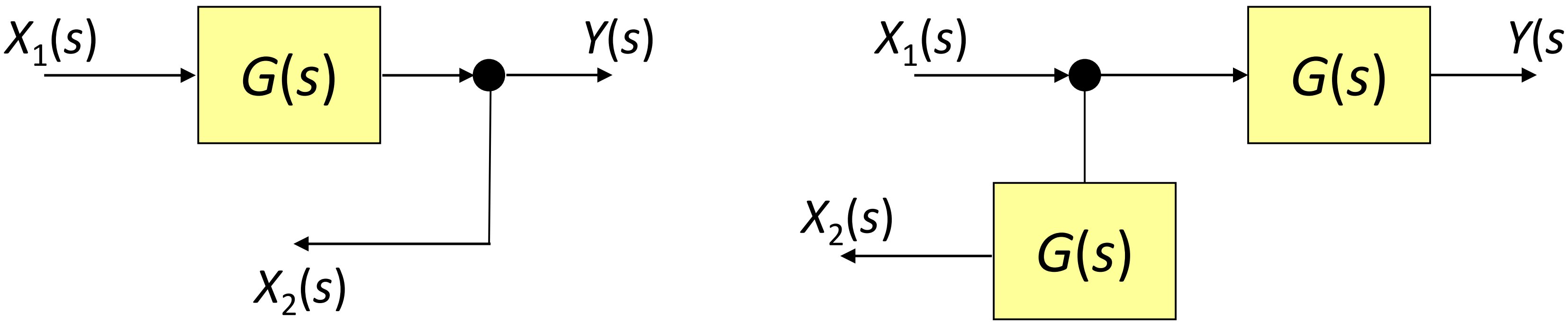


Μετακίνηση σημείου άθροισης μπροστά από μια βαθμίδα.

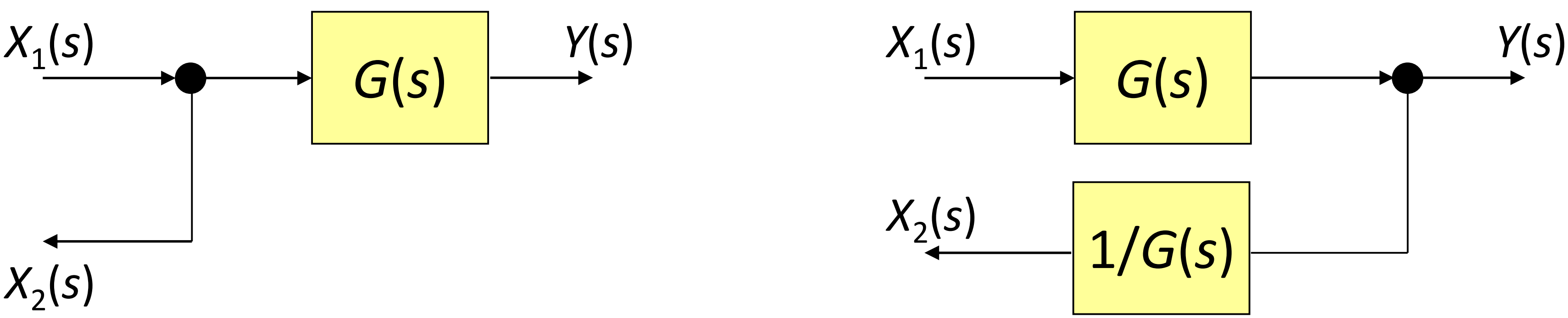


Μετασχηματισμοί λειτουργικών βαθμίδων

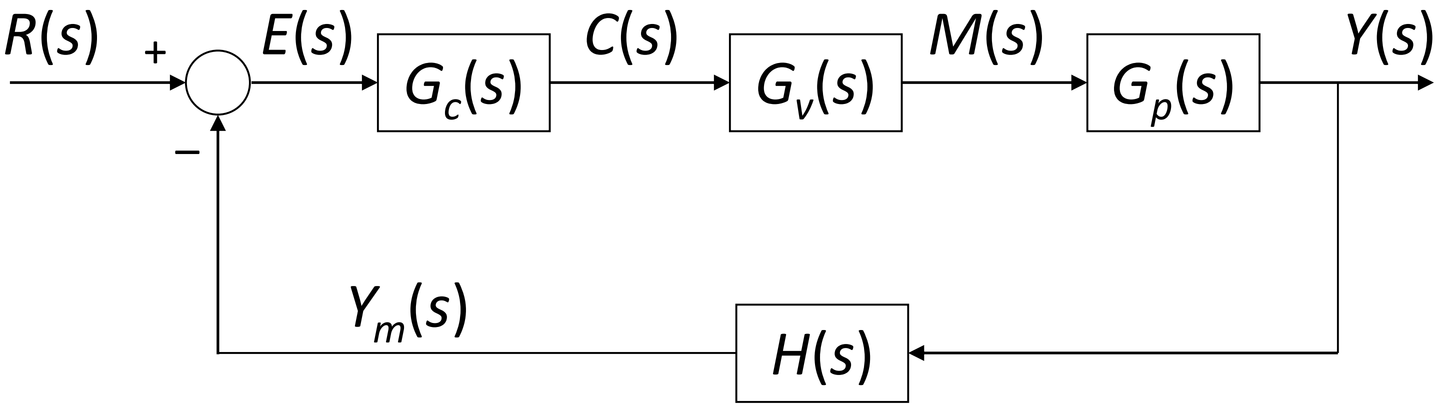
Μετακίνηση κόμβου μπροστά από μια βαθμίδα.



Μετακίνηση κόμβου πίσω από μια βαθμίδα.



Απαλοιφή βρόχου ανάδρασης



$$Y(s)=G_p(s)M(s)=G_p(s)G_v(s)C(s)=G_p(s)G_v(s)G_c(s)E(s)$$
$$=G_p(s)G_v(s)G_c(s)\left[R(s)-Y_m(s)\right]$$
$$=G_p(s)G_v(s)G_c(s)\left[R(s)-H(s)Y(s)\right]\Rightarrow$$

$$\left[1+G_p(s)G_v(s)G_c(s)H(s)\right]Y(s)=G_p(s)G_v(s)G_c(s)R(s)$$

$$Y(s)=\boxed{\frac{G_p(s)G_v(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_v(s)G_c(s)H(s)}}R(s)$$

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου

Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων η συνάρτηση μεταφοράς φέρεται στην ακόλουθη μορφή:

Τι μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς επίλυση της διαφορικής εξίσωσης;

$$Y(s)=G(s)X(s)=\left[q(s)/p(s)\right]X(s)=C_1/(s-a_1)+C_2/(s-a_2)$$

Έστω a_i οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, $p(s)$=0. Οι ρίζες του παρονομαστή ονομάζονται και πόλοι της. Οι ρίζες του αριθμητή ονομάζονται μηδενικά.

$$Y(t)=\boxed{A_0+A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+}\ldots+\boxed{\left(B_0+B_1t+B_2t^2+..\right)e^{\alpha_p t}+}$$

$$\ldots+\boxed{\left[C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\right]e^{\alpha_q t}+\ldots}$$

Πραγματικά, διακριτά $\boldsymbol{a_i}$

Μιγαδικά $\boldsymbol{a_i}$
$\boldsymbol{a_q}$ είναι **Re{$\boldsymbol{a_i}$}**

Πραγματικά, επαναλαμβανόμενα $\boldsymbol{a_i}$

Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς

$$Y(t) = A_0 + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + \left(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + ..\right) e^{\alpha_p t} +$$

$$\ldots + \left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right] e^{\alpha_q t} + \ldots$$

1. Αν όλοι οι πόλοι a_i έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε όλοι οι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδέν με το χρόνο και συνεπώς η απόκριση του συστήματος $Y(t)$ συγκλίνει σε πεπερασμένη τιμή.

   Αν έστω ένας πόλος a_i έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε ο αντίστοιχος όρος απειρίζεται με το χρόνο και συνεπώς η απόκριση του συστήματος $Y(t)$ τείνει στο άπειρο.

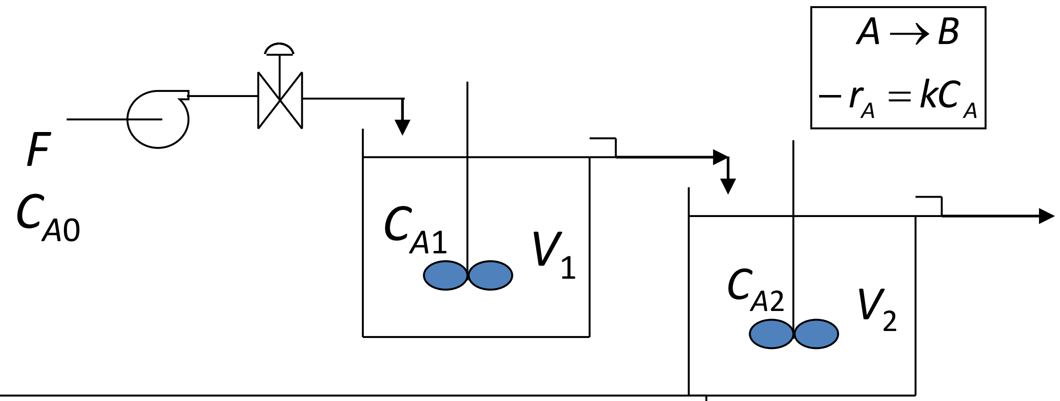
2. Αν όλοι οι πόλοι a_i είναι πραγματικοί, τότε η απόκριση του συστήματος $Y(t)$ δεν εμφανίζει ταλαντώσεις.

   Αν υπάρχει έστω και ένα ζεύγος πόλων a_i που είναι μιγαδικοί, τότε η απόκριση του συστήματος $Y(t)$ εμφανίζει ταλαντώσεις.

Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς

$$\tau_1 \frac{dC'_{A1}}{dt} + C'_{A1} = K_1 C'_{A0}$$

$$\tau_2 \frac{dC'_{A2}}{dt} + C'_{A2} = K_2 C'_{A1}$$

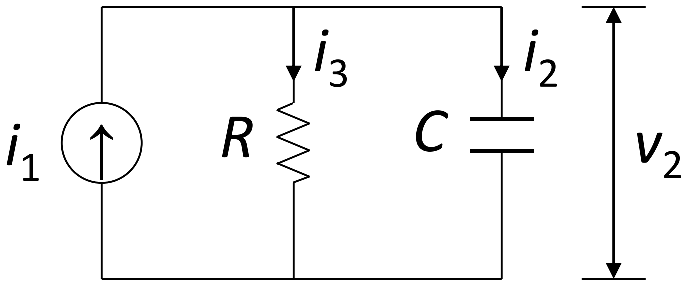


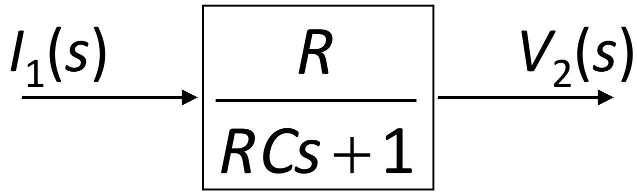
1. Είναι η απόκριση πεπερασμένη ή απειρίζεται;
2. Είναι το σύστημα υπέρ- ή υπό-κρίσιμο;
3. Ποια είναι η τάξη του συστήματος;

   (Τάξη = ο αριθμός των παραγωγίσεων της εισόδου και της εξόδου).
4. Ποιο είναι το κέρδος της διεργασίας σε μόνιμη κατάσταση;

Όλα αυτά χωρίς επίλυση του συστήματος!

Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς





Τάξη του συστήματος: 1η (εκθετική απόκριση).
Κέρδος: Για *s*=0, οπότε κέρδος=*R*.
Μηδενικά δεν υπάρχουν.

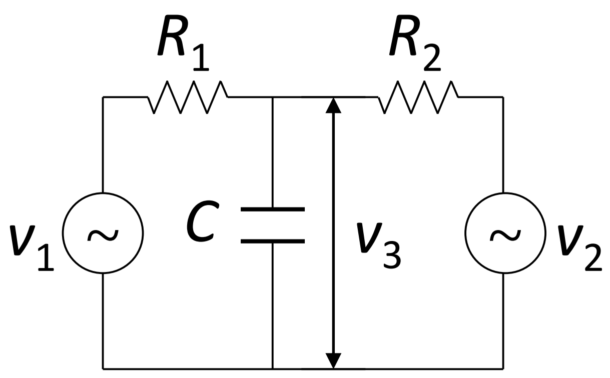
$$i_1 = i_2 + i_3 \quad v_2 = v_3$$

$$i_3 = v_3 / R$$

$$v_2 = \frac{1}{C}\int i_2 dt = \frac{1}{C}\int\left(i_1 - \frac{1}{R}v_2\right)dt \Rightarrow$$

$$RC\frac{dv_2}{dt} + v_2 = Ri_1 \Rightarrow \boxed{(RCs+1)V_2(s) = RI_1(s)}$$

Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς



Σταθερά χρόνου
$\tau = R_1 R_2 C/(R_1+R_2)$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int i_3 dt, \quad i_1 = \frac{v_1 - v_3}{R_1}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int i_3 dt, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_3}{R_2}$$

$$v_3 = \frac{1}{C}\int i_3 dt \Leftrightarrow \frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C} i_3$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2}\right)$$

$$R_1 R_2 C \frac{dv_3}{dt} + (R_1 + R_2) v_3 = R_2 v_1 + R_1 v_2$$

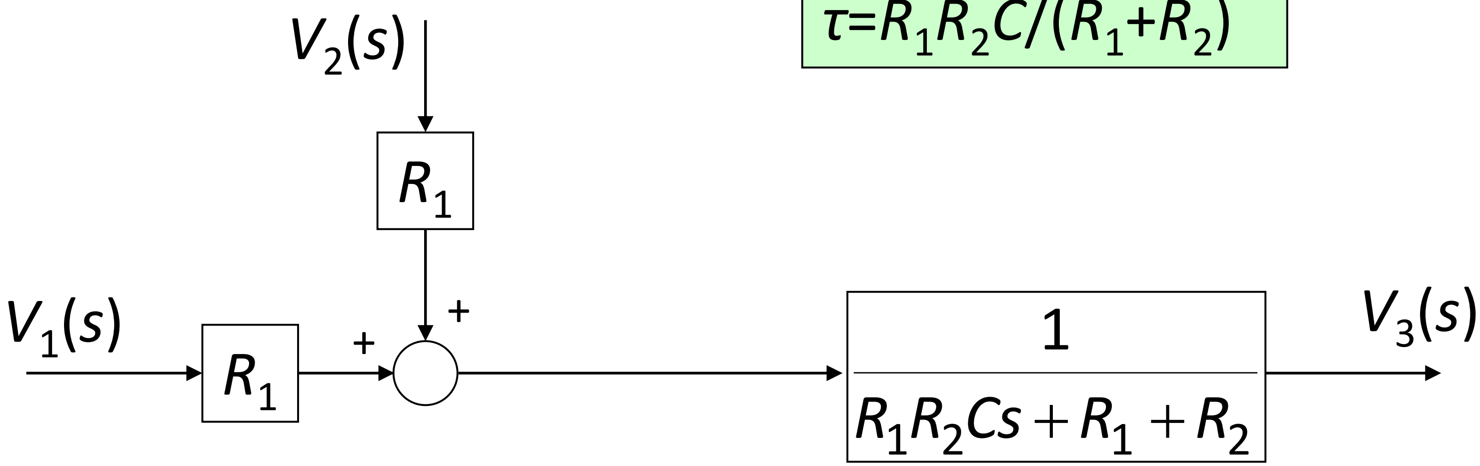
Ποιοτική ανάλυση δυναμικής συμπεριφοράς

$$R_1R_2C\frac{dv_3}{dt}+\left(R_1+R_2\right)v_3=R_2v_1+R_1v_2$$

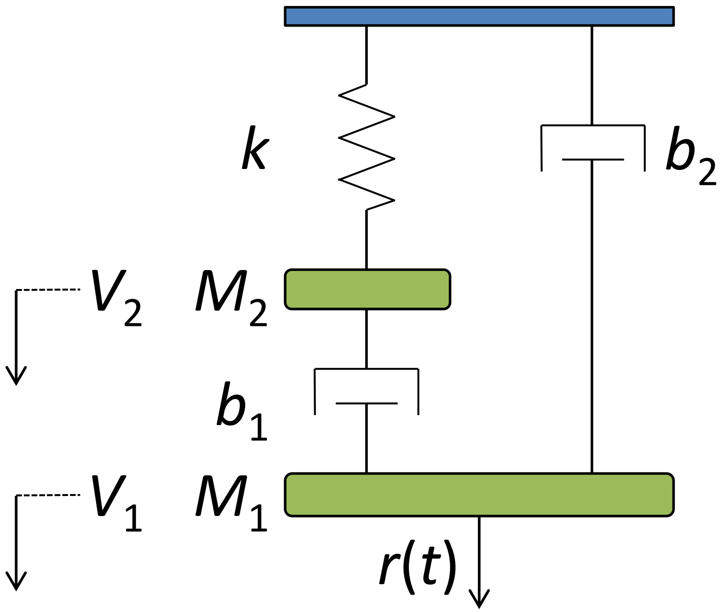
$$\left(R_1R_2Cs+R_1+R_2\right)V_3(s)=R_2V_1(s)+R_1V_2(s)$$

$$V_3(s)=\frac{R_2}{\left(R_1R_2Cs+R_1+R_2\right)}V_1(s)+\frac{R_1}{\left(R_1R_2Cs+R_1+R_2\right)}V_2(s)$$

Σταθερά χρόνου
$\tau=R_1R_2C/(R_1+R_2)$



Ανάλυση δυναμικού συστήματος



$$M_1\frac{dV_1(t)}{dt}+(b_1+b_2)V_1(t)-b_1V_2(t)=r(t)$$

$$M_2\frac{dV_2(t)}{dt}+b_1(V_2(t)-V_1(t))+k\int V_2(t)dt=0$$

Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace.

$$\left.\begin{aligned}&M_1sV_1(s)+(b_1+b_2)V_1(s)-b_1V_2(s)=R(s)\\&M_2sV_2(s)+b_1(V_2(s)-V_1(s))+k\frac{V_2(s)}{s}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left[M_1s+(b_1+b_2)\right]V_1(s)-b_1V_2(s)=R(s)$$

$$-b_1V_1(s)+\left(M_2s+b_1+\frac{k}{s}\right)V_2(s)=0$$

Σύστημα 2x2

$$\boxed{\frac{V_1(s)}{R(s)}=G_1(s)\qquad\frac{V_2(s)}{R(s)}=G_2(s)}$$

Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Σύστημα 2x2
$$\begin{bmatrix} M_1 s + (b_1 + b_2) & -b_1 \\ -b_1 & \left(M_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_1(s)}{R(s)} = G_1(s) = \frac{M_2 s^2 + b_1 s + k}{M_1 M_2 s^3 + [M_1 b_1 + M_2 (b_1 + b_2)] s^2 + [M_1 k - b_1^2] s + (b_1 + b_2) k}$$

$$\frac{V_2(s)}{R(s)} = G_2(s) = \frac{b_1 s}{M_1 M_2 s^3 + [M_1 b_1 + M_2 (b_1 + b_2)] s^2 + [M_1 k - b_1^2] s + (b_1 + b_2) k}$$

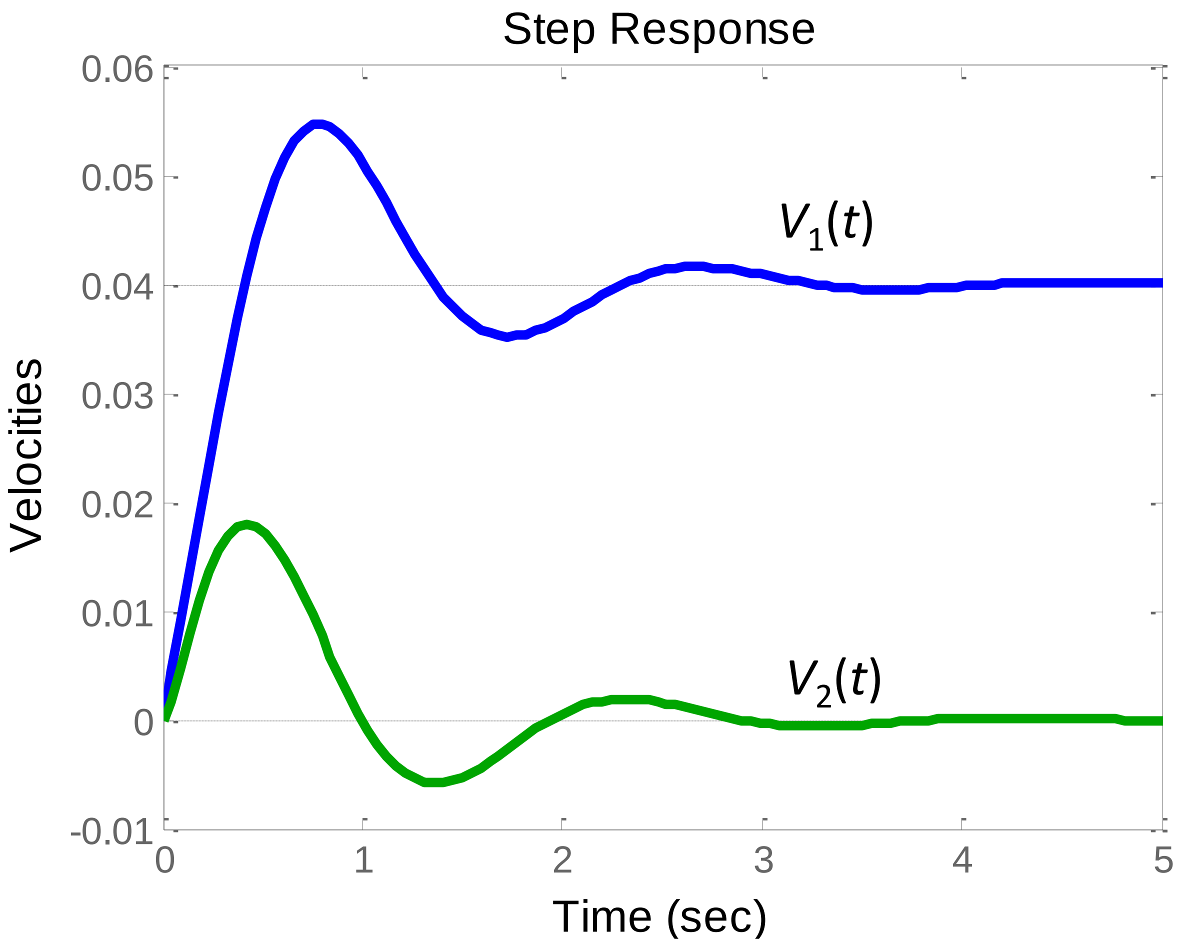
MATLAB:
```
M1=10; M2=1; b1=20; b2=5; k=100;
g1=tf([M2 b1 k],[M1*M2 M1*b1+M2*(b1+b2) M1*k-b1^2 (b1+b2)*k])
g2=tf([b1 0], [M1*M2 M1*b1+M2*(b1+b2) M1*k-b1^2 (b1+b2)*k])
```

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = v_1(t) \qquad sX_1(s) = V_1(s) \qquad \frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{s}$$

Προσομοίωση δυναμικού συστήματος

Απόκριση σε βηματική μεταβολή.

MATLAB: `step(g1); step(g2);`

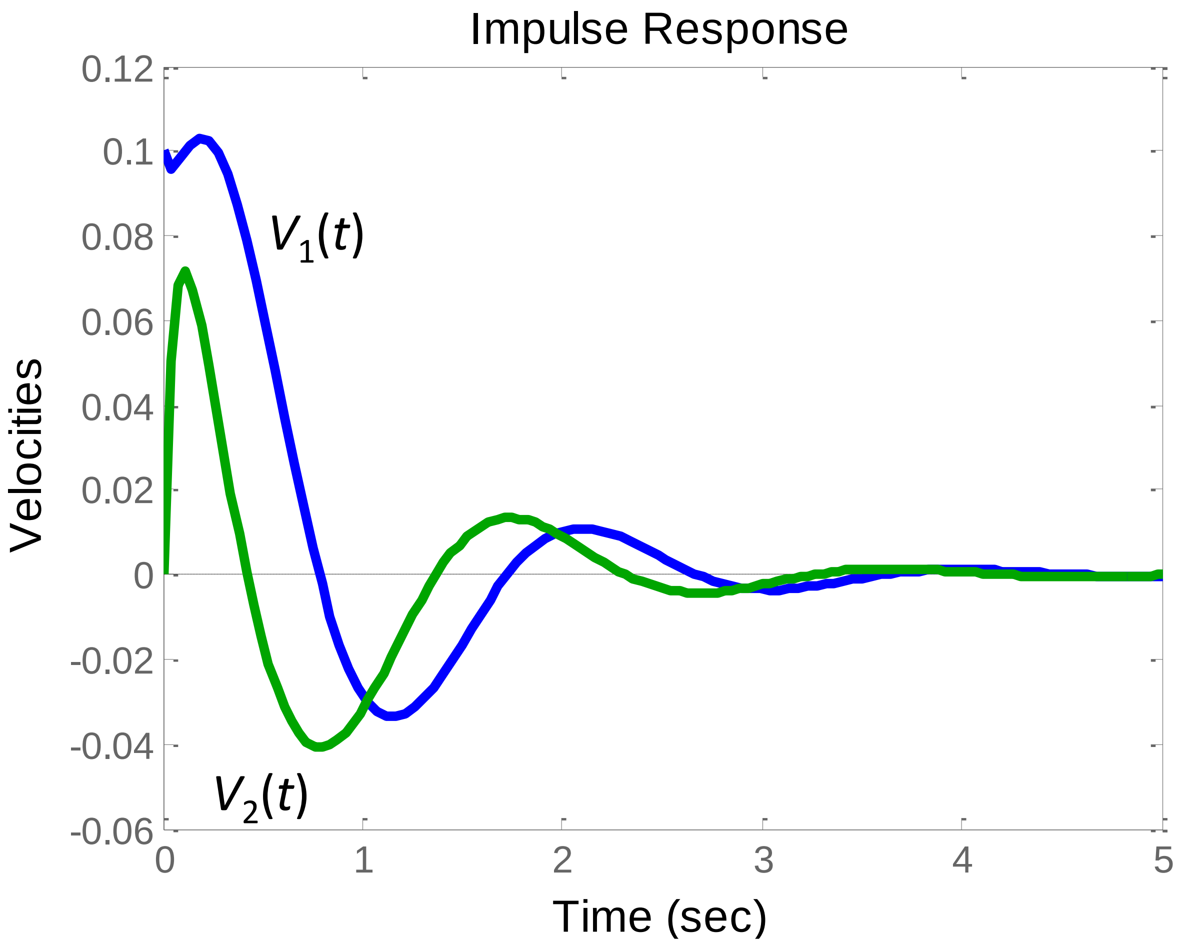


Παράμετροι: M_1=10 kg, M_2=1 kg, b_1=20 Ns/m, b_2=5 Ns/m, k=100 N/m.

Προσομοίωση δυναμικού συστήματος

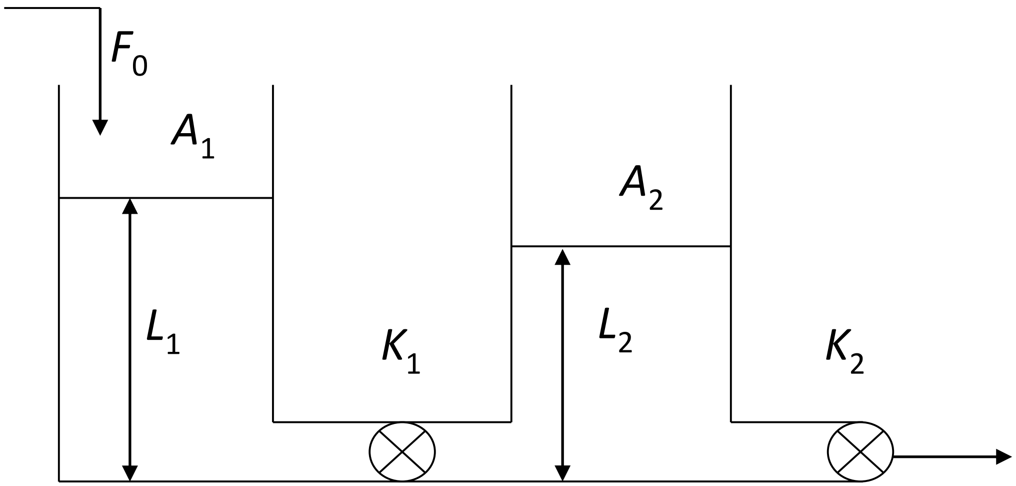
Απόκριση σε κρουστική μεταβολή:

MATLAB: `impulse(g1); impulse(g2)`



Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Σύστημα 2 αλληλεπιδρούντων δοχείων.



$$A_1 \frac{dL_1}{dt} = F_0 - K_1 \left(L_1 - L_2 \right)$$

$$A_2 \frac{dL_2}{dt} = K_1 \left(L_1 - L_2 \right) - K_2 L_2$$

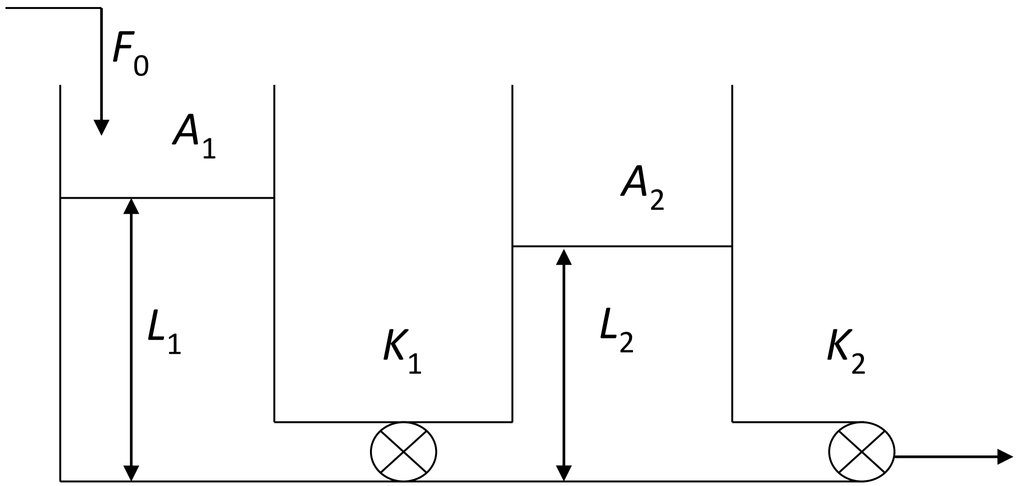
$$\left. \begin{array}{l} A_1 s L_1(s) = F_0(s) - K_1 \left[L_1(s) - L_2(s) \right] \\ A_2 s L_2(s) = K_1 L_1(s) - L_2(s) - K_2 L_2(s) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(A_1 s + K_1 \right) L_1(s) = F_0(s) + K_1 L_2(s)$$

$$\left(A_2 s + K_1 + K_2 \right) L_2(s) = K_1 L_1(s)$$

Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Σύστημα 2 αλληλεπιδρούντων δοχείων.

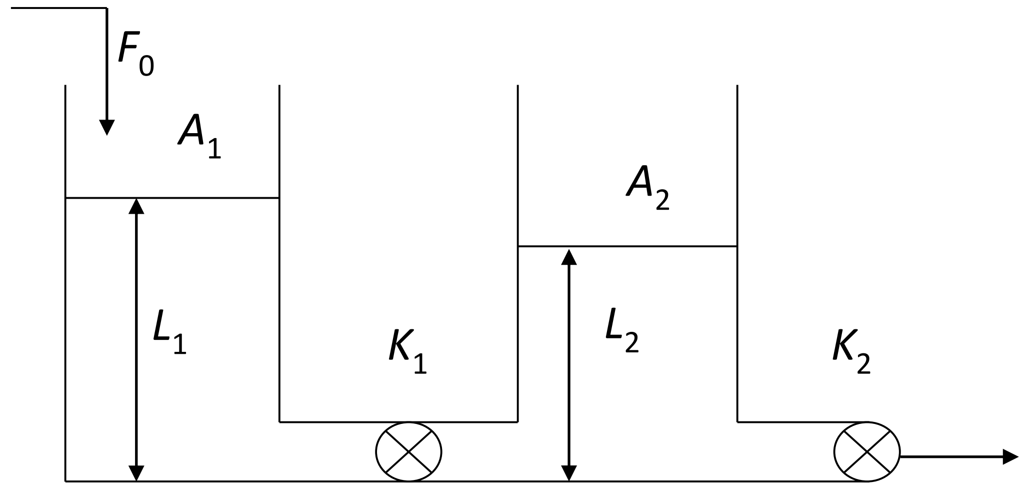


$$\frac{L_1(s)}{F_0(s)}=\frac{(A_2s+K_1+K_2)}{(A_1s+K_1)(A_2s+K_1+K_2)-K_1^2}$$

$$\frac{L_2(s)}{F_0(s)}=\frac{K_1}{(A_1s+K_1)(A_2s+K_1+K_2)-K_1^2}$$

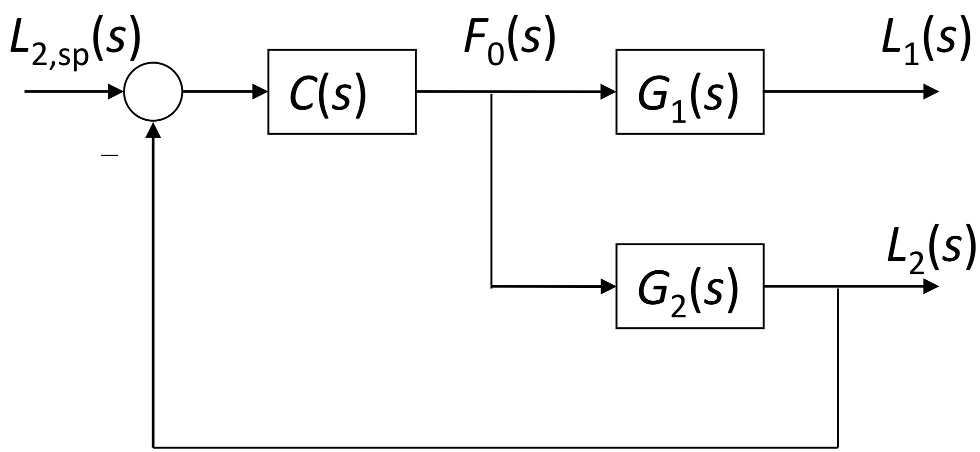
Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Σύστημα 2 αλληλεπιδρούντων δοχείων.



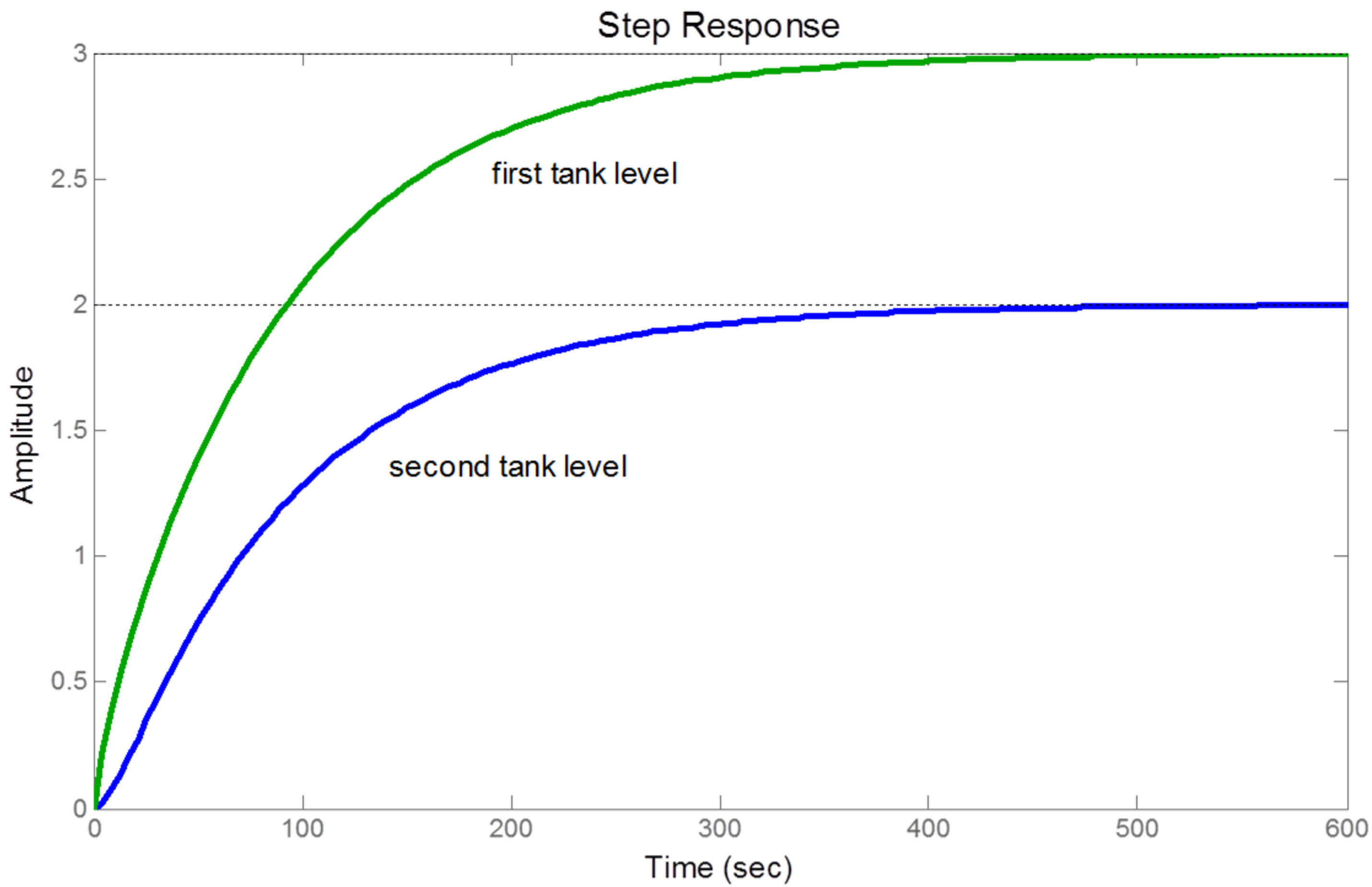
$$\frac{L_1(s)}{F_0(s)} = \frac{(A_2 s + K_1 + K_2)}{(A_1 s + K_1)(A_2 s + K_1 + K_2) - K_1^2}$$

$$\frac{L_2(s)}{F_0(s)} = \frac{K_1}{(A_1 s + K_1)(A_2 s + K_1 + K_2) - K_1^2}$$

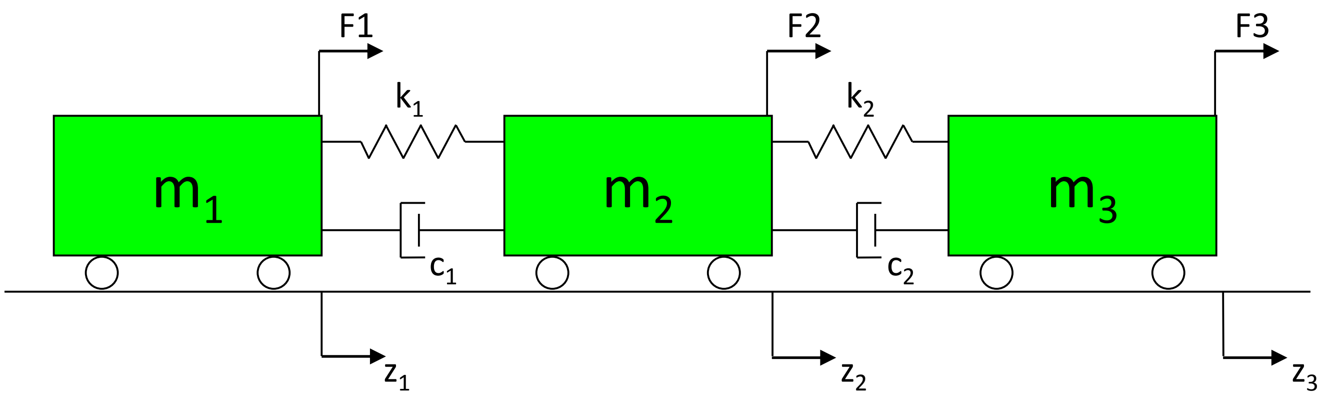


Προσομοίωση δυναμικού συστήματος

```
A1=19.5; A2=19.5; K1=1; K2=0.5;
g1=tf([A2 K1+K2],conv([A1 K1],[A2 K1+K2])+[0 0 -K1^2]);
g2=tf([K1],conv([A1 K1],[A2 K1+K2])+[0 0 -K1^2]);
step(g1); hold on; step(g2)
```



Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας

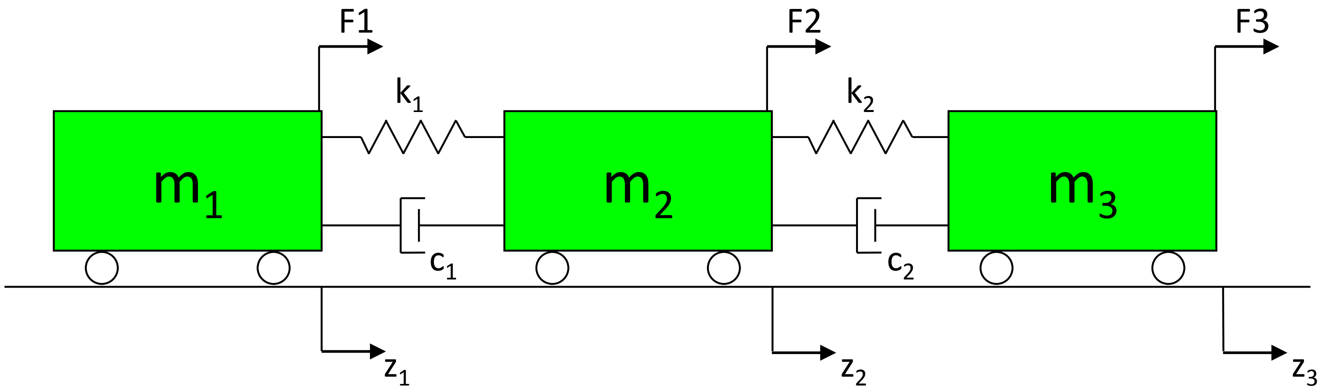


$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζεται μετασχηματισμός Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες (με χρήση μεταβλητών απόκλισης).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2 z_1 \\ s^2 z_2 \\ s^2 z_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sz_1 \\ sz_2 \\ sz_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



Ανακατατάσσοντας λαμβάνεται η σχέση:

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + c_1 s + k_1 & -c_1 s - k_1 & 0 \\ -c_1 s - k_1 & m_2 s^2 + c_1 s + c_2 s + k_1 + k_2 & -c_2 s - k_2 \\ 0 & -c_2 s - k_2 & m_3 s^2 + c_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

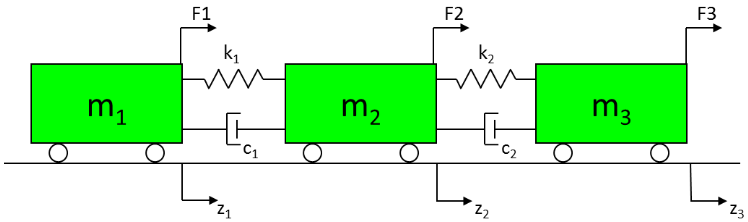
Επιλύεται το σύστημα ως προς τις 9 συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\frac{z_1}{F_1} = \begin{bmatrix} (m_2 m_3) s^4 + (m_3 c_1 + m_3 c_2 + m_2 c_2) s^3 \\ + (c_1 c_2 + m_2 k_2 + m_3 k_1 + m_3 k_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \end{bmatrix} / \mathrm{Den}$$

$$\frac{z_1}{F_2} = \left[(m_3 c_1) s^3 + (c_1 c_2 + m_3 k_1) s^2 + (c_1 k_2 + k_1 c_2) s + k_1 k_2 \right] / \mathrm{Den}$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



$$\frac{z_1}{F_3} = \left[(c_1 c_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \right] / \text{Den}$$

$$\frac{z_2}{F_1} = \left[(m_3 c_1) s^3 + (c_1 c_2 + m_3 k_1) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \right] / \text{Den}$$

$$\frac{z_2}{F_2} = \begin{bmatrix} (m_1 m_3) s^4 + (m_1 c_2 + m_3 c_1) s^3 \\ + (m_1 k_2 + c_1 c_2 + m_3 k_1) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \end{bmatrix} / \text{Den}$$

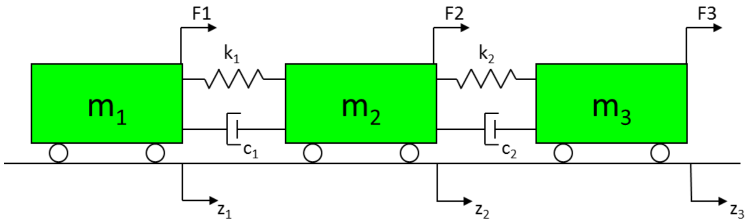
$$\frac{z_2}{F_3} = \left[(m_1 c_2) s^3 + (c_1 c_2 + m_1 k_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \right] / \text{Den}$$

$$\frac{z_3}{F_2} = \left[(m_1 c_2) s^3 + (c_1 c_2 + m_1 k_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \right] / \text{Den}$$

$$\frac{z_2}{F_3} = \left[(c_1 c_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \right] / \text{Den}$$

$$\frac{z_3}{F_3} = \begin{bmatrix} (m_1 m_2) s^4 + (m_1 c_2 + m_1 c_1 + m_2 c_1) s^3 \\ + (m_2 k_1 + c_1 c_2 + m_1 k_1 + m_1 k_2) s^2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) s + k_1 k_2 \end{bmatrix} / \text{Den}$$

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 6ης τάξης.

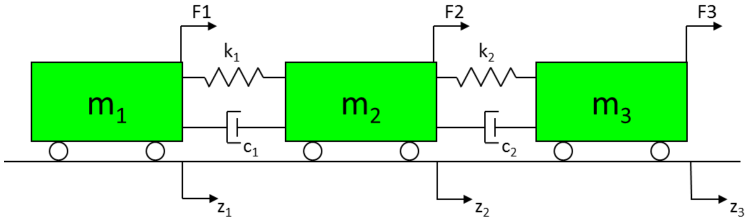
$$\text{Den} = s^2 \left[\begin{array}{l} (m_1 m_2 m_3) s^4 + (m_2 m_3 c_1 + m_1 m_3 c_1 + m_1 m_2 c_2 + m_1 m_3 c_2) s^3 \\ + (m_1 m_3 k_1 + m_1 m_3 k_2 + m_1 m_2 k_2 + m_2 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_2 + m_1 c_1 c_2 + m_2 m_3 k_1) s^2 \\ + (m_3 c_1 k_2 + m_2 c_2 k_1 + m_1 c_2 k_1 + m_1 c_1 k_2 + m_3 c_2 k_1 + m_2 c_1 k_2) s \\ + (m_1 k_1 k_2 + m_2 k_1 k_2 + m_3 k_1 k_2) \end{array} \right]$$

Απλοποιώντας.

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$
$$c_1 = c_2 = c$$
$$k_1 = k_2 = k$$

Θεωρώντας ένα σύστημα χωρίς απόσβεση με μοναδιαία μάζα και συντελεστή στιβαρότητας.

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



$$\frac{z_1}{F_1}=\frac{m^2s^4+3mks^2+k^2}{s^2\left(m^3s^4+4m^2ks^2+3mk^2\right)}$$

$$\frac{z_2}{F_1}=\frac{k}{s^2\left(m^2s^2+3mk\right)}$$

$$\frac{z_3}{F_1}=\frac{k^2}{s^2\left(m^3s^4+4m^2ks^2+3mk^2\right)}$$

$$\frac{z_2}{F_2}=\frac{m^2s^4+3mks^2+k^2}{s^2\left(m^3s^4+4m^2ks^2+3mk^2\right)}$$

Απαλοιφή
μηδενικών – πόλων.

Πόλοι χαρακτηριστικής εξίσωσης:

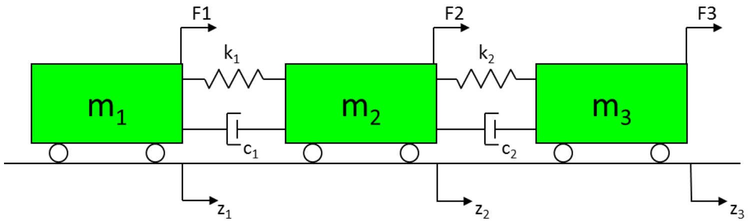
$$s^2\left(m^3s^4+4m^2ks^2+3mk^2\right)=0$$

$$s_{1,2}=0,\quad s_{3,4}=\pm j\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm j$$

$$s_{5,6}=\pm j\sqrt{\frac{3k}{m}}=\pm 1.732j$$

1. Οι πόλοι χαρακτηρίζουν τη συχνότητα που το σύστημα συντονίζεται.
2. Οι πόλοι εξαρτώνται μόνο από τις μάζες, τη στιβαρότητα και την απόσβεση και όχι από το σημείο που ασκούνται οι δυνάμεις ή μετρούνται οι μετατοπίσεις.
3. Οι πόλοι είναι κοινοί για κάθε συνάρτηση μεταφοράς.

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



$$\frac{z_1}{F_1} = \frac{m^2 s^4 + 3mks^2 + k^2}{s^2\left(m^3 s^4 + 4m^2 ks^2 + 3mk^2\right)}$$

$$\frac{z_2}{F_1} = \frac{k}{s^2\left(m^2 s^2 + 3mk\right)} \quad \frac{z_3}{F_1} = \frac{k^2}{s^2\left(m^3 s^4 + 4m^2 ks^2 + 3mk^2\right)} \quad \frac{z_2}{F_2} = \frac{m^2 s^4 + 3mks^2 + k^2}{s^2\left(m^3 s^4 + 4m^2 ks^2 + 3mk^2\right)}$$

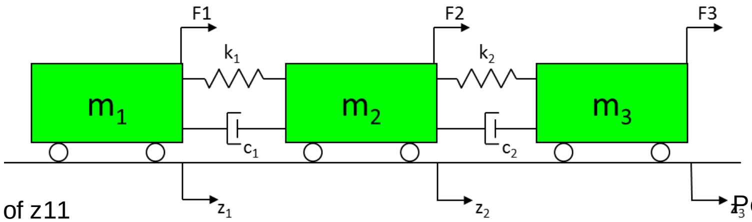
Απαλοιφή
μηδενικών – πόλων.

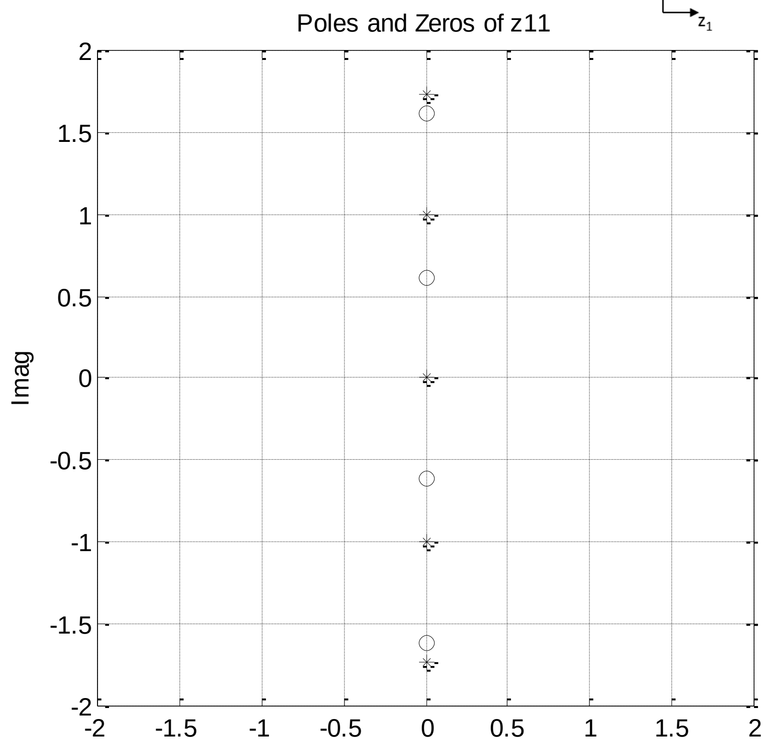
Μηδενικά συναρτήσεων μεταφοράς:

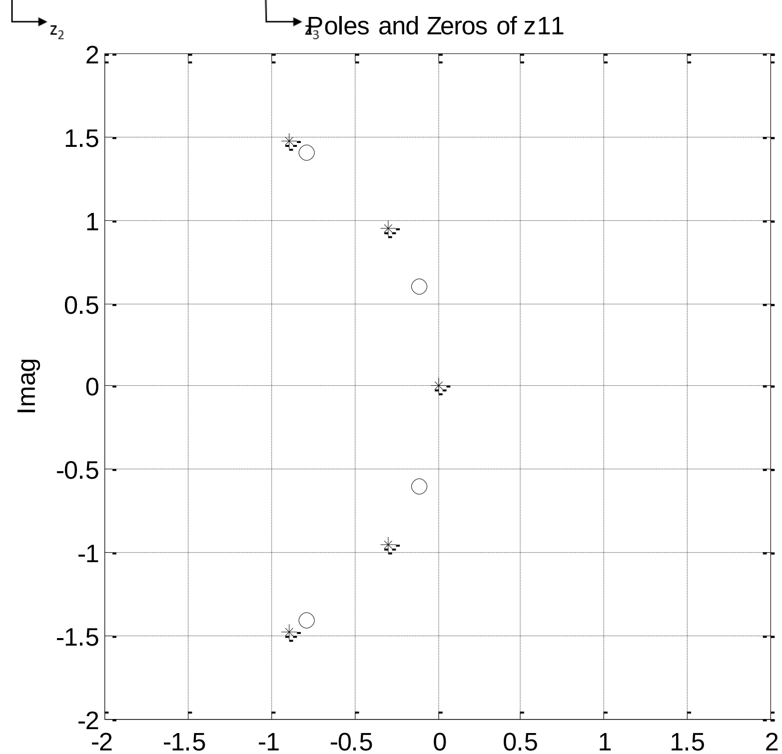
$$\begin{bmatrix} \pm 0.62, \pm 1.62 & \pm j & - \\ \pm j & \pm j, \pm j & \pm j \\ - & \pm j & \pm 0.62, \pm 1.62 \end{bmatrix}$$

1. Τα μηδενικά χαρακτηρίζουν τις συχνότητες που εξασθενούν τα σήματα εισόδου.
2. Τα μηδενικά είναι διαφορετικά για κάθε συνάρτηση μεταφοράς.
3. Τα μηδενικά εξαρτώνται από τη θέση των δυνάμεων και των αισθητήρων (μετρήσεων).

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας







Μηδενικά (o) και πόλοι (*) χωρίς απόσβεση.
Οι πόλοι βρίσκονται στο φανταστικό άξονα.

Μηδενικά (o) και πόλοι (*) με απόσβεση.
Οι πόλοι απομακρύνονται από το φανταστικό άξονα.

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Εφαρμόζει τη μεθοδολογία ανάπτυξης μαθηματικών προτύπων δυναμικών συστημάτων.
- Επιλύει συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.
- Εξαγάγει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δυναμικής απόκρισης ενός συστήματος χωρίς επίλυση στο πεδίο του χρόνου.
- Γραμμικοποιεί μη-γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Καταστρώνει δυναμικά πρότυπα με μηδενικές αρχικές συνθήκες με χρήση μεταβλητών απόκλισης.
- Υπολογίζει και να χρησιμοποιεί συναρτήσεις μεταφοράς και διαγράμματα λειτουργικών βαθμίδων για την απεικόνιση της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος.
- Συνθέτει και να αναλύει σύνθετα διαγράμματα λειτουργικών βαθμίδων.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ Αθανάσιος Ι. Παπαδόπουλος
Δρ Αγγελική Μονέδα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης